UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación

CUADERNOS PEDAGÓGICOS

16

ISSN 1657-5547

CUADERNOS PEDAGÓGICOS

Número 16

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín
2001

CUADERNOS PEDAGÓGICOS

ISSN: 1657-5547

Comité editorial:
Orlando Monsalve Posada
Eugenia Ramírez Isaza

Coordinación y diagramación:
Sección de Producción de Medios, Aplicación de Nuevas Tecnologías y Publicaciones, Departamento de Extensión y Educación a Distancia.

Diseño y Diagramación
Sandra Milena Zapata
Marisol Rios Restrepo

Corrección de Estilo
Arnoldo Ramírez Escobar

Impresión:
Editorial Zuluaga.

Primera Edición de 1000 ejemplares.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Ciudad Universitaria, Bloque 9 oficina 114
Teléfonos: 2105714, 2105715
Fax: 2105713
Correo electrónico: femedios@ayura.udea.edu.co

Medellín
2001

Ej. 1

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El presente cuadernillo contiene algunas de las elaboraciones teóricas - metodológicas de varios docentes del área de Matemática.

Son el resultado de un largo proceso de reflexión pedagógica presentado a discusión durante los Encuentros Regionales de Matemáticas, patrocinados por la Facultad en los últimos años.

El lector tendrá a su disposición un variado surtido de propuestas metodológicas que le permitirán introducir novedades en su práctica docente.

Encontrará un tratamiento alterno para la **multiplicación de números reales,** con sustento sencillo en los polinomios; igualmente, verá cómo usar **la regla y el compás para la solución de ecuaciones cuadráticas.**

Así mismo se les invita a mirar **las situaciones problema como una fuente de matematización** y los **fundamentos sociológico - matemáticos del razonamiento matemático.**

De otro lado se les entregan a los docentes **algunas ideas básicas para acompañar a los niños en el desarrollo** del **pensamiento geométrico y actividades sobre una hoja de papel** como un auxiliar simple, barato y polifuncional dentro del aula.

Remata el cuadernillo con una discusión sobre la **generalización y la conceptualización aplicada a las estructuras aditivas.**

Esperamos que estos trabajos contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en nuestro sistema escolar.

Cordialmente,

QUEIPO F. TIMANÁ VELÁSQUEZ
Decano
Facultad de Educación

ECUACIONES CUADRATICAS / ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

SOLUCIÓN, CON REGLA Y COMPÁS, DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Grimaldo Oleas Liñan*

En diferentes encuentros con docentes, se ha indagado acerca de cómo se enseña en Educación Secundaria el concepto de *ecuación cuadrática.*

La realidad cruda es que, en la mayoría de los casos, la intervención docente se reduce a informar que la ecuación cuadrática es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y que la *solución* se obtiene mediante la llamada *fórmula general.*

No se hace, por supuesto, alusión a conceptos como: *función cuadrática, parábola, interceptos.*

Es evidente que lo único que el joven aprende, en estas circunstancias, es la archiconocida *fórmula,* después de resolver, o ver hacerlo, numerosos ejercicios memóricamente.

Adicionalmente se ha observado que el Álgebra elemental y la Geometría se consideran áreas independientes, con escasa o nula conexión.

En este trabajo se presenta uno de los **numerosos** temas en los que se aprecia la estrecha relación Álgebra-Geometría:

* *Profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.*

se exhibe cómo el **problema de resolver una ecuación de segundo grado puede abordarse desde la Geometría Euclidiana.**

Una función cuadrática suele expresarse como: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes, y $a \neq 0$. Se considera aquí el caso en que **a, b y c son constantes reales.**

La gráfica de la función cuadrática es una ***parábola,*** cóncava hacia arriba o hacia abajo según el signo de la constante **a.**

Si dicha gráfica corta al eje **x** en algún punto, éste debe ser una pareja **(x, 0)** ; es decir, un punto en el cual **f(x) = 0**; o lo que es lo mismo: $ax^2 + bx + c = 0$.

Resolver en $\Re$ la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, consiste en hallar las abscisas de los puntos **(x, 0)** en los cuales la curva f corta al eje **x.**

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es siempre posible, ya que $a \neq 0$, escribirla como:

$$x^2 + \beta x + \lambda = 0 \qquad (1)$$

Se analiza a continuación la ecuación cuadrática con la forma (1).

Para resolver la ecuación (1), puede deducirse algebraicamente la llamada fórmula general:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2} \qquad (2)$$

Se intenta en este trabajo darles sentido geométrico a las soluciones reales, si existen, de la ecuación (1) y, consecuentemente, **llegar a la *fórmula general* (2).**

Los coeficientes de la ecuación cuadrática $x^2 + \beta x + \lambda = 0$ presentan, en general, dos posibilidades:

1. $\beta = 0$ ó $\lambda = 0$
2. $\beta \neq 0$ y $\lambda \neq 0$

1. $\beta = 0$ ó $\lambda = 0$

1.1 $\lambda = 0$

La ecuación se reduce a: $x^2 + bx = 0$; es decir, a : $x(x + b) = 0$. Una simple aplicación de propiedades de los reales, permite concluir que hay dos soluciones reales: 0 (cero) y $-b$.

1.2 $\beta = 0$

La ecuación se transforma en: $x^2 + \lambda = 0$. Una nueva aplicación de propiedades de los reales, lleva a concluir que hay tres posibilidades:

- $\lambda = 0$ (analizado antes).
- $\lambda > 0$ (la ecuación carece de solución real).
- $\lambda < 0$

En este último caso, hágase $c = -\lambda$; así, $c > 0$ y la ecuación pasa a ser:

$$x^2 = c \qquad (3)$$

Considérese la solución real **x** positiva de la ecuación (3). Esta ecuación puede reescribirse:

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{x}$$

Debe, pues, **construirse,** (trazarse) un **segmento** cuya longitud, **x**, sea media proporcional entre **c** y **1**. Para ello, puede procederse como se indica en el ejercicio correspondiente al caso 2.1, que se estudia posteriormente.

De este modo, se obtiene la solución real positiva: $x = \sqrt{c}$. Queda completo el análisis de la primera posibilidad para β y λ.

2. $\beta \neq 0$ y $\lambda \neq 0$

Ahora hay **cuatro** casos posibles:

- $\beta > 0$ y $\lambda < 0$
- $\beta < 0$ y $\lambda < 0$
- $\beta < 0$ y $\lambda > 0$
- $\beta > 0$ y $\lambda > 0$

2.1 $\beta > 0$ y $\lambda < 0$

Debe resolverse la ecuación:

$$x^2 + \beta x + \lambda = 0 \quad (\text{con } \beta > 0 \text{ y } \lambda < 0) \qquad (4)$$

Defínase: $b = \beta$; $c = - \lambda$. Se obtiene así la ecuación: $x^2 + bx - c = 0$, con b y c constantes positivas. Esta ecuación es equivalente a:

$$x(x + b) = (\sqrt{c})^2 \qquad (5)$$

En caso de existir **solución positiva**, deben hallarse **dos segmentos**, de longitudes **x**, **x + b**, de modo que el segmento de longitud **c** sea **media proporcional** entre ellos:

$$\frac{x+b}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x}$$

Supóngase **resuelto el problema;** es decir, se conocen los segmentos de longitudes x + b, x. Esto permitiría hallar su media proporcional: **el segmento de longitud** $\sqrt{c}$.

Geométricamente se procede así: el segmento $\overline{AB}$ (fig 1) tiene longitud **AN + NB**; es decir **(x+b) + x**. Debe tenerse: AM = x, MN = b.

Para construir el segmento de **longitud** $\sqrt{c}$, ha de trazarse una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Para ello, debe primero hallarse su centro **(O)**: punto médio de $\overline{AB}$,

Figura 1

Es evidente que **O** es el punto medio del segmento $\overline{MN}$. Ahora, con centro en **O** y radio r ($\overline{OB}$), se traza la semicircunferencia buscada (figura 2).

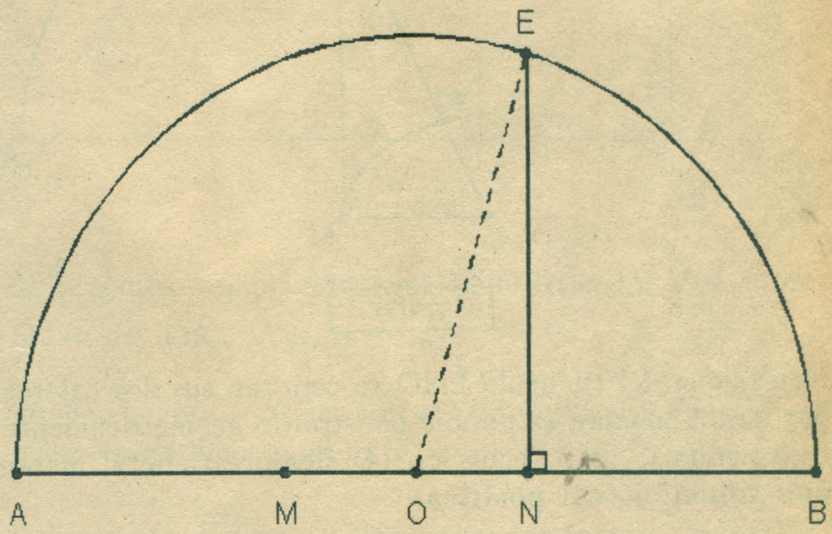


Figura 2

En **N**, se traza $\overline{NE}$, perpendicular al diámetro $\overline{AB}$. $\overline{NE}$ es el segmento de longitud $\sqrt{c}$ buscado (es media proporcional entre $\overline{AM}$, de longitud **x+b**, y $\overline{NB}$, de longitud **x**).

El radio de la semicircunferencia es: r = OE = OB = x + b/2. En el triángulo rectángulo **ENO**, el cateto ON = b/2; el cateto NE $= \sqrt{c}$. En consecuencia, para resolver geométricamente, se procede así:

i) Se construye un segmento de longitud $\sqrt{c}$.

ii) Se construye el triángulo rectángulo **ENO** de catetos EN($\sqrt{c}$) y ON(b/2). Véase la figura 3.

iii) A continuación, con centro **O,** y radio b/2, se traza un arco que corta la hipotenusa $\overline{OE}$ en F.

El segmento $\overline{EF}$ es el segmento **solución** de la ecuación (4).

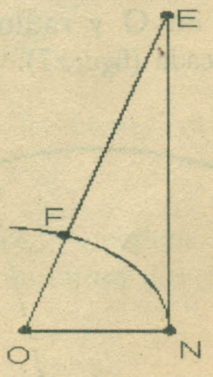


Figura 3

Nótese que del triángulo **ENO** se conocen sus dos catetos; por tanto, siempre es posible construirlo geométricamente. Esto significa, que la ecuación (4) **siempre tiene al menos una solución real positiva.**

Ejercicio

Resuélvase geométricamente la ecuación: $x^2 + 3x - 5 = 0$

Solución

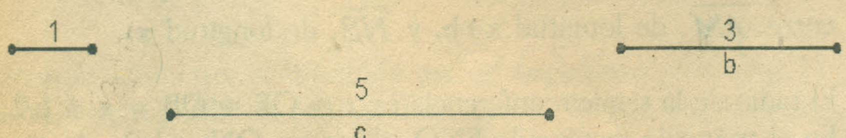


Figura 4

En la figura 4 se muestran segmentos de longitudes: 1, 3, 5.

i. Se construye $\sqrt{c}$ (Fig. 5). En la figura 5, HQ = c; QI = 1; P es punto medio de $\overline{HI}$ y es centro de la semicircunferencia que pasa por R. $\overline{QR}$ es perpendicular al diámetro $\overline{HI}$. En consecuencia, QR = $\sqrt{c}$.

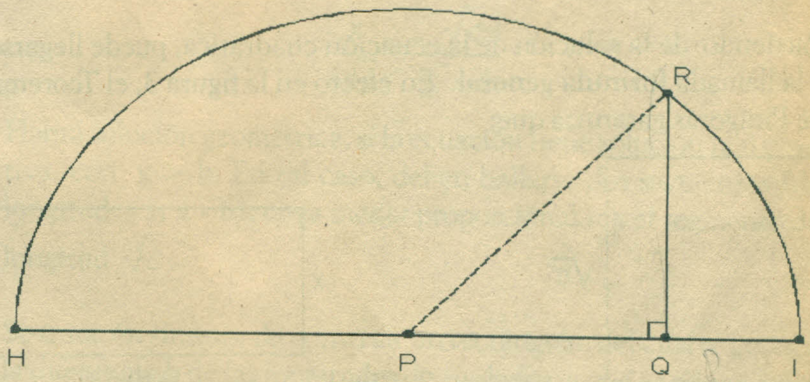


Figura 5

ii) Se construye ahora el triángulo **ENO** de catetos ON = b/2, y EN = $\sqrt{c}$ (QR). Véase la figura 6.

iii) Finalmente se traza, con centro O y radio ON, un arco que corta la hipotenusa en F.

El segmento $\overline{EF}$ es un segmento solución (de longitud **x**).

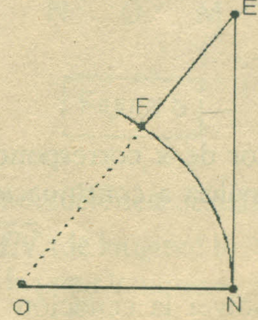


Figura 6

Obsérvese que al resolver geométricamente la ecuación (4), se ha resuelto el problema:

***Dado un cuadrado de área c, constrúyase un rectángulo equivalente, del cual se conoce la diferencia (b) entre las longitudes de sus* lados.** Véase figura 7.

Partiendo de la solución de la ecuación cuadrática, puede llegarse a la llamada **fórmula general**. En efecto en la figura 3, el Teorema de Pitágoras garantiza que:

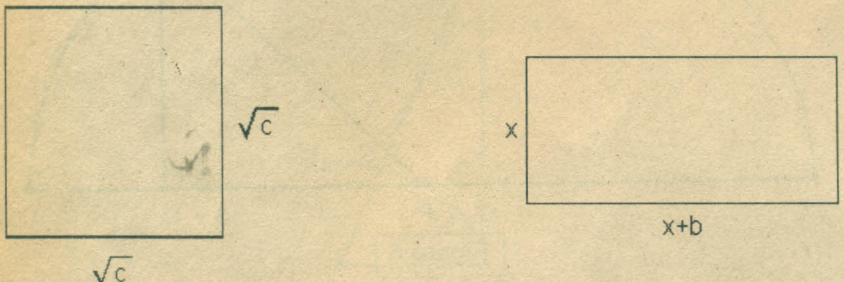


Figura 7

$r = OE = \sqrt{ON^2 + NE^2}$; esto es, $r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. Por tanto, $r = \frac{\sqrt{b^2+4c}}{2}$. Pero $x = r - \frac{b}{2}$. Luego, $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.

Devolviendo el cambio hecho en la ecuación (4), $x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2}$.

Obsérvese que el valor de **x** corresponde a la fórmula general dada en (2). Se analiza a continuación el segundo caso:

22 $\beta < 0$ y $\lambda < 0$

Se trata ahora de resolver la ecuación:

$$x^2 + \beta x + \lambda = 0, \quad \text{con } \beta < 0 \text{ y } \lambda < 0 \qquad (7)$$

Sean: $b = -\beta$; $c = -\lambda$. La ecuación se transforma en:

$$x^2 - bx - c = 0 \qquad (8)$$

Con b y c reales positivos. De la ecuación (8) se obtiene:

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x - b}$$

Habrá solución geométrica, si la ecuación tiene solución real positiva, con $x > b$. En tal caso, deben hallarse dos segmentos (de longitudes **x, x - b**), cuya media proporcional sea el segmento de longitud $\sqrt{c}$.

Se trata, en síntesis, de construir un rectángulo, del cual se conoce la diferencia **b** de las longitudes de sus lados, y que es equivalente a un cuadrado de área **c**.

Supóngase como antes, el problema resuelto; es decir, se *conocen* x, x - b. Esto permite construir $\sqrt{c}$, su media proporcional.

El segmento $\overline{AB}$ (fig. 8) tiene longitud:
$AB = AN + NB$
$AB = (x - b) + x$

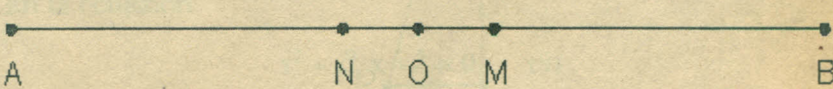


Figura 8

El centro O de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ es el punto medio del segmento $\overline{MN}$ (de longitud b). Ahora, con centro O y radio r (OB), se traza la semicircunferencia buscada (fig. 9).

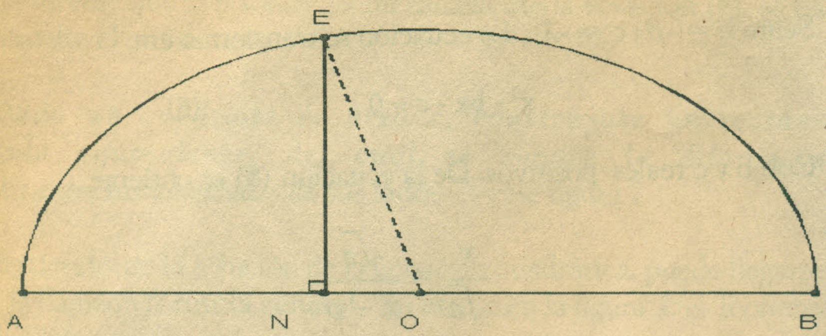


Figura 9

$\overline{NE}$ es el segmento de longitud $\sqrt{c}$. Además, NO $= \frac{b}{2}$, y AM $=$ AO + OM. Es decir, $x = r + \frac{b}{2}$.

En el triángulo rectángulo ENO, el cateto ON $= \frac{b}{2}$, y el cateto EN $= \sqrt{c}$.

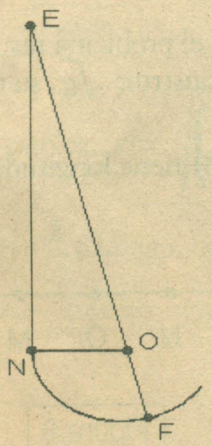


Figura 10

La solución geométrica, en consecuencia, se desarrolla así:

i) Se construye un segmento de longitud $\sqrt{c}$.

ii) Se construye el triángulo rectángulo ENO de catetos $\overline{EN}$ ($\sqrt{c}$) y $\overline{NO}$ ($\frac{b}{2}$). Véase la fig. 10.

iii) A continuación, con centro O y radio $\frac{b}{2}$, se traza un arco que corta la prolongación de la hipotenusa $\overline{EO}$ en F. El segmento $\overline{EF}$ es el segmento solución de la ecuación (7).

Del triángulo ENO se conocen sus catetos; por ello, siempre es posible construirlo, lo cual significa que la ecuación (7) **siempre tiene al menos una solución real positiva.**

En la figura 10, $r = x - \frac{b}{2}$; además, por el Teorema de Pitágoras, $r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. Es inmediato que: $x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$. Devolviendo la sustitución, se obtiene: $x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2}$. Se ha llegado, una vez más, a la fórmula general (2).

Ejercicio

Resuélvase geométricamente la ecuación: $x^2 - 3x - 5 = 0$

A continuación se hace el análisis del tercer caso.

2.3 $\beta < 0$ y $\lambda > 0$

En la ecuación

$$x^2 + \beta x + \lambda = 0 \qquad (9)$$

hágase: $b = -\beta$; $c = \lambda$. Se obtiene así la ecuación

$$x^2 - bx + c = 0 \qquad (10)$$

(con $b > 0$, $c > 0$).

Una ecuación equivalente es: $\frac{b - x}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x}$. Hay solución geométrica si la ecuación tiene solución real positiva, con $0 < x < b$.

El problema consiste ahora en hallar dos segmentos de longitudes **b - x** y **x**, cuya media proporcional sea un segmento de longitud $\sqrt{c}$.

De otro modo: debe construirse un rectángulo equivalente a un cuadrado de área **c**, conocida la suma de las longitudes de sus lados.

Como antes, supóngase el problema resuelto. Se conocen, así, los segmentos de longitudes **b - x** y **x**.

Para construir el segmento de longitud $\sqrt{c}$, se procede como en los casos anteriores:

En la figura (11), AB = AN + NB, con AN = b - x, NB = x. Así, AB = b.

El centro O de la circunferencia de diámetro AB es el punto medio del segmento AB (que mide b).

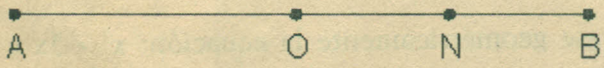


Figura 11

Ahora, con centro O, se construye (fig. 12), la semicircunferencia de radio r = OA = OB.

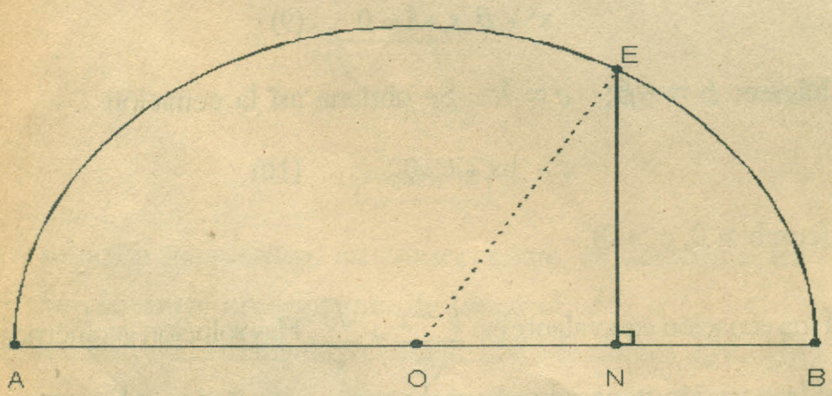


Figura 12

En la figura 12: ON = $\frac{b}{2}$ - x; NE = $\sqrt{c}$; OE = r = $\frac{b}{2}$. Del triángulo rectángulo ENO se conoce la hipotenusa $\left(\frac{b}{2}\right)$ y el cateto $\overline{EN}$ ($\sqrt{c}$).

La existencia de dicho triángulo sólo es posible si la longitud del cateto ($\sqrt{c}$) es menor que la de la hipotenusa OE . $\left(\frac{b}{2}\right)$

En consecuencia, debe hacerse la siguiente construcción (fig. 13):

En la prolongación del diámetro $\overline{BA}$ se traza una perpendicular $\overline{PT}$, con longitud $\sqrt{c}$. Por T se traza una paralela τ al diámetro $\overline{AB}$.

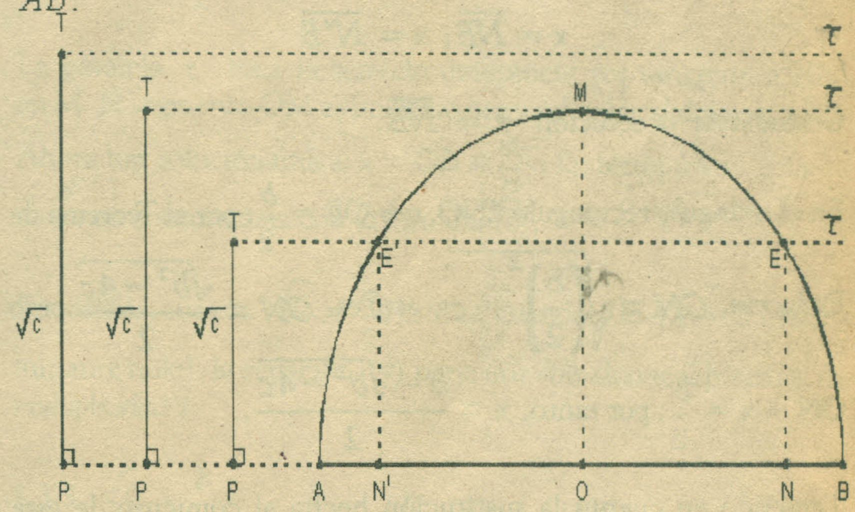


Figura 13

Hay tres posibilidades:

- La paralela τ corta la semicircunferencia en dos puntos: E y E´. Esto sucede si $\sqrt{c} < \frac{b}{2}$.

• La paralela es tangente a la semicircunferencia en M. Se presenta si $\sqrt{c} = \frac{b}{2}$.

• La paralela no corta la semicircunferencia. Se da cuando $\sqrt{c} > \frac{b}{2}$.

En el análisis de la tres situaciones se obtiene:

2.3.1 $\sqrt{c} < \frac{b}{2}$

La paralela τ corta la semicircunferencia en dos puntos E y E´. Desde estos se bajan las perpendiculares, EN y E´N´ al diámetro AB. En este caso hay dos soluciones obtenidas geométricamente:

$$x = \overline{NB};\ x = \overline{N'B}$$

Considérese la solución $x = \overline{NB}$.

En el triángulo rectángulo ENO, $r = OE = \frac{b}{2}$; por el Teorema de Pitágoras, $ON = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$; esto es, $ON = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ pero $ON + x = \frac{b}{2}$; por tanto, $x = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$.

Teniendo en cuenta la sustitución hecha al comienzo de este caso, se tiene:

$$x = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2}$$

lo que corresponde, nuevamente, a la fórmula general dada en (2).

Es sencillo deducir que la segunda solución es:

$$x = N'B = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2}$$

,

en concordancia con la fórmula (2).

En resumen, cuando $\sqrt{c} < \frac{b}{2}$; esto es, cuando $\beta^2 - 4\lambda > 0$ discriminante positivo), la ecuación (9) tiene dos soluciones reales positivas, resumidas en:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\lambda}}{2}$$

2.3.2 $\sqrt{c} = \frac{b}{2}$

La paralela τ toca la semicircunferencia (es tangente a ella) en M. El segmento OM es un radio perpendicular al diámetro AB. Ahora hay solución única: $x = OB = \frac{b}{2}$. En términos de β : $x = -\frac{\beta}{2}$, en consonancia con la fórmula (2).

En síntesis, cuando $\sqrt{c} = \frac{b}{2}$; esto es, cuando $\beta^2 - 4\lambda = 0$ (discriminante nulo), la ecuación (9) tiene una solución real positiva, de *multiplicidad* 2.

2.3.3. $\sqrt{c} > \frac{b}{2}$

La paralela τ no corta ni toca la semicircunferencia. En este caso, no es posible construir el triángulo rectángulo ENO; lo que significa que no hay solución real para la ecuación.

Obsérvese que ahora $\beta^2 - 4\lambda < 0$ (discriminante negativo).

Ejercicio

Resuélvanse geométricamente las ecuaciones:

- $x^2 - 3x + 2 = 0$
- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $x^2 - 3x + 3 = 0$

Se analiza enseguida el último caso.

2.4 $\beta > 0$ y $\lambda > 0$

Sean: $b = \beta$; $c = \lambda$. La ecuación se transforma en:

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (11)$$

Con $b > 0$, $c > 0$. Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{x}{\sqrt{c}} = \frac{-\sqrt{c}}{x+b}$$

Fácilmente se observa que la ecuación **carece de solución real positiva**.

Ejemplo

- $x^2 + 3x + 2 = 0$

Tiene dos soluciones reales negativas.

- $x^2 + 2x + 3 = 0$

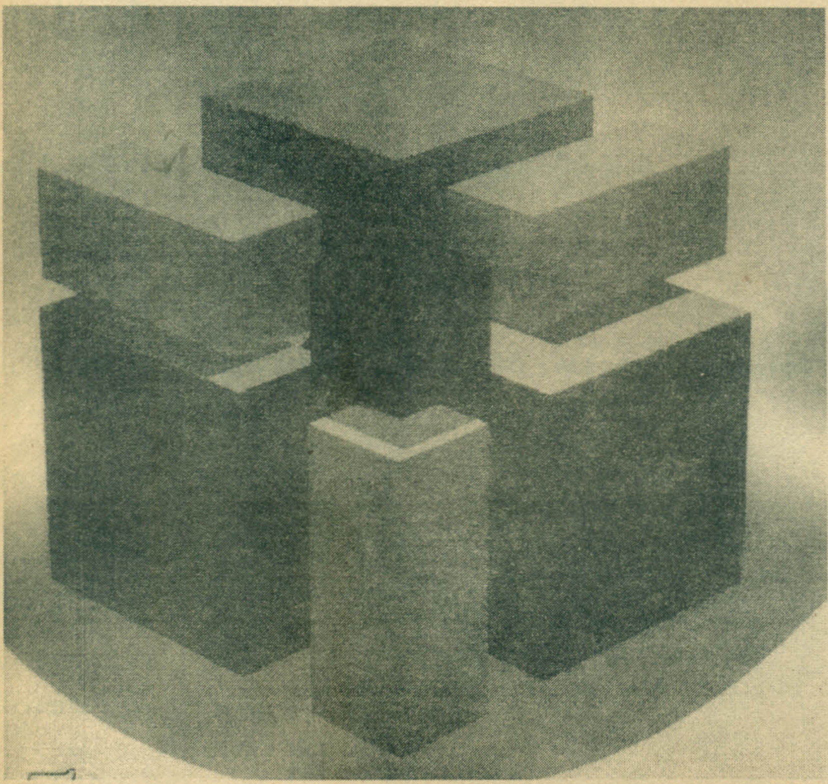
No tiene soluciones reales.

BIBLIOGRAFÍA

Memorias de la III jornada sobre la enseñanza de la geometría. Cuernavaca, México, 29 y 30 de octubre, 1993.

Bold, Benjamin. Famous Problems of Geometry . Dover, New York, 1982, 112 pag.

F.I.C, Exercices de géométrie, segunda edición; París, 1882.



Extracción del libro Una brisa refrescante
para la iniciación a la matemática
Orlando Monsalve Posada

RESOLUCION DE PROBLEMAS%.
ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS%.

LAS SITUACIONES PROBLEMA COMO FUENTE DE MATEMATIZACIÓN[1]

John Jairo Múnera Córdoba*

En los lineamientos curriculares de 1998 se propone el replanteamiento de los programas de matemáticas para la educación básica secundaria. Por un lado, privilegian la selección de los contenidos básicos; y por el otro, hacen énfasis en las estrategias metodológicas. Desde esta perspectiva, la propuesta pretende que la intervención pedagógica posibilite la reflexión al interior de los procesos para acceder al aprendizaje de los conceptos matemáticos significativamente. Como es fácil apreciar, los parámetros allí trazados tienden a cualificar el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

En todo proceso de enseñanza - aprendizaje siempre será necesario recurrir a unos contenidos básicos, teniendo presente que un currículo no puede reducirse a una lista de contenidos. En términos del doctor Luis Moreno Armella[2], el currículo es como el piso sobre el que uno camina aunque lo importante no sea el piso sino el camino que uno lleva: a donde quiere ir.

La propuesta para el área de matemáticas se fundamenta en los lineamientos de la pedagogía activa. Esta metodología está basada en el trabajo por procesos, en los que la presentación lineal de los contenidos carece de sentido, dado que lo importante

* *Licenciado en Educación: Matemáticas y Física, Universidad de Antioquia; Magíster en Educación: Psicopedagogía (Énfasis en Pensamiento Lógico Matemático), Universidad de Antioquia; actualmente profesor de cátedra de la facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.*

[1] *Ponencia presentada como soporte conceptual del Taller que lleva el mismo nombre, realizado en: VI Encuentro Departamental de Matemáticas. CEID – ADIDA, en el mes de septiembre de 2000.*

[2] *E-MAIL de Luis Moreno Armella, del Cinvestav-IPN de México. 5 de septiembre de 2000.*

es desarrollar ideas matemáticas en los estudiantes. La presentación de los conceptos a través de las múltiples relaciones posibles, le da definitivamente a la matemática el carácter estructurante, propiciando, cada vez más, un mayor acercamiento a nuevas maneras de expresión frente a los conceptos matemáticos.

Otra de las características de la metodología por procesos es que vincula la actividad desde dos perspectivas complementarias: una, la actividad del estudiante, aunque esté compartiendo sus concepciones conceptuales con los demás compañeros, le permite generar un proceso de interiorización, de modo que (re)-produzca en él una red dinámica de conceptos. La otra manera es ver la actividad como "las maneras de hacer colectivas", es decir, concebir la actividad, en términos de Luis Moreno, como una actividad distribuida.

Es importante tener en cuenta las indicaciones que viene haciendo el Ministerio de Educación Nacional en torno a las líneas fundamentales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Colombia; éstas buscan impulsar el desarrollo de las mismas, tanto en su investigación como en el mejoramiento de sus procesos y potenciar la interacción cultural en cuanto a la formación matemática de los estudiantes.

Cualificar la enseñanza y aprendizaje de un saber como la matemática, implica, reorganizar el currículo de modo que se pueda movilizar desde una orientación metodológica activa y participativa que integre otras alternativas diferentes a la presentación lineal y abstracta de los contenidos matemáticos. Para complementar el significado de una intervención pedagógica desde un enfoque participativo, veamos las interpretaciones del profesor Mesa, al respecto:

> *"Las interacciones entre el estudiante, el objeto a conocer y el docente deben ser fuertemente participativas: El estudiante deseando conocer por él mismo, anticipando respuestas, aplicando esquemas de solución, verificando procesos, confrontando resultados, buscando alternativas, planteando otros interrogantes. El docente, integrando significativamente el objeto de estudio según los significados posibles*

para los alumnos, respetando estados lingüísticos, culturales y cognitivos de sus estudiantes, acompañando oportunamente las respuestas y las inquietudes y sobre todo, planteando nuevas preguntas que le permitan al estudiante descubrir contradicciones en sus respuestas o "abrirse" a otros interrogantes[3]"

Esta alternativa metodológica podemos pensarla a través del diseño de situaciones problema, tal como lo proponen los lineamientos curriculares actuales, de modo que vincule al estudiante en un proceso de matematización y que le facilite el redescubrimiento de los conocimientos matemáticos de manera cada vez más significativa.

ELEMENTOS QUE ORIENTAN UNA SITUACIÓN PROBLEMA

Una situación problema la podemos interpretar como un espacio para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar con el objeto de conocimiento, dinamizan la actividad cognitiva, generando procesos de reflexión conducentes a la adquisición de nuevos conocimientos. Es decir, en el caso de las matemáticas, una situación problema la podemos entender, como un espacio para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción sistemática de conceptos matemáticos.

Respecto a lo que es una situación problema, Luis Moreno escribe:

"La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender.
La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:
Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores...[4]"

[3] MESA, Orlando y otros. *La Intervención pedagógica en la construcción de conceptos matemáticos. Tercer coloquio regional de matemáticas.* Universidad de Antioquia. Medellín : septiembre. 1993.

[4] MORENO, Luis y WALDEGG, Guillermina. *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. Documento.* Septiembre de 2000.

Para diseñar situaciones problema desde esta perspectiva se necesita: dominar el saber específico que se propone enseñar, recontextualizarlo de acuerdo con los saberes previos de los educandos y tener en cuenta las condiciones cognitivas de los mismos; para luego decidir las actividades que hacen posible la interacción entre el estudiante los conceptos y el profesor. Es decir se trata de tomar la disciplina y reorganizarla de acuerdo con las condiciones del contexto, esto es, en términos de Guy Brosseau, hacer una transposición didáctica.

> *"El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.*
>
> *Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje[5]"*

En términos de Chamorro, las situaciones planteadas deben tender a: "Familiarizar al alumno con procesos de uso común en las matemáticas, tales como la formulación y validación de hipótesis"[6]. Además, debe propiciar espacios que le permitan particularizar, generalizar, conjeturar y verificar; características que son propias del razonamiento matemático. Al respecto afirma John Mason: "El pensamiento matemático se apoya en una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión con abundante tiempo y espacio, creando desafío, sorpresa y contradicción"[7].

Las situaciones problema pueden asumirse como un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hacia la significación matemática. Para ello es importante establecer relaciones entre los conceptos, a modo de redes conceptuales. Entendiendo por red conceptual como una especie de malla donde los

[5] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares, Matemáticas, Santafé de Bogotá :1998, pag. 41*

[6] CHAMORRO, *Carmen. El Aprendizaje Significativo en el área de las Matemáticas. España : 1992, p.11.*

[7] MASON, *John y otros. Pensar matemáticamente. Trad.,* MARTÍNEZ, *Mariano. España : Labor, 1989. p. 167*

nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar. La estructura y desarrollo de la misma dinamiza el currículo de la matemática, en el sentido que elimina el carácter absoluto y acabado de las temáticas. Por el contrario, éstas son recreadas desde la variedad de significados entre ellas.

La red conceptual es la encargada de que el proceso de intervención genere, cada vez más, relaciones entre los conceptos, y que los procesos de matematización entre los mismos no se agoten. Es decir, la red puede extenderse desde los distintos nudos (conceptos) a otros núcleos temáticos, posibilitando la motivación hacia nuevas representaciones de los objetos involucrados. Esto es posible a partir de una adecuada propuesta y sistematización de preguntas y actividades que orientan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

"La red de relaciones entre conceptos y estructuras matemáticas son inagotables, permiten generar continuamente nuevos procedimientos y algoritmos; no es posible pues dar por terminado el dominio de ningún concepto en un breve período de tiempo, ni pretender que se logre automáticamente una conexión significativa entre un conocimiento nuevo y aquellos conocimientos previamente establecidos"[8]. Cada actividad o pregunta puede abrir nuevas relaciones, bien sea entre los mismos conceptos u otros, o dando lugar a nuevas representaciones.

Las actividades y preguntas deben orientar la movilización de los preconceptos que poseen los estudiantes y los conceptos básicos que giran en torno a la temática; es decir, no son más que otra manera de dinamizar la enseñanza, vinculando la actividad cognitiva del estudiante, fundamental para su propio aprendizaje. Esto es posible si se promueve en el desarrollo de la situación, por ejemplo, la búsqueda de diferentes estrategias, respuestas, relaciones, maneras de explicación y representación, y formulación de conjeturas. En este sentido, Santos Trigo expresa: "El promover un ambiente instruccional que motive a los estudiantes a participar activamente en actividades donde el resolver un problema o en-

[8] *MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Op. cit., p. 6*

tender una idea matemática involucre la utilización y exploración de conjeturas, el uso de diversas representaciones, y la comunicación de resultados tanto en forma oral y escrita es un paso inicial para alcanzar tal discusión matemática"[9].

Las preguntas planteadas durante la intervención deben guardar una estrecha relación con los mediadores encargados de movilizar las ideas matemáticas y deben ser de todo tipo: cerradas y abiertas con el fin de promover la reflexión, la creatividad, y la investigación.

En adelante se plantean algunos ejemplos de situaciones problemas. Lo más importante de cada situación es que una vez el maestro haya entrado en contacto con la situación pueda reflexionar en torno a:

1. La organización temática, los conceptos y relaciones asociadas.
2. Otras actividades y preguntas que posibilitan ampliar la red conceptual.

Situación Problema # 1

Se propone la siguiente situación problemática:

- Un administrador de una hacienda lechera recibe semanalmente tres rollos de alambre de 36, 18 y 24 metros respectivamente. Este debe empacar cada uno de ellos en carreteles de tal manera que gaste el menor número de éstos y que en todos quede la misma cantidad.

¿Cómo podamos ayudar al administrador a resolver dicha situación?

1. Enuncie todas las cantidades posibles para empacar el rollo de 36m.

¿Qué relación existe entre los números que dan cuenta de estas cantidades y el 36?

[9] SANTOS, Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. 2ª edición. Ed. Iberoamericana, S. A. México, 1997.

2. Enuncie todas las cantidades posibles para empacar el rollo de 18m.

¿Qué relación existe entre los números que dan cuenta de estas cantidades y el 18?

3. Enuncie todas las cantidades posibles para empacar el rollo de 24m.

¿Qué relación existe entre los números que dan cuenta de estas cantidades y el 24?

4. ¿Si se desea que en todos los carreteles quede la misma cantidad, cuáles serían las cantidades posibles para cada carretel?

¿Los números que dan cuenta de estas cantidades que relación tienen con los números 36, 18 y 24?

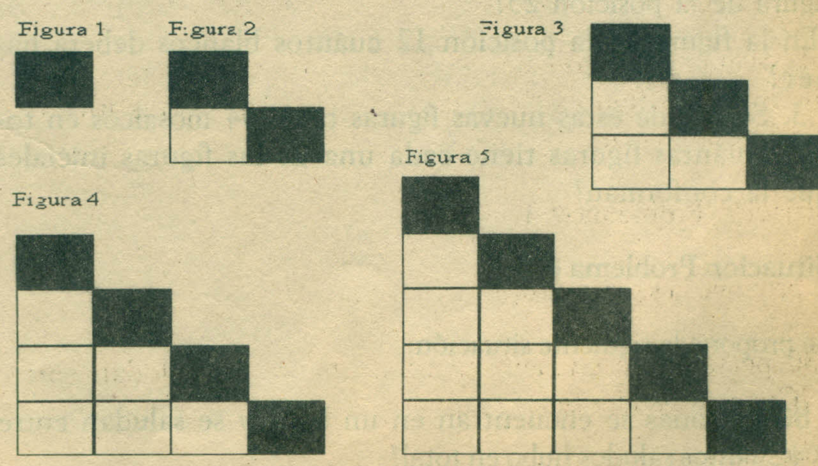
5. ¿Si en realidad queremos ahorrar carreteles, de las cantidades anteriores cuál es la que debemos seleccionar, y por qué? ¿Cuántos carreteles son necesarios?

¿El número que da cuenta de la mayor cantidad que debemos empacar en cada carretel que relación tiene con los números 36, 18 y 24? ¿Cómo lo podríamos llamar?

6. Si el administrador hubiese recibido dos rollos de 8m y 15m, para que los empacara bajo las mismas condiciones, ¿cómo debería empacarlos? ¿Cuántos carreteles necesitarían?

7. ¿Cuál sería la solución para el caso de tres rollos de 16m, 12m y 4m respectivamente?

Situación Problema # 2



1. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura octava?
2. ¿De qué otra manera podemos expresar el total de mosaicos de cada figura?
3. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura 20?
4. Cuál será una ley de formación para el total de mosaicos de la figura de cualquier posición?
5. Cuántos mosaicos sombreados deberán haber en la figura 100?
6. ¿Cuántos mosaicos blancos tendrá la figura 20?
7. ¿ Si unimos cada dos figuras consecutivas de modo que sólo se intercepten en su frontera, qué tipo de figuras podemos obtener?. Haz una representación de algunas de ellas.

7.1. ¿Estas nuevas figuras cuántos mosaicos tienen respectivamente? ¿A qué clase de números corresponden?
Deduzca la ley de formación para éstos a partir de las cantidades de mosaicos de las figuras iniciales.

7.2. ¿En cada una de estas nuevas figuras cuántos mosaicos sombreados hay? ¿Cuántos habrán en la décima? ¿y en la figura de la posición 25?
¿En la figura de la posición 12 cuántos blancos deberá haber?

7.3. Si una de estas nuevas figuras tiene 64 mosaicos en total, ¿cuántas figuras tiene cada una de las figuras iniciales que la conforman?

7.2. ¿En cada una de estas nuevas figuras cuántos mosaicos sombreados hay? ¿Cuántos habrán en la décima? ¿y en la figura de la posición 25?
¿En la figura de la posición 12 cuántos blancos deberá haber?

7.3. Si una de estas nuevas figuras tiene 64 mosaicos en total, ¿cuántas figuras tiene cada una de las figuras iniciales que la conforman?

Situación Problema # 3

Se propone la siguiente situación:

- 80 personas se encuentran en un baile y se saludan entre sí. ¿Cuántos saludos hubo en total?

¿Cómo se podría averiguar cuántos saludos hubo en total? Proponga alguna estrategia de solución.

Algunas preguntas orientadoras:
1. ¿Si el encuentro fuera de dos personas, cuántos saludos surgirían?
Represente geométricamente la situación.
2. ¿Si el encuentro fuera de 3 personas, cuántos saludos se darían? ¿Cómo lo representaría gráficamente?
3. Realice lo mismo para un encuentro de 4 y 5 personas.
4. Organice los datos en una tabla. Obsérvelos detenidamente. ¿Existe alguna relación entre éstos?
¿Habrá una manera general que nos permita encontrar el total de saludos para un encuentro de cualquier número de personas?
5. ¿Cuál es el total de saludos para un encuentro de 8 personas?
¿Cuál sería su representación geométrica?
6. ¿Cuál es el total de saludos para un encuentro de 12 personas? ¿y para 80?

BIBLIOGRAFÍA

CHAMORRO, Carmen. El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas. España : 1992.

MASON, John y otros. Pensar matemáticamente. Trad.

MARTÍNEZ, Mariano. España : Labor, 1989.

MESA B, Orlando. Criterios y estrategias para la enseñanza de las matemáticas. Medellín : Centro de Pedagogía Participativa, 1994.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares, Matemáticas. Santafé de Bogotá : 1998.

MORENO, Luis y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. México : Documento, septiembre de 2000.

MÚNERA, John Jairo. Estrategias para la Enseñanza de los Números Fraccionarios. En : Segundo encuentro regional de profesores de matemáticas. Septiembre 15 al 18 de 1998. Medellín : Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.

MÚNERA, John Jairo y BUILES, Gabriela. Las Situaciones Problema para la Educación Matemática. En : Tercer encuentro regional de profesores de matemáticas. Mayo 8 al 12 de 2000. Medellín : Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.

SANTOS, L. Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México : Grupo Editorial Iberò América, 1997.

TORRES FERNÁNDEZ, Paul. La enseñanza problémica de la matemática del nivel medio general. Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. Facultad de Ciencias. Departamento de matemática. . La Habana,Cuba, 1993.

RAZONAMIENTO MATEMATICO % MATEMATICAS

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Lourdes Valverde Ramírez *

1. Fundamentos sicológicos y lógicos sobre el razonamiento.

El proceso del conocimiento humano transita por diferentes fases. La humanidad se ha dividido entre los que plantean que el mundo es cognoscible y los que no. Yo me sumo a los que piensan que esto es posible.

Entonces surge otra cuestión, ¿y cómo el hombre llega a conocerlo? Los filósofos distinguen dos aspectos o niveles que conforman la cognición: lo sensorial y lo racional.

De aquí surgieron dos corrientes: el sensualismo y el racionalismo. Cada una de ellas por separado absolutizan el papel de lo sensorial y lo racional en la cognición. La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico propone una interrelación dialéctica de ambos aspectos para esclarecer el proceso de formación del conocimiento en los seres humanos. Se propone el método científico como estrategia metodológica general para el trabajo en el proceso de conocimiento del mundo y su transformación.

El hombre en el transcurso de su actividad cognoscitiva se relacio-

* *Licenciada en Matemática. Doctora en Ciencias Pedagógicas de la Habana - Cuba. Profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.*

na con la realidad objetiva. En un primer plano del conocimiento éste se produce por medio de las sensaciones y percepciones.

"En el conocimiento sensorial, el sujeto que conoce interactúa con el objeto o fenómeno concreto del conocimiento, y como resultado de esta interacción se produce un reflejo elemental, superficial, limitado de éste, es decir, un reflejo de sus cualidades externas, las que son dadas de manera inmediata a nuestros órganos receptores" (Glez, V/ 1995 / p.143).

"En el conocimiento racional, el sujeto a partir de la información sensorial que ya tiene del objeto o fenómeno, continúa profundizando en su conocimiento y llega a formar un reflejo que incluye no sólo ya sus rasgos y cualidades externas, sino también sus nexos y relaciones" (Glez, V/ 1995 / p.143).

Entre lo sensorial y lo racional existe una estrecha relación, lo uno no existe sin lo otro. El conocimiento no es sólo lo que aportan los órganos de los sentidos, está en la base de lo racional, pero "no existe la contemplación sensorial pura, siempre está impregnada de pensamiento, de lo racional" (Glez, V/ 1995 / p.143).

Esta sicología reconoce que "los procesos psíquicos sistémicos que integran la actividad cognoscitiva de la personalidad son: la sensopercepción, la memoria, la imaginación y el pensamiento" (Glez, V/ 1995 / p.143).

Los tipos de conocimiento que propone esta sicología son:

TIPOS	MANIFESTACIONES PSÍQUICAS
CONOCIMENTO SENSORIAL	SENSOPERCEPCIÓN
CONOCIMENTO REPRESENTATIVO	MEMORIA E IMAGINACIÓN
CONOCIMENTO RACIONAL	PENSAMIENTO

El hombre conoce el mundo material a través de los órganos de los sentidos. La materia actúa sobre ellos y se conforma así un reflejo de esa realidad que en sus primeras manifestaciones se le llama **sensopercepción.**

En el camino del "conocimiento humano" llegamos a la forma superior y más compleja: el conocimiento racional.

El conocimiento racional es por su parte la expresión superior y más compleja del conocimiento humano. A través de él se pueden formular conceptos, establecer categorías, descubrir principios y leyes que rigen el mundo en que vivimos y su desarrollo. "El contenido de este conocimiento está formado por significados, conceptos e ideas que existen, subjetiva y objetivamente plasmados en palabras y que tienen un carácter eminentemente abstracto y generalizado" (Glez, V/ 1995 / p.172). Las expresiones más desarrolladas de los procesos de la memoria y la imaginación también pertenecen a este tipo de conocimiento.

Este conocimiento permite al hombre formular conceptos, establecer categorías, descubrir principios y leyes que rigen el mundo en que vivimos y su desarrollo. Todo ello se logra por supuesto a través del pensamiento.

"El pensamiento es el proceso cognoscitivo que está dirigido a la búsqueda de lo esencialmente nuevo, y que constituye el reflejo mediato y generalizado de la realidad. El pensamiento, sobre la base de la información ya obtenida por los procesos cognoscitivos que le preceden, es el que permite al hombre conocer los aspectos esenciales de esa realidad, descubrir los vínculos reales que en ella existen, así como las leyes que la rigen" (Glez, V/ 1995 / p.173).

El pensamiento *se forma sobre la base de la información obtenida a través de los procesos cognoscitivos anteriores.* El pensamiento *se expresa a través del lenguaje.*

PROCESOS COGNOSCITIVOS	RESULTADOS
SENSOPERCEPCION	Imágenes (carácter concreto)
REPRESENTACIÓN	Imágenes que:
• MEMORIA →	Reproducen la realidad
• IMAGINACIÓN →	Modifican la realidad
RACIONAL	
PENSAMIENTO →	**Formas** * Conceptos * Juicios * Razonamientos * Hipótesis * Teorías científicas

El pensamiento ha sido objeto de estudio de dos grandes ciencias: la Sicología y la lógica. **La Sicología** estudia el proceso del "pensar", es decir la estructura de la actividad pensante como forma superior de la actividad cognoscitiva; el estudio de la formación y desarrollo de las operaciones racionales, así como su caracterización según los diferentes niveles de complejidad. Las operaciones básicas del pensamiento son el análisis y la síntesis e inmediatamente después, en otro nivel de complejidad están la comparación, la abstracción y la generalización (Anexo 1).

La Lógica por su parte estudia los productos (resultados) de la actividad pensante que se conocen como *las formas lógicas del pensamiento*. Ellas son: los conceptos, los juicios, los razonamientos, las hipótesis y las teorías científicas.

"Los **juicios** son formas de pensamiento en que se afirma o niega algo respecto a la existencia de objetos, las relaciones entre un objeto y sus propiedades o las relaciones entre objetos" (Guétmanova, A./1986).

Por su parte los razonamientos desde el punto de vista lógico se definen como "la forma de pensamiento mediante la cual, y a base de ciertas reglas de inferencia, de uno o varios juicios se obtiene un nuevo juicio, que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad" (Guétmanova, A./1986).

En el desarrollo de una teoría juegan un importante papel la demostración de los juicios y la definición de los conceptos por revelar la interrelación entre los conocimientos expresados respectivamente en los juicios y en los conceptos. Por ello se dice que por medio de estas operaciones lógicas se realiza la sistematización del conocimiento, es decir, se expresa formando un sistema que es precisamente la teoría.

Por todo lo anterior, el razonamiento es el eslabón fundamental que permite pasar a nuevas formas de organización del conocimiento. De ahí su importancia como vía para la sistematización de este último.

Todo razonamiento tiene una estructura que consiste en:
• las premisas
• la conclusión
• el nexo lógico entre ellos.

La ilación lógica de las premisas a la conclusión se llama "inferencia".

Los razonamientos pueden ser de tres tipos:
• Razonamientos deductivos
• Razonamientos inductivos y
• Razonamientos por analogía.

El **razonamiento deductivo** es aquel en que "la conclusión se infiere necesariamente de las premisas, las cuales expresan conocimientos de grado mayor de universalidad y que la conclusión de por sí presenta un conocimiento de grado inferior de universalidad" (Guétmanova, A./1986).

Este tipo de razonamiento es muy utilizado en el trabajo del matemático. Para construir una teoría científica dentro de la

Matemática se parte de un sistema de conceptos básicos, no definidos y de un número de axiomas como proposiciones aceptadas como verdaderas y a partir de ahí se definen nuevos conceptos y se deducen nuevas proposiciones verdaderas que conforman dicha teoría.

Desde el punto de vista didáctico los procesos de "demostración" y "deducción" son diferentes.[1]

El **razonamiento inductivo** es aquel en el que " de un conocimiento de menor grado de universalidad se pasa a uno de mayor grado de universalidad (o sea, de algunos casos particulares se pasa a un juicio universal) (Guétmanova,A./ 1986).

Entre lo universal y lo particular se reconoce una unidad dialéctica. Lo uno no existe sin lo otro. Además "lo universal, esencial, repetido y regular en los objetos se conoce estudiando lo particular, y la inducción es un medio de conocimiento de lo universal" (Guétmanova, A./1986).

Los razonamientos inductivos conducen a conclusiones que no necesariamente son verdaderas en el sentido matemático sino que son **probablemente**[2] verdaderas.

La inducción puede ser:
• Completa
• Incompleta
• Matemática

La inducción es completa cuando la conclusión universal a que se arriba partió del estudio de todos los objetos de esa clase. Este tipo está estrechamente relacionado con la demostración por casos.

La inducción es incompleta "cuando no podemos observar todos los casos del fenómeno examinado, más hacemos conclusión para todos ellos" (Guétmanova, A./1986).

[1] *En la demostración de antemano se conoce la conclusión, mientras que en la deducción no necesariamente. En la deducción el proceso de obtención del conocimiento y del aseguramiento del mismo son simultáneos.*

[2] *Lo probable se refiere en dos sentidos probabilidad estadística y probabilidad subjetiva como una posibilidad que tiene el hombre de predecir la ocurrencia, basado en sus conocimientos y en sus cualidades sicológicas.*

Se realiza **inducción incompleta** cuando en una serie de objetos se reitera un mismo indicio **(inducción popular)**, cuando se estudian los objetos más típicos, escogidos metódicamente, diversos por el tiempo y el modo de obtención y existencia, entre otras condiciones (**inducción por análisis y selección**) y también cuando "a base del conocimiento relativo a los indicios necesarios o el nexo necesario entre una parte de los objetos de una clase se hace la conclusión universal concerniente a todos los objetos de esta clase" (**inducción científica**)[3].

La inducción matemática se basa en el principio de inducción completa y constituye un método de demostración típico de proposiciones universales en el conjunto de los números naturales.

El **razonamiento por analogía** es aquel mediante el cual a base de la homología de indicios (propiedad o relación) sustanciales a un objeto se atribuye al otro dicho indicio.

La analogía sugiere la utilización de semejanzas de contenido o forma para lograr inferencias nuevas sobre la base de las propiedades o relaciones conocidas.

La analogía puede ayudar en tres direcciones:
1. Para descubrir una proposición nueva y formularla
2. Para descubrir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva;
3. Para sugerir la vía para la resolución de un problema, un ejercicio.

Para seguir profundizando en el cómo contribuir al desarrollo de la capacidad para razonar, queremos plantear los resultados más importantes de Robert J. Sternberg y Louise Spear – Swerling sicólogos norteamericanos en su obra "Enseñar a pensar" publicada en español por la Editorial Santillana en 1999.

Los autores proponen la existencia de tres modos de razonamientos:

[3] *Estos tipos de inducción incompleta los propone Guétmanova, A. en la obra citada en la bibliografía.*

- Razonamiento crítico – analítico
- Razonamiento creativo – sintético
- Razonamiento práctico – contextual.

Stenberg considera que "ser inteligente significa razonar bien en más de uno de estos tres modos distintos: el analítico, el creativo y el práctico" (Stenberg y Spear-Swerling/1999).

Sin pretender hacer definiciones, damos ideas de los modos de razonamiento mencionados.

El razonamiento crítico – analítico se apoya en la memoria y el análisis de las ideas de otras personas. Se limita a situaciones artificiales.

El razonamiento creativo consiste en la posibilidad de proponer ideas propias, como las que son necesarias en el mundo de la vida, en la profesión.

El razonamiento práctico es aquel que nos permite adaptarnos a cualquier ambiente, calcular lo que necesitamos hacer y llevarlo a cabo, es el "sentido común".

Los autores reconocen que en toda persona existe alguna combinación de inteligencia analítica, creativa y práctica.

Cualquiera de estos modos de razonamiento requieren para su formación del desarrollo de siete capacidades cognoscitivas:

- La identificación del problema
- El proceso de selección
- La representación de la información
- La formulación de la estrategia
- La asignación de recursos
- La observación de la solución y
- La evaluación de las soluciones[4].

[4] *La propuesta es de Stenberg y Spear – Swerling en la obra citada.*

La identificación del problema tiene que ver con la capacidad de reconocer que se tiene un problema y definirlo.

El proceso de selección se refiere a la capacidad de elegir los procesos que proporcionan una respuesta adecuada. En la enseñanza de la matemática esto tiene que ver con los medios matemáticos necesarios expresados en términos de conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos. Estas capacidades están muy relacionadas con la representación de la información.

La representación de la información en forma útil tiene que ver con su manifestación interna en el sujeto (estructuras mentales), como su representación externa, ya sea en forma oral u escrita.

La formulación de la estrategia enlaza lo que el sujeto debe haber obtenido en las dos anteriores: seleccionados los procesos y representada la información el sujeto debe ser capaz de formular una estrategia en procesos secuenciales según el orden en el que actúan en la representación. Algunos autores como Polya le llaman a esto encontrar el Plan de solución.

La asignación de recursos está referida a la cantidad de tiempo que vamos a dedicar a resolver el problema y optimizar el resultado. Distribuir el tiempo es también una necesidad del sujeto cuando se enfrenta a tareas que exigen un razonamiento matemático. (Piense cuantas veces los estudiantes se quejan de no haberle alcanzado el tiempo para resolver un examen).

La observación de la solución y la evaluación de las soluciones están estrechamente relacionadas y se refieren a la capacidad de analizar lo que hacemos, lo que hemos hecho, su efectiva pertinencia para el caso que nos ocupa; su posibilidad de uso en situaciones análogas. En la enseñanza de la matemática esto se refiere a realizar un análisis retrospectivo y prospectivo para obtener las ganancias metodológicas del proceder y autocontrolar el proceso y los resultados.

Los autores proponen el uso de tres estrategias didácticas para contribuir a desarrollar el razonamiento matemático que en términos generales coinciden con la propuesta que se hace en este trabajo más adelante.

Para concluir con estas reflexiones teóricas acerca del razonamiento debemos señalar cómo concebimos el **razonamiento matemático.**

Todo lo antes mencionado es aplicable a cualquier área del saber específico. En particular cuando de la actividad matemática escolar se trata entonces el "razonamiento" adquiere matices particulares. Estamos acuñando en este término dos acepciones diferentes y estrechamente relacionadas.

Una referida

- a la construcción y reconstrucción de las teorías científicas en Matemática, donde se combinan el trabajo del matemático y el que se desarrolla en un salón de clases de matemática entre estudiantes y profesores, y la otra referida a
- la contribución que puede hacer el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática a la formación de la capacidad para razonar como cualidad de la personalidad de los sujetos en formación.

Sin renunciar a la importancia que le reconozco al trabajo en la demostración y la deducción de proposiciones matemáticas, este artículo va a tratar de contribuir a reflexionar sobre la segunda acepción del término "razonamiento matemático".

2. Consideraciones didáctico – metodológicas sobre el razonamiento matemático.

Todos coincidimos en que la educación tiene que contribuir a desarrollar las capacidades mentales generales de los estudiantes. Una de estas capacidades puede ser la capacidad para razonar, y en particular nos referiremos al razonar cuando el contenido utilizado para ello requiere de los conocimientos y habilidades matemáticas.

Sin pretender elaborar una definición al respecto, en estas condiciones, podemos aceptar que razonar es la capacidad que le permite el sujeto "ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión" (MEN/1998/p77), según se plantea en los lineamientos curriculares de matemática.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos son lógicas y potencian la capacidad de pensar [5].

Ahora bien ¿Qué deberíamos hacer para contribuir a la formación del razonamiento matemático?

En la enseñanza de la matemática el trabajo con las **situaciones problemas, los métodos productivos y la utilización de los recursos heurísticos** son a mi modo de ver, elementos que deben ser conjugados para lograr un proceso de enseñanza –aprendizaje facilitador de la formación en el razonamiento matemático.

Las situaciones problemas se entienden aquí como las tareas docentes a que se enfrenta al estudiante, las cuales provocan necesa-

[5] *Esto está también propuesto en los Lineamientos Curriculares.*

riamente el reconocimiento de algo desconocido, incomprensible, que lo alarma, lo asombra, lo estimula a buscar soluciones. Es decir que provoca la contradicción entre lo que sabemos y lo que debemos saber para poder encontrar las posibles soluciones.

Este tipo de tareas por supuesto que permiten la utilización de métodos productivos de enseñanza. Clasificaciones de métodos de enseñanza[6] hay muchas, en particular nos estamos refiriendo a aquella que los clasifica según el aspecto interno y el aspecto externo.

"El aspecto externo del método se capta de inmediato, pues es el modo visible de las relaciones entre maestro, alumno y materia de instrucción; es decir, la forma de enseñar" (Ballester, S. Y otros, 1992). Desde esta óptica se distinguen la exposición de l profesor, el trabajo independiente y la elaboración conjunta.

"El aspecto interno del método de enseñaza es la expresión de procesos más profundos, que están determinados por la lógica interna del proceso de enseñanza" (Ballester, S. Y otros, 1992).El aspecto interno se refiere a las particularidades de la actividad cognoscitiva que debe desarrollar el estudiante de nivel reproductivo o productivo y al carácter de la actividad desarrollada por el profesor (facilitador), y el alumno (activo).

La clasificación según el aspecto interno del método, ofrecida por Lerner, I. Y Stakin, M.N. consta de cinco métodos:

- Método Receptivo de información
- Método Reproductivo
- Exposición Problémica
- Método Heurístico — MÉTODOS PRÓBLEMICOS
- Método Investigativo.[7]

[6] *Se asume aquí que "método de enseñanza son instrucciones para acciones y modos de conducta del profesor que sirven para provocar actividades necesarias delos alumnos y por tanto, para la conducción efectiva y planificada, dirigida a un objetivo, del proceso de instrucción y educación en la enseñanza". Zillmer, W. 1989*

[7] *Citado por Ballester y otros.*

Estos tres últimos son los llamados métodos problémicos. La actividad mental que tienen que realizar los estudiantes cuando se utilizan estos métodos se identifica con la creación, la investigación, la construcción y reconstrucción del conocimiento.

Los métodos problémicos son tan antiguos como la humanidad, Sócrates por ejemplo utilizaba la conversación heurística con sus discípulos.

La exposición problémica se entiende aquí como la vía que utiliza el maestro cuando "partiendo de una situación conflictiva junto con la trasmisión de los conocimientos muestra la lógica del razonamiento para solucionarla. La palabra del maestro juega un papel fundamental, el cual descubre ante el alumno la forma de razonamiento, lo cual permite ponerlos en contacto con los métodos de la ciencia" (Labarrere,G y Valdivia, G./ 1988). Este método se visualiza como un diálogo mental entre profesor y alumno.

En el método heurístico se parte también de una situación conflictiva y "se caracteriza por que el profesor organiza la participación de los alumnos en la realización de determinadas tareas del proceso de investigación; el estudiante sólo se apropia de etapas, de elementos independientes del proceso del conocimiento científico" (Labarrere,G y Valdivia, G./ 1988). Este es el caso por ejemplo de la obtención de una proposición matemática a partir del análisis de casos particulares, digamos el teorema relativo a la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

"La esencia del método investigativo es que en todos los casos es una actividad de búsqueda independiente de los estudiantes dirigida a resolver determinado problema" (Labarrere,G y Valdivia, G./ 1988).

En el proceso docente educativo la utilización de los métodos señalados es combinada y estará en dependencia de muchas variables intervinientes en este proceso como son los objetivos a alcanzar, el contenido de que se trate, las características sicológicas y sociológicas de los alumnos y del grupo, el tiempo disponible, entre otras. Sin embargo se evidencian las ventajas de su utilización.

El otro elemento recomendado es la utilización de los recursos heurísticos en el sentido de Polya, Miguel de Guzmán, Schoenfeld, entre otros.

En esta propuesta se sugiere la combinación de **tres elementos fundamentales** para contribuir al desarrollo del razonamiento matemático: la utilización de las situaciones problemas, los métodos productivos y los recursos heurísticos. Pensamos que su combinación puede permitir hacer el conocimiento más comprensible, enseñar a pensar dialécticamente y ofrecer así a los alumnos un patrón para la búsqueda científica y hacer la exposición más emocionante y por tanto elevar el interés por el estudio.

A modo de conclusiones deseo proponer algunos ejercicios que bajo la dirección del Dr. Sergio Ballester se han elaborado para contribuir al desarrollo del razonamiento matemático y que pueden ilustrar las tareas docentes que se constituyen en situaciones problemas para los que aprenden.

Ejercicio 1:
Considera los números naturales del 0 al 9 y toma en cuenta tus conocimientos sobre las operaciones de adición y sustracción.

¿Qué igualdades se pueden formar tomando cada vez dos números naturales diferentes?

Ejerccicio 2:
Dada la función cuadrática G(x), que cumple G(0) = 4 y G(2) = G(-2) = 0.

¿Qué puedes afirmar respecto a la función G(x)?

Ejercicio 3:
Dado el triángulo ABC rectángulo y el ángulo ABC con una amplitud de 60° .

¿Qué conclusiones se pueden extraer sobre los elementos del triángulo ABC?

Ejercicio 4:
Agrega una ecuación a $5x + 3y = 15$ de modo que obtengas un sistema de ecuaciones lineales con dos variables que tenga:
a) una solución b) ninguna solución c) infinitas soluciones

Ejercicio 5:
En la circunferencia de centro E y diámetro DC, se ha trazado AB, tangente en el punto M, de modo tal que $AB \parallel DC$. DM y MC son bisectrices respectivas de los ángulos ADC y BCD.

¿Cuáles son todos los ángulos, que se forman en la figura, congruentes con el ángulo DCM?

¿Qué peculiaridades tienen los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD?

Ejercicio 6:
En un cuadrado de lado "a", se unen los puntos medios consecutivos con el vértice opuesto del cuadrado.
a) ¿Qué es todo cuanto puedes decir sobre los triángulos que se forman en la figura?
b) Identifica los segmentos que se forman en la figura, que son iguales entre sí.
Identifica los ángulos que se forman en la figura que son congruentes entre sí.

Ejercicio 7:
Dada la siguiente expresión $\frac{A \times B - C : D}{F}$ busca quintetos de números que sustituidos por A, B, C, D, y F, hagan tomar el valor 2 a la expresión anterior.

Ejercicio 8:
En una demostración se requiere emplear una fórmula de volumen y sólo apareció la expresión $V =$ ______ ¿Qué posibilidades tienes de completar la igualdad?

Ejercicio 9:
Se conoce que f es una función lineal para la cual se cumple:

$$f(x) = 2 \quad y \quad \frac{f(2) - f(4)}{f(3)} = 6$$

Busca la mayor cantidad de información posible sobre f.

Ejercicio 10:
Sean la fracciones algebraicas:

$$P = \frac{x^2 + x - 56}{x - 7}, \quad Q = \frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 2x} \quad y \quad R = \frac{3x^3 - 24x^2}{x^2 - 64}$$

Forme con P, Q y R , tomados en cada caso una sola vez, nuevas fracciones algebraicas. Explique .

También puede consultar la página Web del Departamento Enseñanzas de las Ciencias y las Artes de la Facultad de Educación.

ANEXOS

Anexo 1: Sobre las operaciones del pensamiento

La actividad pensante como toda otra responde a una estructura. Ella está formada por acciones y operaciones. Como operaciones del pensamiento se consideran el análisis, la síntesis, la comparación, la abstracción y la generalización.

El **análisis** es la división mental del todo en sus partes, o la separación mental de alguna de sus características, cualidades, propiedades, etc.

La **síntesis** es la unificación, la reunión mental de las partes en el todo o la combinación mental de sus cualidades, características, propiedades, etc.

En un nivel superior de complejidad se encuentran otras operaciones del pensamiento como son: la comparación, la abstracción y la generalización.

La **comparación** consiste en establecer mentalmente semejanzas y diferencias entre los objetos, o entre sus cualidades, características, etc.

La **abstracción** consiste en separar, aislar mentalmente un aspecto o cualidad del objeto observando los restantes.

La **generalización** es la unificación mental de aquellas cualidades, características, propiedades, etc. que son comunes a un grupo o clase de objetos o fenómenos de la realidad.

(Las definiciones fueron extraídas del texto "Psicología para educadores" de González, V. y otros).

BIBLIOGRAFÍA

Artimieva,T.I. El aspecto metodológico del problema de las capacidades.Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 1985.

Ballester S. "La sistematización de los conocimientos matemáticos".Ed. . PROMET. Cuba 1994.

Ballester S y otros. Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. Ed Pueblo y Educación. Cubà. 1992.

Bermúdez Sarguera, Rogelio y Marisela Rodríguez Rebustillo. Teoría y Metodología del Aprendizaje. ED. Pueblo y Educación. Cuba. 1996.

Brito, H y González, V. Psicología general para los ISP. Editorial Pueblo y Educación. 1987. Tomo I, II y III.

Brito, H. Hábitos, habilidades y capacidades, Rev. Varona 13. Cuba. 1984.

Colectivo de autores del ICCP. Pedagogía. Editorial Pueblo y Educación. 1984.

Guétmanova, Alexandra. Lógica. Ed. Progreso. Moscú. 1989.

Labarrere,G y Valdivia,G. Pedagogía. Ed.pueblo y Educación. Cuba. 1988.

MEN. Lineamientos Curriculares de Matemática. Bogotá. 1998.

Rubinstein, S. L. El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. Antologia de la psicología evolutiva y pedagógica. Moscú . 1981.

Zillmer, W. Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática. ED. Pueblo y Educación. Cuba. 1989.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO%
PENSAMIENTO MATEMATICO%
APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA.

IDEAS BÁSICAS PARA ACOMPAÑAR A LOS NIÑOS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Miguel Monsalve G. *
Carlos J. Echavarría H.**
Yolanda Beltrán de C. ***

* Matemático y Profesor Asociado, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

**Matemático de la Universidad de Antioquia. Profesor SEDUCA y de la Universidad de Antioquia.

*** Matemática y Profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia

LOS HEMISFERIOS CEREBRALES

Investigaciones de muchos tipos parecen mostrar que los hemisferios derecho e izquierdo del cerebro se ocupan de aspectos distintos del procesamiento de la información: El hemisferio cerebral izquierdo "piensa" en palabras, secuencialmente, de las partes hacia el todo, centro de comunicación del lenguaje en lo tocante a lectura y habla. El hemisferio cerebral derecho "piensa" en imágenes, se ocupa de aspectos espaciales y visuales, elabora del todo hacia las partes, capta las configuraciones globales y es el centro de la intuición y la creatividad. Memoriza hechos y parece ser el centro para la información que ha de ser percibida, comprendida y recordada.

PERSONALIDADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Otras investigaciones señalan que existen dos tendencias, estilos o personalidades en el aprendizaje de las matemáticas relacionadas con el hemisferio cerebral predominante en el individuo: Los "serialistas" o levohemisféricos (levo = izquierdo) son diestros en el lenguaje, en la cuantificación y en las operaciones cuantitativas. Ante un problema de enunciado buscan un algoritmo familiar para resolverlo; resuelven poco a poco los problemas. Los "holistas" o dextrohemisféricos enfocan los problemas globalmente, son diestros en la identificación de regularidades y pautas, son creativos y hábiles en la solución de problemas de la vida "real". Cuando se les propone un problema de enunciado juegan con él de modo metafórico no dirigido antes de comenzar a resolverlo.

ETAPAS EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Parece ser que los niños, abandonados a sus propios recursos, pasan por tres etapas diferentes en la resolución de un problema:

- Reflexión sobre el problema, "darle vueltas" hasta lograr una imagen global de éste; organización espacial y representación visual. Estas son actividades propias del hemisferio derecho.
- Aplicación de un método de solución elegido, actividad propia del hemisferio izquierdo.
- Reflexión sobre la solución para ver si es razonable. De nuevo actúa el hemisferio derecho.

CONSIDERACIONES PEDAGÓGICAS

Es evidente que si queremos formar hombres íntegros capaces de enfrentar problemas, debemos darles la posibilidad de desarrollar sus capacidades, potencialidades, e incluso, "su estilo". Es preciso desarrollar en el niño tanto sus capacidades analíticas como su pensamiento espacial. Hay que darle a la geometría el papel fundamental que representa en la formación integral de niños y jóvenes.

Se debe trabajar, siempre que sea posible, manipulando material concreto (para propiciar acciones que puedan ser interiorizadas y constituir los esquemas mentales), acompañando a los niños en la construcción de conceptos, y orientándolos en los procesos de simbolización y generalización. En síntesis:

SISTEMAS CONCRETOS ⇨ SISTEMAS CONCEPTUALES ⇨ SISTEMAS SIMBÓLICOS

Otra consideración fundamental

Las primeras experiencias de los niños y la mayor parte de sus experiencias cotidianas son con cuerpos tridimensionales. Creemos que el punto de partida natural para la exploración de las propiedades espaciales debe ser, pues, el estudio de los cuerpos tridimensionales, pasar luego a las figuras en dos dimensiones, a las líneas, y al punto. En síntesis:

Cuerpos 3 - D ⇨ Figuras 2 - D ⇨ Líneas 1 - D ⇨ Puntos 0 - D

El trabajo con objetos concretos en la escuela primaria y su manipulación por parte de los niños, así como el papel fundamental de acompañamiento que le corresponde al maestro, implican la necesidad de generar un ambiente de aprendizaje sano y que tenga en cuenta las particularidades de los niños. El aprendizaje de las matemáticas es uno de los "juegos" más trascendentales e importantes del ser humano. Y se deben aprender como lo que son: un juego, un juego constructivo y creativo que se puede explorar con alegría y espíritu de colaboración, con la orientación del maestro.

NIVELES DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL

(2)

Cuando una persona, y en particular un niño, inicia el estudio de cualquier tema geométrico, parece pasar, según las ideas de los esposos Van Hiele, por las siguientes fases o niveles de desarrollo y aprendizaje:

Nivel 1. Reconocimiento de formas. Mirada holística. Objetos sin partes ni relaciones. Figura geométrica ↔ nombre.

Nivel 2. Exploración de las propiedades de las formas. Las figuras tienen partes. Se establecen relaciones entre las partes mediante observaciones, mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. (trabajos prácticos).

Nivel 3. Relaciones lógicas entre las propiedades de las formas. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas merced a una mezcla de experimentación práctica y de razonamiento.

Nivel 4. Formación y estructuración axiomático - deductiva de los conocimientos geométricos. Desarrollo del razonamiento deductivo y de la construcción de teorías.

Es importante resaltar que estos niveles, aquí simplificados, deben ser recorridos, no solamente por los niños para tener un aprendizaje significativo, sino también por cualquier persona que se inicia en un tema geométrico, en especial por los maestros. Necesitamos maestros comprometidos con su propio aprendizaje y con el aprendizaje de los niños.

Consideramos que el objetivo de la educación básica primaria sería el desarrollo de los dos primeros niveles (reconocimiento de formas y exploración de sus propiedades) y la iniciación de la búsqueda de relaciones lógicas entre las propiedades (tercer nivel). Más generalmente, creemos que toda la educación básica, hasta noveno grado, tendría como un objetivo el desarrollo sistemático de los tres primeros niveles, dotando a los niños y jóvenes de una amplia experiencia geométrica.

CUERPOS GEOMÉTRICOS ESQUEMAS INICIALES DE TRABAJO

3

Las primeras experiencias de carácter espacial del niño tienen lugar con objetos sólidos tridimensionales e, inicialmente, las figuras bidimensionales aparecen como superficies de objetos sólidos como cubos, conos, cilindros, esferas, cajas rectangulares, prismas y pirámides, etc. Deberían tenerse a mano los cuerpos anteriores en diferentes tamaños para hacer hincapié en cada una de las formas particulares. Las actividades de clasificación por forma pueden contribuir a que el niño se fije en las semejanzas diferencias de los cuerpos sólidos y observe qué aspectos permanecen sin cambios o invariantes. Los sólidos se prestan igualmente a una adecuada introducción de la noción de punto, (una de sus esquinas o vértices), y sus aristas (bordes), a la explicación de las nociones de línea recta y curva.

Los talleres de cuerpos deben comenzar por la manipulación, reconocimiento de formas y exploración de propiedades de los cuerpos geométricos que deben haber sido construidos previamente por el profesor, explorando también muchos cuerpos familiares para el niño como cajas, frascos, pelotas, etc. Se presentan todos los cuerpos construidos por su nombre, se observan y se describen las relaciones entre los elementos y luego se hace la clasificación y posterior estudio de cada uno.

Actividades de clasificación de cuerpos

La caja de cuerpos será el material concreto que el niño usará constantemente durante las clases de geometría del espacio. Una vez conocidos los personajes de la caja de cuerpos se comienza a jugar con ellos: se tiran sobre el escritorio o en el plano del piso y se observa que unos ruedan y otros no.

Clasificación inicial

Cuerpos redondos: Son los cuerpos geométricos con alguna cara curva. Dicho de otra manera, son las figuras del espacio que están limitadas por superficies curvas o planas y curvas. Ejemplos: esferas, cilindros, conos.

Cuerpos poliédricos: Son los cuerpos geométricos con todas las caras plana o, lo que es lo mismo, toda figura del espacio limitada por caras que son polígonos. Ejemplos: pirámides, prismas, poliedros regulares.

El reconocimiento de caras, bordes y puntas; la clasificación, la impresión de las caras de los cuerpos geométricos son actividades que el profesor puede realizar con los niños de preescolar, primero y segundo de primaria, al igual que el desarmar las figuras.

La construcción de los cuerpos geométricos es una actividad que los niños del grado quinto pueden realizar muy bien; los niños de preescolar, primero y segundo pueden hacerlo con arcilla o plastilina.

Clasificación de Poliedros

En primer lugar es necesario que se haga una manipulación de los cuerpos para observar sus elementos y sus propiedades. Se debe intentar construir con los niños definiciones de polígono, polígono regular, ángulo diedro y ángulo poliedro, arista y vértice. Por ejemplo:
Polígono: Figura plana con todos sus bordes rectos. (Poli = varios, Gono = ángulo).
Polígono regular: Polígono con todos los lados iguales y todos los ángulos iguales.
Angulo diedro: Angulo formado por dos caras planas que se interceptan en una línea (la arista).
Angulo poliedro: Angulo formado por más de dos caras planas que se interceptan en un punto (el vértice).

Pirámides

Dada una colección concreta de pirámides - construidas por el

maestro o por los alumnos - realizar las siguientes actividades:
• Reconocer la forma de las diferentes caras y diseñar cooperativamente con los alumnos una definición de pirámide.
• ¿Qué relaciones se pueden establecer?

Prismas

Dada una colección concreta de prismas - construidos por el maestro o por los alumnos - realizar las siguientes actividades:
• Reconocer la forma de las diferentes caras y diseñar cooperativamente con los alumnos una definición de prisma.
• ¿Qué relaciones se pueden establecer?

Poliedros regulares

Un ejemplo de clasificación de acuerdo con las características geométricas de los cuerpos, podemos realizarlo con los poliedros regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Después de su manipulación y exploración y de acuerdo con la experiencia realizada, ¿Cuáles son las características comunes de los poliedros regulares? ¿Cómo son sus caras? ¿Cómo son sus ángulos poliedros? Construir cooperativamente con los alumnos una definición de poliedro regular.

Se han trabajado 5 poliedros regulares. ¿Existirán otros poliedros que también sean regulares? Confrontar la respuesta con la definición construida de poliedro regular.

De acuerdo con los conceptos construidos, constatar la verdad (o falsedad) de las siguientes afirmaciones:

En un poliedro regular,
• Todas las caras son polígonos regulares.
• Todas las caras son polígonos regulares iguales.
• Todos los ángulos poliedros son iguales.

Poliedros Arquimedianos

Existe un conjunto de poliedros muy especiales llamados poliedros Arquimedianos, que cumplen casi todas las características de los poliedros regulares. Tienen la propiedad de que todas sus caras son polígonos regulares y todos sus ángulos poliedros son iguales. Dos ejemplos de ellos son el cubo-octaedro y el rombi-cubo-octaedro cuya manipulación y construcción en cartulina debe estimularse y preguntar:

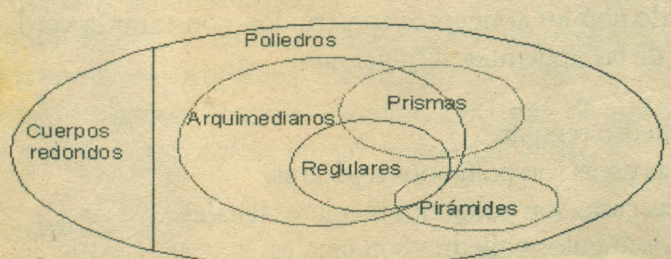
- ¿Todas las caras de cada poliedro son polígonos regulares?
- ¿En cada poliedro sus ángulos poliedros son iguales?
- ¿Cuál es entonces la diferencia entre los poliedros regulares y los arquimedianos?

Se sabe que existen trece (13) poliedros arquimedianos. Uno de ellos es el que sirve de base para el balón de fútbol. Investigar sobre su construcción y propiedades.

Clasificación global de cuerpos geométricos

Con base en todas las experiencias anteriores y teniendo a mano un conjunto amplio de cuerpos geométricos, proceder a una clasificación global utilizando cuerdas de colores para formar los diferentes conjuntos. Hay que tener cuidado con las intersecciones entre los conjuntos y el uso de cuantificadores en el lenguaje.

El siguiente diagrama muestra una posible clasificación inicial que recoge las propiedades estudiadas en las actividades anteriores.



Establecer una clara relación entre las propiedades de los cuerpos estudiados y las relaciones entre los conjuntos considerados y responder:

- ¿Cuál es el prisma que también es poliedro regular?
- ¿Cuál es la pirámide que también es poliedro regular?
- Los poliedros regulares, ¿son también arquimedianos?
- Los poliedros arquimedianos, ¿son también regulares?

Muchas preguntas pueden hacerse en este punto para aclarar la relación entre las propiedades de los cuerpos estudiados y los conjuntos considerados, así como para afianzar el uso de los cuantificadores, el significado de la pertenencia, la inclusión, la unión, la intersección entre diversos conjuntos.

Relación de Euler

Explorar, en la mayor cantidad posible de poliedros, la siguiente relación, llamada **Relación de Euler.**

$$C + V - A = 2$$

Donde:
C = Número de caras.
A = Número de aristas.
V = Número de vértices.

Contar el número de caras, de aristas, de vértices, de ángulos diedros y de ángulos poliedros. Organizar la información en un cuadro. ¿Se verifica la relación de Euler en los poliedros explorados?
¿Todos los poliedros verificarán la Relación de Euler? Explore y consulte.

ACOPLAMIENTOS

Con estas actividades se quiere poner en acción un conjunto de conceptos matemáticos fundamentales y sus relaciones a través de un sencillo juego: los rompecabezas geométricos.

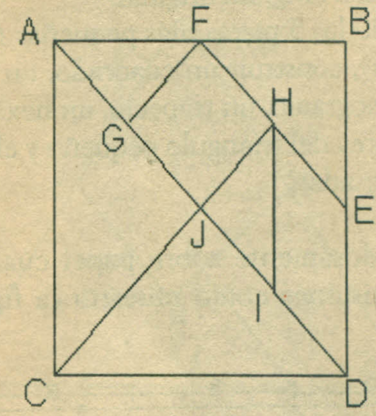
Las ideas de área, perímetro, proporcionalidad, semejanza, congruencia, transformaciones, números racionales e irracionales, se ponen en juego en esta actividad. Además, se posibilita el desarrollo de la creatividad en el diseño de estrategias para la construcción de las figuras. La precisión en el lenguaje va de la mano con la claridad de las ideas que se están trabajando. En esta actividad se recorren los llamados niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, (niveles de Van Hiele), desde el reconocimiento de formas hasta el establecimiento de relaciones entre las propiedades de las formas.

En los ejemplos propuestos la idea es comenzar por un trabajo de reconocimiento de cada una de las piezas que conforman el rompecabezas, asignarles nombre y describir las propiedades que caracterizan a cada una de ellas. Luego se puede proceder a armar libremente figuras con algunas o con todas las piezas y luego se pide armar las figuras geométricas que se consideran importantes. Sólo después de haber superado esta etapa se debe proceder al estudio de las relaciones de áreas y longitudes. Se debe estar siempre dispuesto a la aparición de nuevas formas y problemas.

Este trabajo con piezas bi y tridimensionales constituye una preparación esencial para alcanzar la comprensión de las nociones de área y volumen y la medición de unas y otros, amén de echar cimientos y motivar el estudio de las transformaciones geométricas.

Estas actividades no son meros pasatiempos, sino parte integral del aprendizaje de las matemáticas. Ayudan a desarrollar las nociones de ángulo recto, paralelismo y perpendicularidad, dan pie a situaciones problemáticas y desempeñan un importante papel para fomentar y ejercitar el pensamiento espacial.

1. TANGRAM CHINO



ABCD cuadrado

AF = FB = BE = DE

AG = GJ = JI = ID

1.1. Después de hacer un reconocimiento de las piezas, utilizándolas todas, armar un paralelogramo, un cuadrado, un trapecio, un rectángulo y un triángulo rectángulo.

1.2. ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado original y el área de cada una de las figuras que se formaron?

1.3. ¿Cuál es la relación del área del cuadrado inicial con el perímetro de cada una de las figuras que se formaron?

1.4. ¿Es posible que existan figuras con igual área y diferente perímetro? ¿Se podrán encontrar figuras con igual área e igual perímetro que tengan forma diferente?

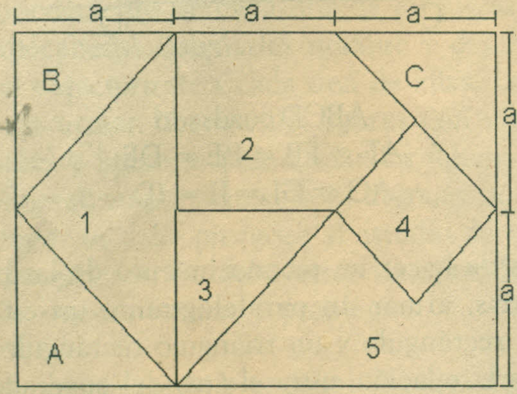
1.5. ¿Es posible construir con todas las piezas una figura tal que todas las medidas de los lados de la figura resultante sean números racionales? Adopte una unidad de medida. Explique su respuesta.

1.6. Construir todos los cuadrados, paralelogramos, trapecios y triángulos que tengan como área la mitad del área del tangram original. Determinar el área y el perímetro de cada una de las figuras construidas. ¿Qué se puede concluir?

1.7. ¿Cuáles figuras se pueden construir con los ¾ del área del tangram original?

1.8. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo que tenga como área 9/16 del área del tangram original?
1.9. Utilizando sólo las 5 piezas más pequeñas (separando los dos triángulos grandes), construir un cuadrado, un triángulo, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un hexágono. ¿Cuál es la relación entre el área del triángulo pequeño y el área de cada una de las figuras construidas?

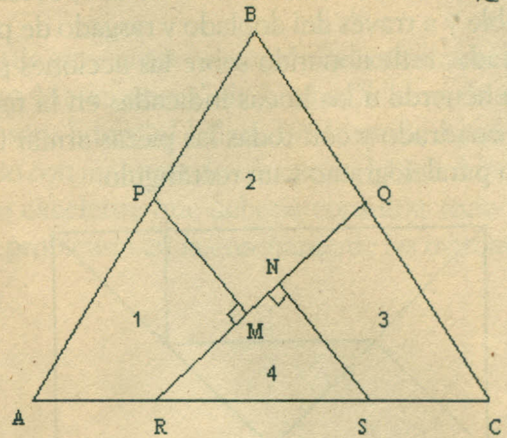
2. Dibujar cuidadosamente sobre papel cuadriculado el rectángulo y sus divisiones como muestra la figura, y luego recórtalas.



2.1. Con las piezas 1,2,3,4,5 formar un cuadrado. ¿Qué fracción del área del rectángulo es el área de este cuadrado?
2.2. Con las piezas 1,2,3,5 formar otro cuadrado. ¿Qué fracción del área del rectángulo original es el área de este cuadrado?
2.3. Con los triángulos A, B, C, ¿Qué figuras se pueden formar?. ¿Qué fracción del área del rectángulo inicial es el área de todas ellas?
2.4. Determinar el conjunto de todas las longitudes de los lados de todas las figuras presentes en este rompecabezas.

Describir las estrategias empleadas para resolver las situaciones planteadas.

3. LA CUADRATURA DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO.

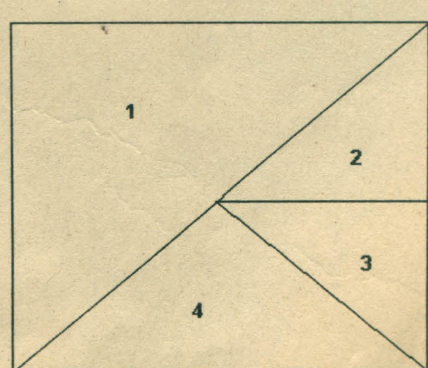


Construir en cartulina o madera un triángulo equilátero ABC y dividirlo en 4 partes tal como indica la figura, siendo:

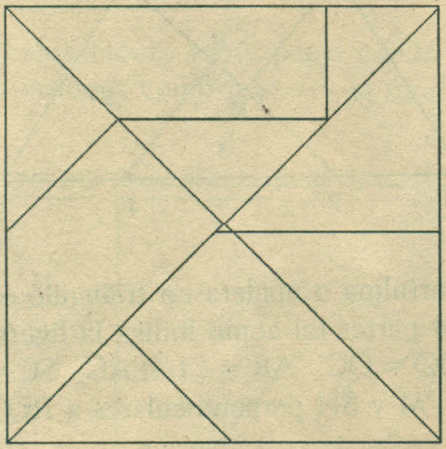
AP = PB, BQ = QC, AR = (1/4) AC, SC = (1/4) AC,
PM y SN perpendiculares a RQ

Una buena longitud para el lado AC puede ser 8 o 10 cm. Recortar las cuatro piezas y reordenarlas para formar con ellas un cuadrado. Reflexionar sobre las propiedades de las piezas que conducen a la solución.

4. Tratar de formar con los cuatro triángulos: un trapecio, un paralelogramo, un triángulo rectángulo. ¿Qué es lo que tienen en común las figuras que formadas?



5. Partiendo de una hoja blanca tamaño oficio, obtener el mayor cuadrado posible y a través del doblado y rasgado de papel, despedazar el cuadrado, reflexionando sobre las acciones para obtener cada pieza, de acuerdo a las líneas indicadas en la figura. Luego reconstruir el cuadrado y con todas las piezas armar un triángulo rectángulo, un paralelogramo y un rectángulo.



BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Lo esencial de estas notas ha surgido del estudio del libro "El Aprendizaje de las Matemáticas" de Linda Dickson, Margaret Brown y Oliver Gibson, Editorial Labor, 1991, unido a una experiencia de intercambio con maestros de educación básica durante varios años. Es un libro excelente que debería consultar todo maestro que se enfrente a problemas en la enseñanza de las matemáticas básicas.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

Extracción del libro Una brisa refrescante
para la iniciación a la matemática
Orlando Monsalve Posada

DIDACTICA % MATERIAL DIDACTICO % MATEMATICAS.

ACTIVIDADES SOBRE UNA HOJA DE PAPEL

Orlando Monsalve Posada*

Presentación

La hoja en blanco es una herramienta para múltiples usos; herramienta se entiende acá como cualquier utensilio interpuesto entre cualquier realidad, material o mental, para lograr un objetivo. Vistas así las cosas, cualesquiera objetos tangibles como cajas, reglas, compases, transportadores, escuadras, metros, lazos, recipientes de diferentes formas, dados, dominós, naipes, rompecabezas, la tabla de multiplicar, las calculadoras manuales, el computador son herramientas pedagógicas muy útiles a la hora de enseñar.

La hoja de papel puede utilizarse como una actividad alterna de descanso y diversión inicialmente –como el origami, por ejemplo–; como una vía para la iniciación en el Arte, la Biología, la Química, la Geometría, y así descubrir las múltiples e insospechadas aplicaciones que dicho arte le depara al docente.

En el Arte, El Origami tiene mucho de actividad artística.

En Biología, porque son innumerables los animales que se pueden confeccionar doblando papel.

En Química, doblando papel se pueden hacer los cinco sólidos platónicos, y los arquimedianos, varios de los cuales ilustran por ejemplo, algunas estructuras cristalinas.

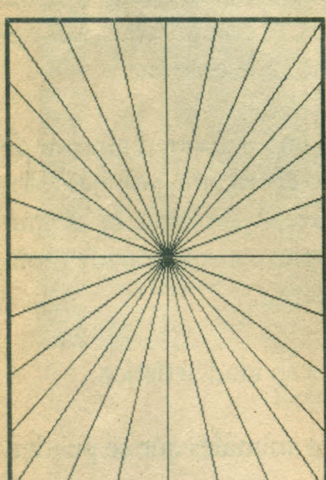
* Licenciado en Español - Inglés. Posgrado: Investigación Sicopedagógica. Profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

En Geometría, porque es posible enseñar a trisecar un ángulo de 90^0; y a partir de la trisección se pueden mostrar las funciones trigonométricas de los ángulos de 30^0 y 60^0 respectivamente; asimismo se puede trabajar la simetría, diversas clases de polígonos, introducir dos clases de límites; igualmente se puede mostrar el crecimiento exponencial, etc.

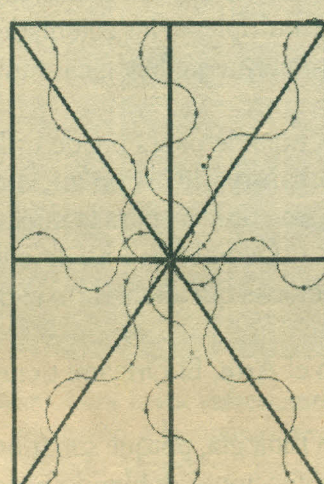
La siguiente es una de las tantas actividades desarrolladas en el curso Seminario de Estrategias y Medios no convencionales para los estudiantes de Matemáticas y Física de la Facultad.

¿De cuántas maneras diferentes se puede dividir una hoja de papel tamaño carta en dos partes iguales, congruentes o no congruentes?

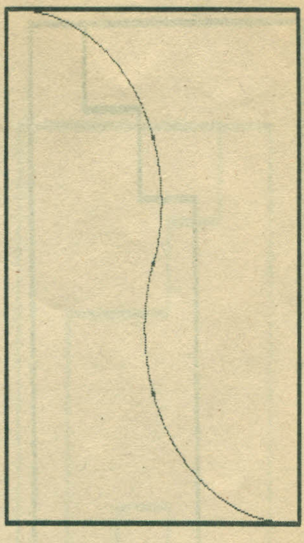
Antes de inspeccionar las doce ilustraciones siguientes, trate el lector de confeccionar sus propias divisiones en una hoja.



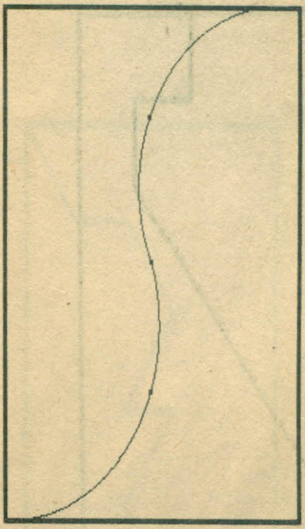
Hoja 1



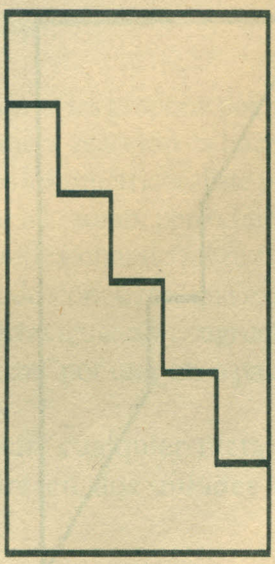
Hoja 2



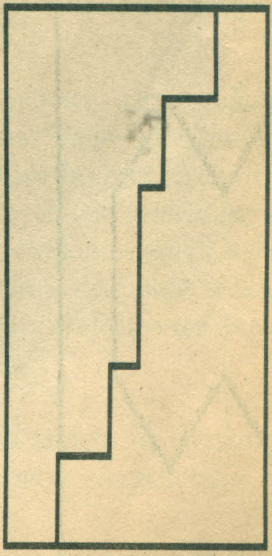
Hoja 3



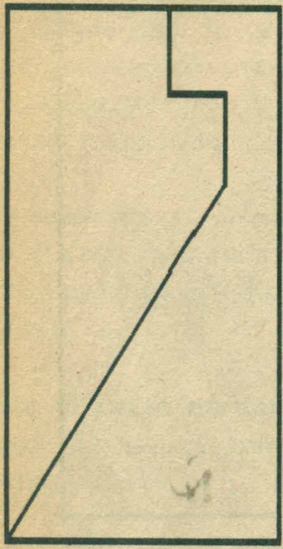
Hoja 4



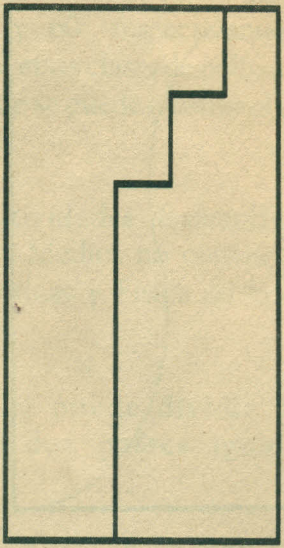
Hoja 5



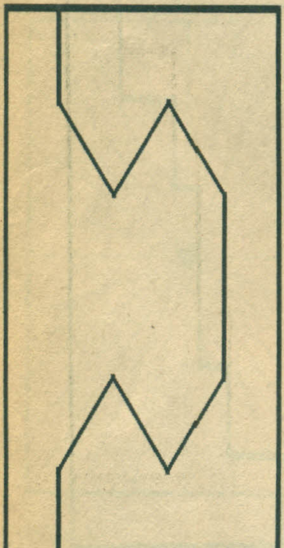
Hoja 6



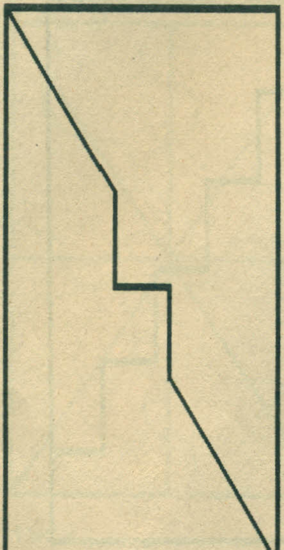
Hoja 7



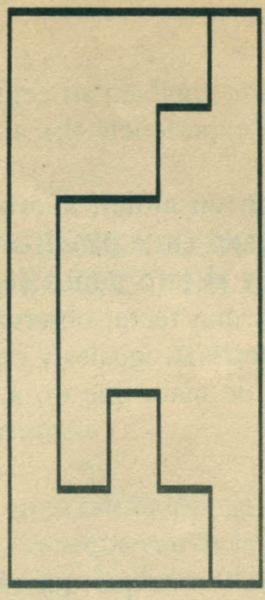
Hoja 8



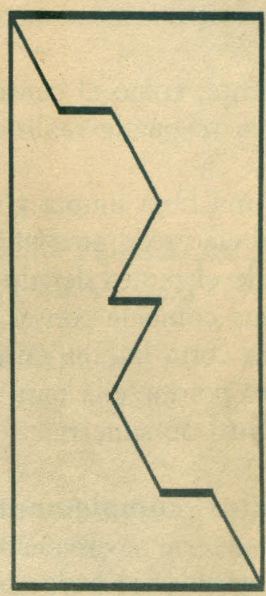
Hoja 9



Hoja 10



Hoja 11



Hoja 12

Cuando se les propone por primera vez este ejercicio a los estudiantes, su primera reacción es hacer los dobleces más fáciles y evidentes, incluidos los simétricos. Este primer acercamiento da entre cuatro y ocho formas a lo sumo; pero cuando se les deja el ejercicio abierto para que sigan reflexionando sobre él, descubren, con evidente cara de satisfacción y desconcierto, que existen infinitas formas de dividir la hoja en dos partes iguales y congruentes, apoyados para el efecto en el teorema que reza: "por un punto pasan infinitas rectas".

Es decir, cualquier recta que pase por el centro de la figura la dividirá en dos mitades iguales simétricas y congruentes -gráfica 1-.

Al observar las gráficas 2, 3, 4, 5, 6, 10 se colige que existen otras infinitas maneras de lograr el mismo objetivo.

Las demás gráficas – y otras que también se pueden realizar - tienen igual área, pero las figuras no son congruentes.

Con respecto a la hoja 5, se la puede aprovechar para mostrar la suma de los primeros números naturales.

Finalmente, como el centro de la figura es también su centro de masa, se puede realizar la siguiente experiencia física:

Tome una hoja limpia y suspéndala con un alfiler, apoyado sobre el eje y de un plano cartesiano fijado en la pared; ahora, desde el punto dejado por el alfiler y el otro punto de la hoja, que coincide con el eje y, trace una recta; observará que ésta corta la hoja en dos partes simétricas, iguales y congruentes porque ella pasa por el centro de masa que es, a su vez, punto de simetría.

Ejercicios complementarios:

- Ahora tome un pedazo de papel de la forma que quiera y efectúe sobre ella el mismo ejercicio anterior; ¿qué puede decir de las partes en que queda dividida la hoja?
- ¿Se podrá hacer lo mismo con objetos tridimensionales?

ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS°/. ADICION°/. FORMACION DE CONCEPTOS

GENERALIZACIÓN Y CONCEPTUALIZACIÓN EL CASO DE LAS ESTRUCTURAS ADITIVAS

Gilberto Obando Zapata*

Resumen

La generalización, al igual que la conceptualización son dos procesos que van de la mano, y su tratamiento en la escuela exige unas características didácticas especiales para que permitan desarrollar en los alumnos un pensamiento matemático autónomo.

Se presentan en este artículo algunas ideas sobre estos dos aspectos cruciales en el proceso de construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos, y se ejemplifica con un aspecto de la matemática de la educación básica: **las estructuras aditivas.** En esta parte se intenta mostrar como la escuela tradicionalmente ha mirado el aprendizaje de las estructuras aditivas de una manera muy simple, ignorando la gran complejidad de los procesos que implica este aprendizaje.

La generalización en matemáticas

Las matemáticas, tradicionalmente, han sido consideradas como la ciencia de lo abstracto y lo general por excelencia. Esto debido a que sus definiciones, postulados y teoremas no hacen

* *Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle. Magíster en Educación Matemática de la Universidad del Valle. Profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.*

referencia más que a los objetos matemáticos y a las relaciones entre éstos. Así, la validez de una proposición no depende de su comprobación empírica, sino, de la posibilidad de ser obtenida desde los axiomas y otros teoremas a partir de un proceso deductivo. Por esta razón lo axiomático–deductivo constituye la forma canónica de presentación del cuerpo teórico de las matemáticas.

Pero esta forma de presentación del conocimiento matemático oculta todo rastro de su origen y génesis. El matemático, en su quehacer, comete errores, elabora hipótesis, realiza inducciones, generalizaciones, etc., y posteriormente, cuando juzga que ha encontrado un resultado digno de ser *comunicado*, elige, del gran laberinto de sus reflexiones, aquello que es comunicable y "susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás" (Brousseau, 1993, p 4). Esto es, "El autor despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados" (ibid). Y después de pasar la crítica del resto de la comunidad de matemáticos del momento, quienes lo reformulan, lo generalizan, o incluso lo destruyen, pasa a ser conocimiento válido.

Para que los saberes matemáticos ingresen a la escuela deben sufrir una re–elaboración didáctica, que los re–contextualiza, los re–personaliza y los re–temporaliza. Es en esta re–elaboración didáctica donde se debe centrar la actividad profesional del maestro de matemáticas, a fin de propiciar para el alumno una verdadera actividad científica.

> *El trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etc. (Brousseau, op. cit p. 5)*

Esta actividad matemática del alumno tiene un objetivo primordial: hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, es decir que pueda, ante una determinada situación, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través clases generales de problemas. Pero dado que la construcción del conocimiento es contextualizado por naturaleza, entonces, el paso a la generalización no es ni fácil ni inmediato. Esto implica que el profesor debe proponer múltiples situaciones en variados contextos a fin de que el alumno pueda identificar los invariantes comunes a todas las situaciones, los cuales son los elementos constitutivos del conocimiento que se le desea enseñar, y entonces, pueda entrar a diferenciarlos de los elementos particulares de cada situación. La identificación de estos invariantes permite la constitución de esquemas generales de pensamiento que son los que permiten, como ya se dijo antes, que los alumnos ante situaciones distintas puedan reconocer que constituyen variantes de una misma situación conceptual, o viceversa, que puedan analizar cualquier situación particular, como representante de una clase general de situaciones. En este sentido, generalizar es algo más complejo que ir de lo particular a lo general. "La abstracción implica la utilización de los recursos estructurales del medio, para producir versiones más refinadas del conocimiento, es decir, más generales en el sentido clásico" (Moreno, obra en prensa).

Un aspecto fundamental de la generalización es el relacionado con la identificación de invariantes. Cuando un alumno desarrolla su actividad a través de una serie de situaciones para acceder a la formulación general de un conocimiento, él debe identificar y distinguir, lo que es particular a cada una de las situaciones (la forma), de lo que es común a todas ellas (lo estructural), y por tanto, constituyen los invariantes que caracterizan el concimiento que se les quiere enseñar. Por ejemplo, cuando el profesor dibuja un triángulo rectángulo este ve en su dibujo el representante de una clase conceptual (la clase de todos los triángulos rectángulos), pero para el alumno este dibujo "**es el triángulo**", y por lo tanto, cuando se le dibuja otro triángulo rectángulo en una posición distinta puede no identificarlo como un triángulo rectángulo. Esto es, el alumno no logra distinguir aquellas características que son particulares de la construcción gráfica que se le ha presentado inicialmente, de las propiedades generales que caracterizan un triángulo rectángulo, y por lo tanto, al no identificarlas (las particulares y las generales) en la nueva construcción, entonces, no puede ver el nuevo triángulo como triángulo rectángulo. Para adquirir ese conocimiento que permita reconocer y diferenciar los elementos estructurales de los particulares es necesario que el alumno esté en contacto con múltiples situaciones en las que pueda confrontar las hipótesis particulares que construye sobre cada situación, a fin que pueda encontrar las características generales que estructuran el concepto que se estudia, independiente de la forma como éste le sea presentado. Como puede verse es algo más profundo que aprenderse una definición.

Lo expresado anteriormente nos muestra que se debe ser cuidadoso con la utilización, tanto de los ejemplos, como de los materiales, pues en el caso de los ejemplos, es necesario preguntarse por la forma como los alumnos los interpretan, (que tan general es la interpretación que les dan), mientras que con los materiales, es necesario analizar con mucho cuidado hasta qué punto la situación a la que están enfrentados los alumnos, y los materiales que ellos manipulan, les permiten generar estructuras generales de pensamiento, o hasta donde la actividad que desarrollan en las actividades queda estrechamente ligada a las acciones realizadas.

De otra parte, la generalización tiene un alto componente lingüístico. Esto se puede ver a través de un enunciado como el del teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo: "en un triángulo la suma de sus ángulos interiores es de 180 grados". La generalidad reside en que hay una relación que se cumple para cualquier triángulo, y por tanto la parte más importante del enunciado es el artículo indefinido "un", el cual significa "en todo". Que sea una relación (en este caso de suma) entre los ángulos interiores del triángulo, no es tan importante, y que la suma tenga un valor de 180 grados es lo menos importante, (de hecho es puramente circunstancial). Pero de otra parte, la verificación experimental, puede llevar a incluso comprobar que dicha suma no siempre da 180 grados. De nuevo comprender el carácter de generalidad presente en dicho teorema es algo más profundo que memorizar el enunciado, o verificar el cumplimiento en algunos casos particulares.

Otro aspecto importante de la generalización es el poder *ver lo general a partir de lo particular*, así *como ver a través de un caso particular una expresión de lo general*. Esto es, dados un conjunto de situaciones con un invariante común, reconocer en ellas la expresión de una ley general de las matemáticas, pero también, ante una situación particular ver en ella un representante de una clase general. Por ejemplo, ante un problema como el siguiente: "Una llave llena un tanque en dos horas. Otra llave llena el mismo tanque en una hora. Si ambas abren al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tardan en llenar el tanque?", una persona que pueda generalizar verá en este problema un caso particular de una clase general de problemas relacionados con la rapidez con que se realiza un trabajo, mientras que otra que no tenga esta capacidad de generalización solo vera un problema de un tanque que se llena utilizando dos llaves abiertas de manera simultánea, y no podrá relacionarlo con otras situaciones como aquellas en las que se analizan los tiempos empleados para realizar un trabajo.

La conceptualización en matemáticas

Las anteriores ideas sobre la generalización muestran como este proceso no es independiente de los procesos de conceptualización. Es decir, no se aprenden conceptos de un lado, y después se aprende a generalizar por otra vía, sino que un proceso de conceptualización es en si mismo un camino hacia la generalización. En esta perspectiva conviene señalar que la conceptualización no se agota en el aprendizaje de los enunciados o definiciones, sino que, por el contrario, pone en juego una serie de elementos en estrecha relación. En este sentido Vergnaud plantea: "la conceptualización en matemáticas, como en cualquier otra área, consiste en elaborar los medios intelectuales de tratar progresivamente situaciones cada vez más y más complejas". (Vergnaud, 1997, p 7).

Para Vergnaud, un concepto es una "tripleta de conjuntos C = (S, I, R) donde S es el conjunto de situaciones que dan significado al concepto, I es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades, y relaciones), y pueden ser reconocidas y utilizadas por los sujetos para analizar y adueñarse de esas situaciones, y R es el conjunto de representaciones simbólicas que pueden ser usadas para enfrentar y representarse esas invariantes, y por tanto, representar las situaciones y procedimientos para manipularlas" Vergnaud, 1988, p 141).

Lo anterior conduce a Vergnaud a formular una categoría didáctica fundamental. Se trata de la categoría de campo conceptual[1] ; la define:

> *"Un Campo Conceptual está constituido, desde un punto de vista práctico, por el conjunto de situaciones en cuyo dominio progresivo juega un papel importante una gran variedad de conceptos y de procedimientos en estrecha conexión. Desde un puntode vista teórico, un campo conceptual está constituido por el conjunto de conceptos y teoremas que contribuyen al dominio progresivo de esas situaciones.* (Vergnaud, 1997, p 9)."

Para Vergnaud, la enseñanza de los conceptos no puede hacerse de una manera aislada, ni a partir de una sola situación problema, sino enmarcados dentro de un campo conceptual, pues:

- Una situación dada, no podría poner en juego, en general, todas las propiedades de un concepto..., se hace necesario la referencia a una diversidad de situaciones.
- Una situación dada no pone en juego habitualmente un solo concepto[2] ...
- La formación de un concepto, en particular si uno lo considera a través de la actividad de resolución de problemas, tarda en general un gran período de tiempo.

Para Vergnaud en el proceso de formación de un concepto juega un papel fundamental la noción de esquema, el cual es entendido "como una organización invariante de la conducta para un tipo de situaciones dadas" (Vergnaud, 1993). Esto

[1] *Esta categoría didáctica tiene su origen a partir de la enseñanza a través de la resolución de problemas. Esta es quizás una de las maneras más efectiva de enseñar las matemáticas, pues los alumnos están en una constante actividad que les permite reflexionar sobre la naturaleza y propiedades de los entes matemáticos. Además está de acuerdo con la idea de que la enseñanza no es la simple transmisión de un conocimiento.*

[2] *No se trata solamente de los prerrequisitos para afrontar una determinada tarea sino también de que en una situación problema dada entran en juego varios conceptos de los cuales alguno o algunos no son objeto de estudio en el momento, pero no debe descuidarse la incidencia de la tarea en el proceso de...*

implica que en un esquema existe un conocimiento implícito, pero que está ligado al tipo de situaciones en donde se aplica. Vergnaud denomina este tipo de conocimientos *conceptos–en–acto* y *teoremas–en–acto*[3]. Estas son las invariantes operatorias, es decir, el tipo de conocimientos que permiten que la acción del sujeto sea operatoria.

...conceptualización de dichos conceptos, o viceversa, la incidencia del nivel de conceptualización de dichos conceptos en la manera como es afrontada y solucionada la tarea.

[3]Un teorema–en–acto es definido como las relaciones matemáticas que los estudiantes deben tomar en cuenta para seleccionar la operación o secuencia de operaciones que debe realizar para solucionar un problema. Un teorema–en–acto no es un teorema en el sentido convencional, puesto que la mayoría de las veces no es explícito. Ellos subrayan el comportamiento del alumno, y su campo de validez, usualmente es más reducido que el campo de los teoremas. Pueden incluso ser falsos. (Vergnaud, 1988, p 144).

Así mismo Vergnaud 1993, plantea que el paso de la utilización de un esquema de una clase particular de situaciones a una clase más general, está mediada por que el sujeto reconozca analogías, inferencias, semejanzas, relaciones causa efecto, etc., desde esas situaciones en las que su esquema era operatorio a aquellas en las que debe ser utilizado el nuevo conocimiento.

> *"El esquema, totalidad dinámica organizadora de la acción del sujeto por una clase especificada de acciones, es pues un concepto fundamental de la psicología cognitiva y de la didáctica. A menudo no es reconocido como tal. Además, demanda ser analizado. Si se reconoce fácilmente que un esquema está compuesto de reglas de acciones para alcanzar cierto fin, no siempre se reconoce que igualmente está compuesto, de manera esencial, de invariantes operatorias (conceptos–en–acto y teoremas–en–acto) y de inferencias. Las inferencias son fundamentales para hacer actuar al esquema en cada situación particular: en efecto ... un esquema no es un estereotipo sino una función temporalizada de argumentos, que permite generar secuencias diferentes de acciones y de tomas de información, en función de los valores de las variables de la situación. (Vergnaud, 1993, p 93)."*

En resumen, desde esta perspectiva para el aprendizaje de un determinado concepto, no es suficiente con tratar una sola situación, sino que por el contrario, es necesario el tratamiento de una gran variedad de situaciones, pero además, se tiene que cada situación puede poner en juego una variedad de conceptos, y para el tratamiento de estas situaciones se pueden tener distintos sistemas de representación. Esto hace que el aprendizaje de un determinado concepto sea un proceso complejo que dura un largo período de tiempo, y para el cual se requiere una variedad de situaciones que pongan en juego las características de dicho concepto.

Así pues, al momento de pensar en la enseñanza de un determinado concepto, se hace necesario tener en cuenta que en este proceso intervienen elementos de distinta naturaleza. Entre los más importantes se pueden destacar:

1. Un concepto nunca está aislado, sino en estrecha conexión con otros conceptos matemáticos. Esto implica entonces la necesidad de delimitar la red conceptual en la cual está inscrito el concepto que se desea convertir en objeto de enseñanza. No se trata de la elaboración de un mapa conceptual, sino más bien de lo que Vergnaud llamó un campo conceptual.

2. Dado que el proceso de conceptualización implica le tratamiento de múltiples situaciones, se hace necesaria una articulación de estas situaciones para formar una unidad coherente que permita el aprendizaje deseado en los alumnos. Esta articulación sólo puede darse en la medida que se identifiquen de manera clara los medios y mediadores que están presentes en las distintas situaciones, y la manera como estos medios y mediadores permiten transformaciones conceptuales en los alumnos, las cuales se pueden evidenciar a través del nivel de elaboración alcanzado en su producción. Esto implica un análisis por lo menos en dos sentidos: los medios y mediadores puestos en escena a través de cada situación que elementos conceptuales son los que potencian, y que tipo de variables didácticas son las pertinentes para hacer evolucionar la producción del alumno a través de las situaciones propuestas.

3. De igual forma, este proceso hacia una versión más abstracta del conocimiento no solo implica coordinar situaciones en diferentes contextos, sino también, a propósito de una misma situación articular distintos formas de representación.

A continuación se presentan una serie de consideraciones sobre las estructuras aditivas, con lo cual se espera mostrar la complejidad del proceso de conceptualizar y generalizar, tomando como referencia uno de los aspectos conceptuales básicos de la educación básica. El análisis presentado no es exhaustivo, pues no se trata de realizar un tratado sobre dichas estructuras, sino mostrar elementos mínimos que llamen la atención sobre la necesidad de reconceptualizar su tratamiento en los contextos escolares, en particular sobre el aprendizaje de lo aditivo, y en general sobre los proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Las Estructuras Aditivas

Desde la anterior perspectiva, el trabajo escolar sobre el desarrollo del esquema aditivo trasciende ampliamente lo que tradicionalmente se ha desarrollado, el cual básicamente se centra en el aprendizaje de los algoritmos básicos de la suma y de la resta, de un lado, y de la enseñanza de la solución de problemas, de otro, con muy poca conexión entre si. Según Vergnaud, las estructuras aditivas está conformado por:

> *"El conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Son de esta forma constitutivos de las estructuras aditivas los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumentos o disminución (perder o ganar dinero), de relación de comparación cuantificada (tener 3 dulces o 3 años más que), de composición binaria de medidas, (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unitaria, de inversión, de número natural y de número relativo, de abscisa, de desplazamiento orientado y cuantificado,"* (Vergnaud, 1990, p 96 y 97).

Cualquiera que sea la situación aditiva a la que uno se vea enfrentado, estas obedecen a relaciones ternarias que pueden ser modeladas a través de uno de seis esquemas elementales, o a una combinación de estos (para una discusión detallada de estos seis esquemas elementales puede consultarse el texto "Las matemáticas, el niño y la realidad" de Gerard Vergnaud). Los seis esquemas elementales son:

1. Dos medidas se componen para dar lugar a una tercera.

Se trata de dos cantidades **A** y **B** que se unen para dar lugar a una tercera cantidad C. Según que en el problema se pregunta por la cantidad A, la cantidad B o la cantidad C, se pueden obtener dos tipos de problemas diferentes (ya que preguntar por A o por B es equivalente), uno de los cuales se soluciona con una resta (aquel en el que se pregunta por A o por B). En esta categoría solo se presentan problemas de suma[4], pues las cantidades A, B y C siempre son positivas.

2. Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida.
En este caso se tiene una cantidad inicial (estado inicial), cantidad A, la cual sufre una transformación a través del tiempo debido a la acción de un operador, cantidad B, para producir una cantidad final (estado final), cantidad C. La cantidad A siempre es positiva y la cantidad C siempre mayor o igual a cero. Pero la cantidad B, dependiendo del efecto que realice sobre la cantidad A, puede ser negativa (si la hace disminuir), o positiva (si la hace aumentar).

Dado que en la estructura del problema el papel lógico de las cantidades A y B no son idénticos, entonces, si la cantidad B es positiva se tienen tres tipos de problemas de suma (cuya solución no siempre es una suma; por ejemplo en el caso que se pregunte por A, o por B) según se pregunte por las cantidades A, B, o C. De igual forma se obtendrán tres tipos de problema de resta (como en el caso de la suma, cuya solución no siempre es una resta) si la cantidad B es negativa. Por tanto se tiene un total de seis problemas.

3. Una relación une dos medidas.
Este tipo se situaciones se presentan cuando se deben comparar dos cantidades, bien sea para establecer su diferencia (cuanto más tiene la mayor, o cuanto menos tiene la menor), o para igualarlas, (agregar a la menor para igualar a la mayor, o quitar a la mayor para igualar a la menor). En la comparación para establecer diferencia se pueden presentar 3 tipos de problemas de suma (cuantos más tiene la mayor) o tres tipos de problemas de resta (cuántos menos tiene la menor). De igual forma

[4]Es importante resaltar la diferencia que se establece entre la ecuación del problema, es decir la expresión matemática que representa la relación lógica entre los datos del problema, y la solución del mismo, la cual no siempre coniciden. Por ejemplo, en el problema "Pedro tiene 5 galletas en una mano, y en las junta con las que tiene en el bolsillo. Completa en total 8 galletas. ¿Cuántas galletas tenía en el bolsillo? Nótese como la ecuación del problema, es decir el que representa... su estructura es: $5 + x = 8$, aunque su solución se realice a través de la resta $x = 8 - 5$. Este es un problema de suma, pues esa es su estructura, a pesar de que se soluciona con una resta. En otras palabras, el problema es de suma o de resta según su estructura, y no según la operación que lo soluciona. Esta aclaración es válida para las demás categorías.

en los problemas de igualar se pueden presentar 6 casos. Así en esta categoría se pueden identificar 12 tipos posibles de problemas.

4. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
En este tipo de problemas, el enunciado no hace referencia a cantidades, sino a operadores, y se trata de la aplicación de dos operadores, de manera sucesiva, a una cantidad. Por ejemplo, es el caso de un estudiante que juega dos partidas de bolas, y en la primera pierde 5, mientras que en la segunda gana 3. En total es como si hubiera perdido 3.

Este tipo de problemas es equivalente a los de la primera categoría, pero a diferencia de ésta, las tres cantidades pueden ser positivas o negativas, lo cual genera un rango más amplio de posibilidades, 16 en total, dependiendo tanto de los signos de cada una de las cantidades, y del lugar de la incógnita, es decir, de la cantidad por la cual se pregunte.

5. Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.
Al igual que el caso anterior, el enunciado no hace referencia a cantidades, sino a operadores, pero ahora se trata es de un operador que se aplica sobre otro operador. Por ejemplo, Juan juega una partida de bolas y gana 5 canicas. Luego juego una segunda partida, y gana tres más que las que ganó en la primera partida. ¿Cuántas ganó en esta segunda partida?. Nótese como el operador +3, es un operador que actúa, no sobre la cantidad de bolas que posee Juan, sino actúa sobre el operador +5.

Este tipo de problemas es equivalente a los de la segunda categoría, pero a diferencia de esta, las tres cantidades pueden ser positivas o negativas, lo cual genera un rango más amplio de posibilidades, 12 en total, dependiendo tanto de los signos de cada una de las cantidades, y del lugar de la incógnita (es decir, de la cantidad por la cual se pregunte).

6. Dos estados relativos se combinan para dar lugar a un estado relativo.

Este caso es similar al anterior, solo que ahora, uno de los operadores no actúa sobre el otro para transformarlo, sino que ellos se combinan para producir un nuevo operador. Por ejemplo, Juan le debe $500 a Pedro, pero Pedro el debe $300 a Juan, entonces Juan sólo le queda debiendo $200 a Juan.

En un marco como el que se acaba de describir, queda claro que el dominio de las estructuras aditivas, implica, entre otros elementos, ser capaz de reconocer cualquier situación que implique sumas o restas a través de los esquemas generales que permiten su tratamiento (*ver en lo particular la expresión de lo general*); reconocer en las diferentes situaciones que impliquen sumas o restas los invariantes conceptuales que hacen que éstas se organicen en grupos o categorías perfectamente diferenciados (*ver lo general a partir de lo particular*); dominar diversas formas de representación de las situaciones problema; y por supuesto, dominar una gran variedad de procedimientos para encontrar las soluciones a las situaciones que se presenten. No sobra recalcar que estos elementos no se presentan aislados unos de otros, sino que, según el tipo de situaciones, se pueden tener diferentes formas de representación, y por ende de solución de la misma.

Pero además de estos esquemas básicos desde los cuales se puede analizar cualquier situación aditiva se deben considerar los contextos dentro de los cuales están inmersos los problemas, pues éstos afectan la representación que uno pueda darse de ellos. Así son determinantes en el tipo de representación que un alumno construya de una situación, entre otros, los siguientes elementos: el tipo de magnitud (continua o discreta), el conjunto numérico (naturales, racionales, irracionales, etc.). El tamaño de los números (grandes o pequeños, cercanos o distantes), los referentes materiales de la situación (un juego, una actividad comunitaria, etc.), la formulación del enunciado (una sola proposición, una secuencia de proposiciones, etc.), los medios y mediadores de la situación (se utiliza material concreto, gráfico, etc.), por quien se pregunta (por alguno de los sumandos, o por el resultado).

Por ejemplo, en los siguientes tres problemas se puede evidenciar cómo al hacer variar algunos de los elementos antes mencionado, se afecta radicalmente el tipo de representación del problema:

• En un caja hay 12 bolas, de las cuales 9 son rojas y el resto azules. ¿Cuántas bolas azules hay?
• ¿Si de una varilla de hierro que mide 14.795 cm se pinta 9.327 cm de roja, qué longitud queda por pintar de azul?
• De una varilla de hierro 19/37 están pintados de rojo y el resto está pintado de azul. ¿cuanto está pintado de azul?

Nótese como en cada uno de ellos la imagen mental que uno se puede formar es distinta, a pesar que los tres problemas tienen la misma estructura. Mientras que en el primero al ver las nueve rojas, ya se ven las tres azules, en los otros dos esta imagen cambia: ya no se sabe, de inmediato cuánto mide la parte azul. Es más, en el segundo se ve de inmediato que más de la mitad de la varilla está pintada de rojo, mientras que en el último no es tan obvio.

Conclusión

4

La escuela tradicionalmente ha reducido la enseñanza de lo aditivo a una actividad puramente algorítmica, acompañada de una serie de estrategias (memorísticas), para identificar cuando un problema es de suma o resta. Por ejemplo, "si en el enunciado dice **perdió** entonces es un problema de resta". Puede que si sea un problema de resta, pero que no necesariamente se solucione con una resta.

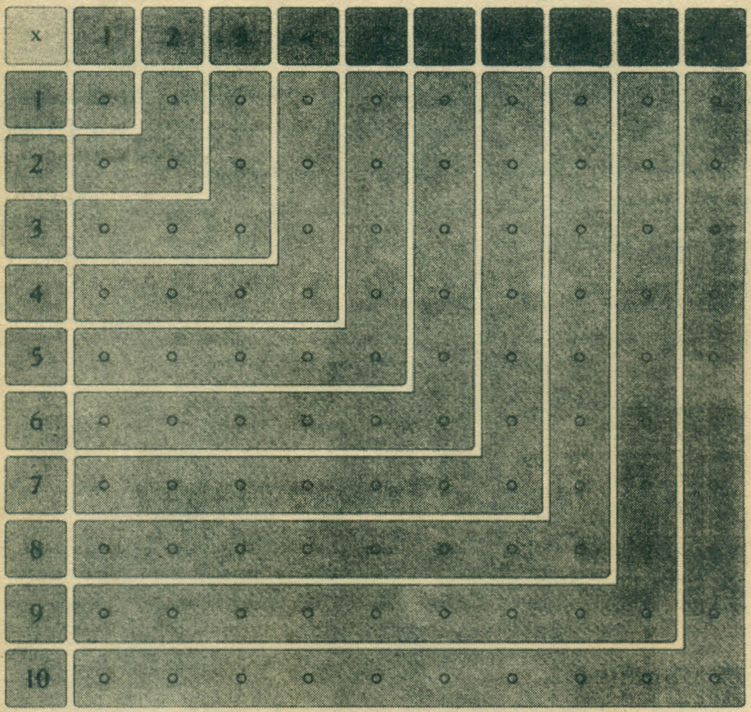
Es necesario pues desarrollar una serie de estrategias didácticas que permitan al alumno la construcción paulatina de la complejidad subyacente a las estructuras aditivas; construcción ésta que puede durar varios años, ya que, como se mostró antes, algunas de estas categorías implican tipos de problemas muy diferentes, (y por demás con un alto grado de dificultad para los alumnos). Si esta afirmación es válida para el caso de las estructuras aditivas, también es válida para el aprendizaje de cualquier concepto matemático. Primero estos no están aislados uno de otros, forman redes conceptuales, y segundo su aprendizaje debe pasar por el tratamiento de múltiples situaciones, en variados contextos y a través de diferentes estrategias análisis y de representación. Solo así se puede asegurar la construcción de un conocimiento estructurado que permite la formación de un pensamiento matemático autónomo en los alumnos, tal como lo proponen los recientes Lineamientos Curriculares de Matemáticas, publicados por el Ministerio de Educación Nacional.

BIBLIOGRAFÍA

BROUSSEAU, Guy. *La teoría de los campos conceptuales*. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de: Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. Recherches en didactique des mathematiques. Vol 7. No 2. 1986. Pgs 33-115.

VERGNAUD, Gerard. Le Moniteur de Mathematique. Edition Nathan, Paris, 1997, p 191.

VERGNAUD, Gerard. *La teoría de los campos conceptuales*. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3. 1990. Pgs. 133-170.



Extracción del libro Una brisa refrescante
para la iniciación a la matemática
Orlando Monsalve Posada

LA IMPORTANCIA DE LOS POLINOMIOS

Luis Carlos Yepes Velásquez*

Los polinomios, con sus operaciones se constituyen en un tema central en la enseñanza de las matemáticas en los grados séptimo y octavo de la educación básica; que por lo general no se establecen relaciones con otros temas de las matemáticas.

En un somero repaso de algunos contenidos, se encuentra que los Polinomios se utilizan en los siguientes temas:

- Sistemas de numeración en diferentes bases
- Polinomio arirmético
- Algoritmos de algunas operaciones aritméticas como es el caso de la multiplicación de números de dos o más dígitos
- La construcción del término enésimo de una sucesión y de una serie.

LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES Y LOS POLINOMIOS:

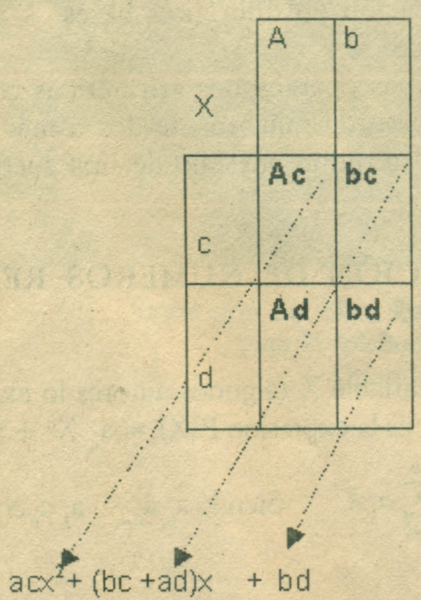
El polinomio en una variable X (algunos autores lo expresan en una indeterminada X), es la expresión $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X^1 + a_o X^o = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Siendo $a_{n,} a_{n-1,\ldots,} a_{1,} a_o$ coeficientes reales.

* Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Medellín. Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT. Profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia

Si la variable X representa un número entero positivo mayor o igual que 2 el polinomio se transforma en un polinomio aritmético en base dos, tres, cuatro, ..., base diez, o base n . En consecuencia, un número expresado en cualquier base se puede expresar en base diez utilizando su polinomio, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$111111_2 = 1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1^0 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$
$111111_3 = 1x3^5 + 1x3^4 + 1x3^3 + 1x3^2 + 1x3 + 1 = 243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 1 = 364$
$111111 = 1x10^5 + 1x10^4 + 1x10^3 + 1x10^2 + 1x10 + 1 = 100000 + 10000 + 1000 + 100 + 10 + 1$

La multiplicación de números de dos dígitos se puede simplificar utilizando el resultado de la multiplicación de los polinomios (ax +b) (cx + d). Esta operación se puede realizar utilizando una tabla de doble entrada, donde cada casilla interna corresponde al producto de los coeficientes y que al sumar los productos diagonales se obtiene el resultado de la operación:



Es de tener en cuenta que como los polinomios son de grado 1, el producto genera un polinomio de grado 2.

Relacionando tanto la forma de expresar el producto de los polinomios como su resultado con el producto de dos números de dos dígitos (ab)(cd), se puede obtener una forma rápida para llegar al resultado mediante la siguiente ilustración:

(ab)(cd) = (ax10 + b)(cx10 +d), producto de los polinomios aritméticos, cuyo resultado se puede mostrar por el siguiente algoritmo:

a b	a b	a b
↕	⤫	↕
c d	c d	c d
Pasos 3^{o}	2^{o}	3^{o}

Ejemplarizando los procesos anteriores mediante el producto de los números 34 y 25, se tiene que 34 x 25 = (3x10 +4)(2x10 + 5) = $3x3x10^2$ + (3x5 + 4x2)10 + 4x5 . La Simplificación del proceso se obtiene mediante el siguiente esquema:

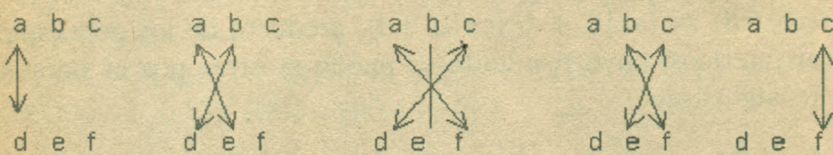
3 4	3 4	3 4
↕	⤫	↕
2 5	2 5	2 5
----------	----------	----------
6	3x5 + 4x2	20
6	15 + 8	20
6	23	20
6	25	0

8	5	0

Pasos 3º 2º 3º

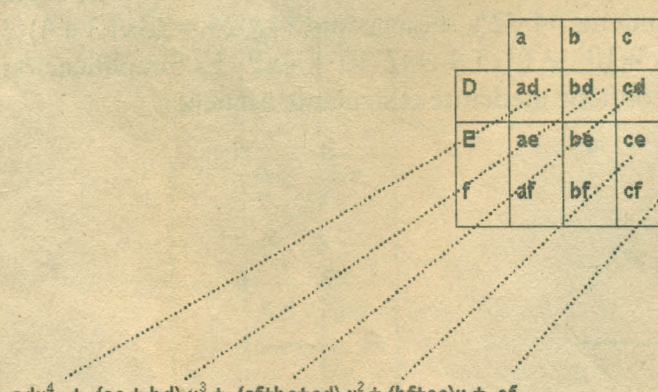
RESULTADO : 850

La multiplicación de los números de tres dígitos (abc) (def) se puede representar por sus respectivos polinomios $(ax10^2 + bx10 + c)(dx10^2 + ex10 + f)$, se ilustra mediante el siguiente esquema:



Pasos 5 4 3 2 1

Los pasos anteriores para efectuar la multiplicación se deducen del producto de los polinomios $(ax^2 + bx + c)$ y $(dx^2 + ex + f)$ mediante una tabla de doble entrada como se realizó el producto de los polinomios $(ax + b)$ y $(cx + d)$ ampliado a tres dígitos y que se ilustra a continuación:



Para multiplicar los números 123 y 456 se procede de la siguiente forma:

1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
4 5 6	4 5 6	4 5 6	4 5 6	4 5 6
1x4	1x5+2x4	1x6+3x4+2x5	2x6+3x5	3x6

4	+	13	+	28	+	27	+	18
4	+	13	+	28	+	28	+	8
4	+	13	+	30	+	8	+	8
4	+	16	+	0	+	8	+	8
5	+	6	+	0	+	8	+	8

5	6	0	8	8
Pasos 5°	**4°**	**3°**	**2°**	**1°**

resultado : 56088

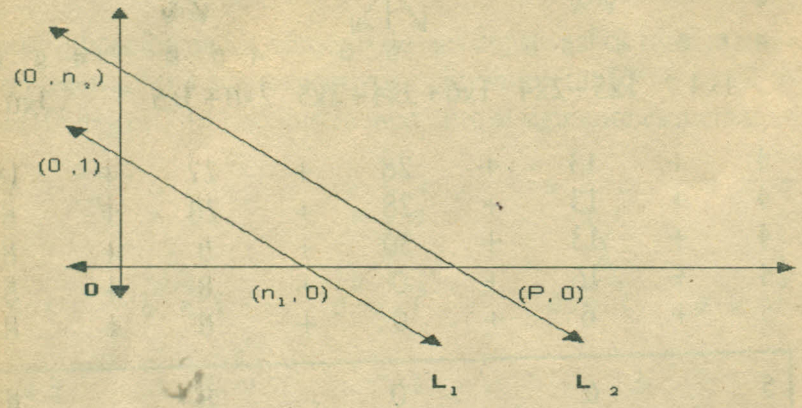
El proceso puede continuar en forma análoga para la multiplicación de números que tengan más de tres dígitos.

LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES Y SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

La multiplicación de números reales se puede realizar utilizando el polinomio $P(x) = mx + b$ que representa la ecuación de la recta con pendiente m y que a través de la traslación de rectas se puede representar en el plano cartesiano el producto de los números n_1 y n_2, procediendo de la siguiente forma:

Sea $P = n_1\ n_2$ el producto de dos números en el cual el primer factor representa la abscisa de un punto situado en el eje X y el segundo factor representa la ordenada de un punto situado en el eje Y, generando respectivamente los puntos $(n_1, 0)$ y $(0, n_2)$.

Si se traza una recta L_1 que pase por los puntos $(n_1, 0)$ y $(0, 1)$ y luego se traza otra recta L_2 paralela a la recta L_1 y que pase por el punto $(0, 1)$, dicha recta L_2 corta al eje X en el punto $(P, 0)$ y cuya representación en el plano cartesiano está dada en la gráfica.



Las ecuaciones de las rectas son:

$$L_1 : y = \frac{1}{-n_1}(x - n_1) \text{ , } L_2 : y = \frac{n_2}{-P}(x - P)$$

Las rectas son paralelas, lo que significa que sus pendientes son iguales, es decir, $\frac{1}{-n_1} = \frac{n_2}{-P}$. De dicha expresión se explícita $P = n_1 n_2$ que corresponde al producto de los números dados.

Se aprecia en el tema expuesto que el aprendizaje puede ser más significativo por parte del estudiante y que le ayuda a evolucionar su pensamiento matemático ya sea utilizando algoritmos o relacionando contenidos.

BIBLIOGRAFÍA

Ministerio de Educación Nacional. LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS. Bogotá. 1998.