

El variograma y el correlograma, dos estimadores de la variabilidad de mediciones hidrológicas

Variogram and correlogram, two proposed estimators of the hydrological variability measurement

Alfonso Gutiérrez-López^{1}, Aldo I. Ramirez², Thierry Lebel³, Oscar Santillán⁴, Carlos Fuentes¹*

¹Centro de Investigaciones del Agua, CIAQ, Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas, s/n Qro. Col. Las Campanas C.P. 76010, Querétaro, México

²Centro del Agua para América Latina y el Caribe, Tecnológico de Monterrey, Eugenio Garza Sada 2501 sur C.P. 64849, Monterrey, México

³Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement, 1025, rue de la piscine C.P. 38400 Saint Martin d'Hères Grenoble, Francia

⁴Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, IMTA, Paseo Cuauhnáhuac 8532, Col. Progreso, C.P. 62550, Jiutepec, Morelos, México

(Recibido el 8 de marzo de 2010. Aceptado el 18 de marzo de 2011)

Resumen

En este artículo se presenta el análisis de la precipitación diaria de cuatro estaciones climatológicas de Chiapas y Tabasco ubicadas en la cuenca de aportación de la planicie tabasqueña, en el período agosto a noviembre de 2007. En dicho período se generó la gran inundación de Villahermosa y sus alrededores. Los variogramas y correlogramas indican que las precipitaciones producidas están en efecto fuera de su variación normal.

----- *Palabras clave:* Kriging, geoestadística, interpolación espacial, inundación en Tabasco, precipitación diaria

Abstract

The analysis of daily precipitation data of four climate stations in the Mexican states of Chiapas and Tabasco is presented in this paper. The period

* Autor de correspondencia: teléfono: +52 + 442 + 192 1200 ext. 6401, correo electrónico: alfonso.gutierrez@uaq.mx (A. Gutiérrez)

from August to November of 2007 was selected because of the big flood that severely affected the city of Villahermosa and its surroundings. The variograms and correlograms indicate that the produced precipitations are in fact far from its normal variability.

----- *Key words:* Kriging, geostatistical, spatial interpolation, Tabasco's flood, daily precipitation

Introducción

El *kriging* y el *kriging* universal son dos métodos usados comúnmente para la interpolación espacial de variables geofísicas e hidrológicas. Uno de los pasos claves para la aplicación de un *krigeado* es que se debe definir una función de correlación espacial llamada variograma. El objetivo de este artículo es presentar los principios básicos del método de interpolación espacial *kriging* y presentar detalladamente la relación entre un variograma y un correlograma. Esta relación frecuentemente se confunde y presenta complicaciones matemáticas a quienes desarrollan relaciones regionales y trabajan con el análisis espacial de datos. El *kriging* es el método de estimación óptimo en el sentido estadístico del término y se puede utilizar tanto para la interpolación como para la extrapolación. El *kriging* lleva el nombre de quién lo concibió, el ingeniero en minas de origen sudafricano D. G. Krige. Durante los años cincuenta del siglo pasado, [1] desarrolló una serie de métodos estadísticos empíricos con el objeto de determinar la distribución espacial de minerales a partir de un conjunto de perforaciones. Sin embargo, fue el francés Matheron [2], quien formalizó esta técnica, utilizando las correlaciones entre las perforaciones para determinar la distribución espacial de los minerales. Fue él quien nombró a esta técnica como "*kriging*". También fue el primero en utilizar el término "*geoestadística*" para designar la modelación estadística de datos espaciales. Las mismas ideas fueron desarrolladas paralelamente en la antigua Unión Soviética por Gandin [3] quien bautizó este procedimiento con el nombre de "interpolación óptima" cuando lo aplicó a datos meteorológicos. Gandin introdujo el término de análisis objetivo para describir el

análisis basado en correlaciones. Estos nombres aún están en uso, sobre todo cuando se trata de aplicación relacionadas con las ciencias de la atmósfera. En oceanografía el método fue desarrollado en 1976 [4] y es conocido con el nombre de "método de interpolación de Gauss-Markov" que es el nombre que se le da formalmente a este procedimiento en los textos de estadística [5,6]. A continuación se presenta un desarrollo básico de la formulación del variograma y su relación con la función que se conoce como correlograma. Se da por hecho que el lector tiene ciertos conocimientos de geoestadística por lo que se omiten algunas demostraciones.

Metodología

El variograma

La interpolación espacial es un problema clásico de estimación de una función $F(x)$ en un punto X_p de un plano a partir de valores conocidos de F en un cierto número m de puntos regionales X_i . El problema consiste en determinar la ponderación de los valores W_i de cada punto regional, tal como se propone en la ecuación (1).

$$F(x_p) = \sum_{i=1}^m W_i \cdot F(x_i) \quad (1)$$

Existen muchas maneras de escoger estos pesos; los dos métodos más conocidos son la interpolación lineal (en función del inverso de la distancia) y el método de ajuste de polinomios cúbicos (*splines*). En el *kriging* se eligen los pesos a partir del grado de similitud entre los valores de F , a partir de la covarianza entre los puntos en función de la distancia que lo separa. Un usuario serio del *kriging* debe conocer bien

las condiciones de utilización de este método. En este trabajo se asume que el lector conoce los principios básicos de este método, por lo que simplemente se establece que la única condición indispensable para utilizar el *kriging*, es que la media y la varianza de la función F sean estacionarias, es decir; estos dos estadísticos no dependen de la posición de los puntos de medición sino solamente de la distancia que los separa. De ésta forma podemos decir que el variograma es simplemente la varianza menos la covarianza, en función de la distancia entre los puntos [7, 8]. El *kriging* utiliza el semi-variograma (la mitad de un variograma) para determinar los pesos en la ecuación (1). Un comentario pertinente es que en la literatura especializada se encuentran indistintamente los términos variograma y semi-variograma, utilizados como sinónimos y definidos por la ecuación (2). El semi-variograma para un caso bidimensional puede calcularse con la siguiente ecuación.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} (x_i - y_i)^2 \quad (2)$$

donde

$\gamma(h)$ es el variograma teórico y

$n(h)$ es el número de puntos x_i, y_i separados una distancia $h = x_i - y_i$.

Se utiliza la notación de x_i, y_i para la mejor comprensión en el plano euclidiano bidimensional, sin embargo, en la práctica las coordenadas (x, y) representan un vector \mathbf{x} de una variable aleatoria, denotada comúnmente en geoestadística como $Z(\mathbf{x})$. La selección y el ajuste de una función a un semi-variograma es la parte más delicada de un *kriging* [7]. El *kriging* consiste en calcular los pesos W_i de la ecuación (1) con la ayuda de la función $\gamma(h)$ correspondiente a los m puntos de medición. Existen tres tipos de *kriging* univariado: el *kriging* simple, el *kriging* ordinario y el *kriging* universal. La diferencia entre estos tipos de estimación radica en el conocimiento de la estadística de la variable a interpolar.

- i) *kriging* simple: variable estacionaria de media conocida.
- ii) *kriging* ordinario: variable estacionaria de media desconocida.
- iii) *kriging* universal: variable no estacionaria (que tienen una tendencia).

Cabe mencionar que la interpolación por funciones *splines* cúbicas, equivale a un *kriging* utilizando una covarianza generalizada de orden 1, estas funciones son muy utilizadas para cartografiar variables meteorológicas porque proporcionan una imagen lisa del fenómeno interpolado. Sin embargo, esta interpolación no es óptima en el sentido de la varianza del estimador [9,10]. En este trabajo no referiremos al *kriging* ordinario llamado también por algunos autores, *kriging* puntual. El procedimiento consiste en determinar la combinación de pesos W_i de la ecuación (1). Los pesos se obtienen multiplicando los W_i en cada uno de los m puntos, por cada uno de las m semi-varianzas asociadas a estos puntos (las líneas de la matriz A de la ecuación 3). El problema puede expresarse como un sistema de $m+1$ ecuaciones lineales, con $m+1$ incógnitas [11, 6, 12].

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{B} \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma(h_{11}) & \gamma(h_{12}) & \dots & \gamma(h_{1m}) & 1 \\ \gamma(h_{21}) & \gamma(h_{22}) & \dots & \gamma(h_{2m}) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(h_{m1}) & \gamma(h_{m2}) & \dots & \gamma(h_{mm}) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_m \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \gamma(h_{1p}) \\ \gamma(h_{2p}) \\ \dots \\ \gamma(h_{mp}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los $\gamma(h_i, j_i)$, con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, m$, son los valores del semi-variograma que corresponden a la distancia h_{ij} entre los puntos x_i y x_j . Los $\gamma(h_{ij})$ son calculados a partir de los datos experimentales utilizando la ecuación (2) mientras que los $\gamma(h_{ip})$ son calculados con la ayuda de la función analítica que ha sido ajustada a los puntos del semi-variograma experimental. Para que la solución del sistema sea insesgada, la suma de pesos W_i debe ser igual a 1. Esta condición introduce un grado de libertad suplementario en el problema, el cual se introduce, agregando una variable libre λ que es precisamente el multiplicador de Lagrange, con el objeto de minimizar el error de la estimación. Esta es una de las claves de la aplicación y uso del *krigeado*. El vector \mathbf{W} se obtiene premultiplicando los dos lados del ecuación (3) por la inversa de la matriz A . El valor buscado en el punto x_p se calcula utilizando los valores conocidos de F y la ecuación (1). La varianza de la estimación S_p^2 , ecuación (4) es el cuadrado del error estándar en cada punto y se obtiene con la relación:

$$S_p^2 = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

Donde \mathbf{W}^T es el vector transpuesto de \mathbf{W} . Si suponemos que los errores de estimación se encuentran normalmente distribuidos en torno a los valores reales, entonces la probabilidad de que el valor verdadero esté en el intervalo $F(x_p) \pm S_p$, es del 68%; mientras que la probabilidad que el valor verdadero sea $F(x_p) \pm 2S_p$, es del 95% [11,12].

Momentos de orden uno y dos

Una variable aleatoria $Z(x)$ en donde x es por ejemplo el vector bidimensional (x,y) , es una función que toma un conjunto de valores o mediciones realizadas, que siguen una cierta

distribución de probabilidad. Estas mediciones o realizaciones pueden ser cualquier variable geofísica o hidrológica. De esta forma podemos definir los dos primeros momentos de la función aleatoria como:

Momento de primer orden o esperanza matemática

i) La media

$$m[Z(x)] = E[Z(x)]$$

Momentos de segundo orden

i) La varianza

$$\text{var}[Z(x)] = E\{[Z(x) - m[Z(x)]]^2\}$$

ii) La covarianza

$$\text{cov}(x_1, x_2) = E\{[Z(x_1) - m[Z(x_1)]] [Z(x_2) - m[Z(x_2)]]\}$$

iii) El variograma

$$2\gamma(x_1, x_2) = \text{var}[Z(x_1) - Z(x_2)]$$

Si la función aleatoria es estacionaria, entonces se puede escribir:

$$\text{var}[Z(x)] = E\{[Z(x) - m[Z(x)]]^2\} = \text{cov}(0) = C(0)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(\mathbf{x} + h) - Z(\mathbf{x})]^2\}$$

$$= \text{cov}(0) - \text{cov}(h) = C(0) - C(h)$$

La relación con el correlograma

En general el correlograma (ecuación 5), se utiliza para representar el desfaseamiento en series de tiempo, pero cuando se estima en forma divariada representa la variabilidad espacial. Con esta misma notación, esta variabilidad puede modelarse con la ayuda de un correlograma, definido como [13].

$$\rho(h) = \frac{\text{cov}[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + h)]}{\sqrt{\text{var} Z(\mathbf{x}) \text{var} Z(\mathbf{x} + h)}} \quad (5)$$

donde:

h es un incremento en el espacio de dos dimensiones para los puntos

$Z(x_i)$ es una variable aleatoria donde x_i es el vector de mediciones en el punto i

En el caso isotrópico se considera que de no existir una dirección definida en el cálculo de la varianza, el incremento h representaría una distancia [14]. En este sentido, la estimación de $\rho(h)$ requiere de la estimación de las varianzas puntuales y de las medias representadas por las ecuaciones (6). Si se estudia el caso de una realización o medición única, los valores de estos estadísticos tenderían a un valor constante. Es decir, si se observa o se mide la k -ésima realización de un proceso, se deben cumplir las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} \text{var}[Z_k(\mathbf{x})] &= \text{cte} = \sigma_k^2 \\ E[Z_k(\mathbf{x})] &= \text{cte} = \mu_k \end{aligned} \quad (6)$$

Estas hipótesis asociadas con el postulado básico de la geoestadística el cual indica que $\rho(h)$ depende solamente de la distancia h y que se conoce como la hipótesis de segundo orden. De esa forma se puede escribir la función de covarianza $C(h)$ con la ecuación (7) como:

$$C(h) = \sigma_k^2 \rho(h) \quad (7)$$

La estacionariedad débil o de segundo orden es una hipótesis poco realista en ciertos casos ya que implica que los momentos de primero y de segundo orden del proceso estocástico sean invariantes en el tiempo, sin embargo es útil para comprender las bases de la geoestadística. Por

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \{ \text{var}[Z(\mathbf{x} + h) - Z(\mathbf{x})] \} = \frac{1}{2} \{ \text{var}[Z(\mathbf{x} + h)] + \text{var}[Z(\mathbf{x})] - 2 \text{cov}[Z(\mathbf{x} + h), Z(\mathbf{x})] \} \quad (10)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} [2C(0) - 2C(h)]$$

donde $C(h) = C(0) - \gamma(h)$

Por tanto, utilizando la ecuación (7) se puede escribir que: $\rho(h) = 1 - \gamma(h) / C(0)$. Cuando $C(0)$ no existe, la covarianza $C(h)$ está definida como una constante.

otro lado, el error en la estimación de la media μ_k , en la mayoría de los eventos hidrológicos puede ser de gran magnitud, por lo que es apropiado utilizar la varianza [13].

Utilizando las ecuaciones (6), considerando incrementos simples de la función aleatoria obtenemos las ecuaciones (8) y (9); a estos se les conoce como incrementos de orden cero de la función aleatoria que se suponen estacionarios de segundo orden [10].

$$E[Z(\mathbf{x} + h) - Z(\mathbf{x})] = 0 \quad \forall t ; \forall h \quad (8)$$

$$\text{var}[Z(\mathbf{x} + h) - Z(\mathbf{x})] = 2\gamma(h) \quad (9)$$

En la hidrología por lo general se consideran los procesos estacionarios de segundo orden; y en general cuando se refiere a estacionariedad, nos referimos al segundo orden. En este planteamiento la varianza de estos incrementos no depende del tiempo; únicamente del incremento sobre la distancia en el espacio (h). Si el fenómeno es isotrópico, entonces esta varianza sólo depende de h y es una función de la distancia que separa ambos puntos, independientemente de la dirección entre ellos o de h . Así, se puede decir entonces que el variograma o semivariograma está definido para este caso como $\gamma(0) = 0$. Sin embargo, si existe una varianza finita, el variograma $\gamma(h)$ definido por la ecuación (10) y el correlograma son dos formulaciones de una misma función estructural.

Varianza de una combinación lineal

Los cálculos de la varianza de las variables aleatorias manejadas en hidrología, pueden definirse normalmente como una combinación lineal definida por la ecuación (11) [15]. Si la varianza $C(0)$ o σ_k^2 de un fenómeno no está

definida o es imposible de determinar, la pregunta es: ¿se puede a pesar de todo, estimar la varianza (ecuaciones 12 y 13) de ciertas combinaciones lineales?. Para responder a esta cuestión, considérese la combinación lineal.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i Z_i \quad (11)$$

entonces:

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \lambda_i \lambda_j \text{cov}(Z_i, Z_j)$$

o bien:

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j K_{ij}$$

Que no puede ser calculada en el caso general, ya que normalmente no se conoce $C(0)$ en $(i = j)$. Sin embargo, con ayuda de la ecuación (10) se puede escribir.

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j [C(0) - \gamma_j] \quad (12)$$

Por tanto, si $C(0)$ no se conoce o no existe, la condición $\sum \lambda_i = 0$ es necesaria y suficiente para poder estimar $\text{var}(\mathbf{x})$ con ayuda de un variograma y entonces se tiene que.

$$\text{var}(\mathbf{x}) = - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} \quad (13)$$

Por otro lado, si se define el estimador estadístico de la varianza a partir de las mediciones experimentales puntuales Z_i (ecuación 14) como:

$$Z_k^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i \quad (14)$$

se puede escribir que: $\sigma^2 E_k = \text{var} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i - Z_k^* \right)$

bajo la condición de de que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i - Z_k^*$

es una combinación lineal respetando la condición de la ecuación (12) y $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ ya que el coeficiente λ_0 de Z_k^* es igual a uno [13]. En este caso, $\sigma^2 E_k$ puede estimarse con la ayuda de un variograma como: $\sigma^2 E_k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}$ con $\lambda_0 = -1$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

Lo anterior demuestra que el conocimiento del variograma permite siempre evaluar la varianza del estimador. Por otro lado, si $C(0)$ no es conocido, el cálculo de la varianza del estimador Z_k no es posible (puede ser infinita). Solamente los modelos de variograma tipo denotados por la ecuación (15) permiten calcular $C(0)$ para determinar esta varianza. Finalmente, si las parejas de coordenadas son reagrupadas en clases de igual distancia, se puede definir entonces el variograma como:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} |Z(x_i - h) - Z(x_i)|^2 \quad (15)$$

donde $n(h)$ es el número de parejas dentro de una clase o grupo con una distancia media equivalente al valor de h . Esta expresión es equivalente a la ecuación (2). Es importante remarcar que la posición de los puntos del variograma está influenciada por una fuerte variabilidad en la medición, así como de la distancia entre las mediciones. Para ejemplificar la representación gráfica de las funciones de correlación espacial, se presenta a continuación un ejemplo muy sencillo, en donde las figuras 1 a 5 muestran las funciones ajustadas a los datos de las lluvias diarias registradas de las centrales hidroeléctricas de Malpaso y Peñitas, durante el mes de octubre de 2007. Se muestra el correlograma, la función de covarianza y el variograma, para los datos omnidireccionales (caso isotrópico) y unidimensionales (el eje de las abscisas son los días del mes).

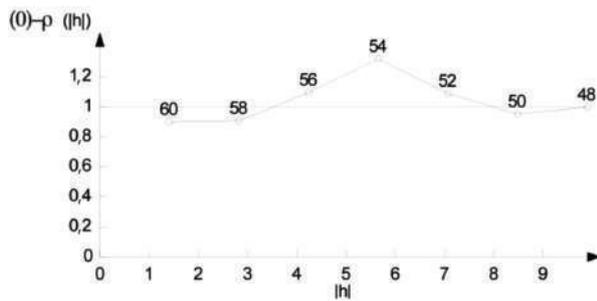


Figura 1 Correlograma para la lluvia de octubre 2007, en la C.H. Malpaso

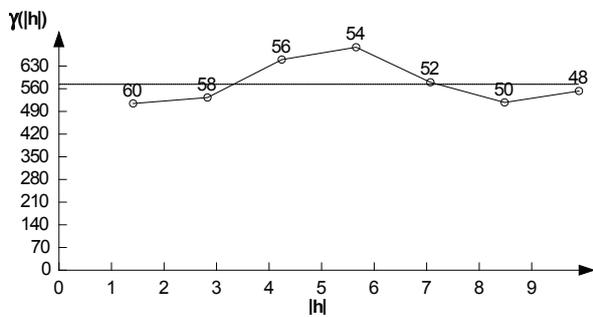


Figura 2 Covarianza para la lluvia de octubre 2007, en la C.H. Malpaso

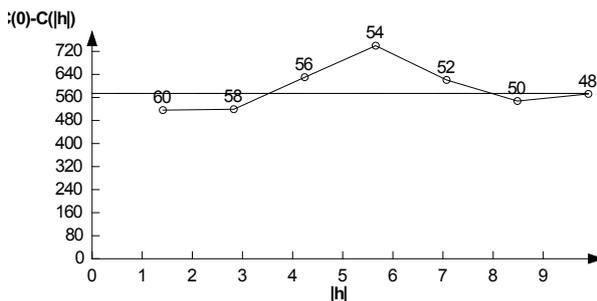


Figura 3 Variograma para la lluvia de octubre 2007, en la C.H. Malpaso

Resultados y discusión

En las figuras 1-3 la línea discontinua corresponde al valor de la varianza poblacional de la muestra y el número arriba de cada marca, denota el número de pares con el que se calcula cada punto del variograma experimental. Para las series de datos de lluvia de las centrales hidroeléctricas Malpaso y Peñitas los valores de la varianza

poblacional son 574 y 2870, respectivamente. Lo anterior nos lleva a obtener desviaciones estándar en Malpaso del orden de 24 y de 54 mm en Peñitas. Analizando el caso isotrópico y unidimensional, el eje de las abscisas representa la variación en el tiempo (mes de octubre 2007) de la precipitación ($h \rightarrow \Delta t$). El correlograma obtenido de los registros de precipitación en la C.H. Malpaso (figura 1), muestra que para un tiempo de 1 a 3,5 días y superiores a 8 días; la variación en la precipitación no es significativa. Lo que nos lleva a concluir que para un intervalo de tiempo de 4,5 días; es en donde los valores de precipitación son superiores a la varianza normal del registro histórico (tabla 1). Esto quiere decir que este intervalo presenta cambios en la varianza (alteraciones) y por consecuencia en los valores medios. Cabe mencionar que se trata de un análisis de precipitaciones extremas para un mes en particular y que para detectar una variación histórica representativa, por ejemplo, de toda la temporada lluviosa entre agosto y noviembre; es necesario analizar la serie histórica completa de las mediciones de lluvia (tabla 2). Para esta misma C.H., la función de covarianza (figura 2), revela la misma variación descrita en el correlograma; sin embargo, la función variograma (figura 3) ofrece un mayor detalle de la variación en torno al valor de la varianza (4,0 días es el intervalo que presenta alteraciones o cambios en la varianza). Esta variación entre una estructura y otra se presenta de una manera más evidente en la C.H. Peñitas (figuras 4 y 5). Un análisis del correlograma mostrado en la figura 4, nos indica que para un tiempo de 1 a 3,3 días y superior a 6,8 días; la variación en la precipitación no es significativa en la C.H. Peñitas. Por lo tanto, para un intervalo de tiempo de 3,5 días; los valores de la precipitación serán superiores a la varianza normal del evento (1,0 día menos que en la C.H. Malpaso).

El variograma (figura 5), muestra sin embargo valores diferentes para esta misma C.H. Peñitas: para un tiempo de 1 a 2,8 días y superior a 5,0 días; la variación en la precipitación no es significativa. El intervalo de tiempo de mayor variación para

eventos lluviosos corresponde a una duración de 2,2 días (tiempo de la tormenta que pudo haber causado los daños no previstos en esta zona). La diferencia en días, de los dos intervalos de lluvia críticos para la C.H. Peñitas es de (3,5-2,2) 1,3 días y considerando que se trata de una cuenca de respuesta rápida es importante considerar, entonces, si se estima la duración crítica de una tormenta utilizando la función correlograma o la función variograma. Si bien el variograma y el correlograma son dos formulaciones de una misma función estructural (varianza definida), el variograma presenta ventajas ya que al definirse con la varianza, ésta se vuelve una combinación lineal de los datos representados en él, tal como lo presenta la ecuación (11). Por lo tanto, la función estima *un error* en función de la variancia de una diferencia de cuadrados (ecuación 15), ventaja sobre el correlograma que sólo estima una correlación, pero no la variación. De lo anterior se deduce que el variograma define de una manera clara y confiable la variabilidad de la precipitación que se presentó durante el mes de octubre del 2007. Cabe recordar que para este caso isotrópico y unidimensional, la variabilidad únicamente depende del tiempo. Es decir, si el

fenómeno se considera isotrópico, entonces esta varianza sólo depende de h y entonces la ecuación (8) se cumple sólo cuando la precipitación afecta el entorno geográfico de alguna de las dos centrales hidroeléctricas en un tiempo $h \rightarrow \Delta t$.

El complemento de este análisis se lleva a cabo involucrando la variable espacial, Sin embargo, llevar a cabo un riguroso estudio espacio-temporal de las precipitaciones en esta zona para un intervalo de tiempo y espacio seleccionado, requiere considerar anisotropía en los registros de precipitación y tomar en cuenta más estaciones de medición. Cabe recordar que el objetivo del presente artículo es presentar solamente la relación entre un variograma y un correlograma para utilizar ambas formulaciones matemáticas para representar la variabilidad de mediciones hidrológicas. El ajuste de variogramas experimentales a modelos teóricos direccionales con anisotropía, será objeto de trabajos posteriores. Este análisis de la lluvia del mes de octubre de 2007 se complementa con los correlogramas y variogramas de las estaciones Sayula y Ocotepc las cuales se localizan cercanas a las Centrales Hidroeléctricas de Malapso y Peñitas y pudieran ser empleadas para un futuro estudio espacio-temporal en la zona.

Tabla 1 Duración crítica de tormentas para el mes de octubre de 2007 (en días)

<i>Estación</i>	<i>Condición</i>	$\rho(0) - \rho(h)$	$C(0) - C(h)$	$\gamma(h)$
C.H. Malpaso	N - d	1 a 3,5 y > 8,0	1 a 3,5 y > 8,0	1 a 3,2 y > 7,2
	P - d	4,5	4,5	4,0
C.H. Peñitas	N - d	1 a 3,3 y > 6,8	1 a 3,1 y > 6,6	1 a 2,8 y > 5,0
	P - d	3,5	3,5	2,2
Ocotepc	N - d	1 a 3,8 y > 6,8	1 a 3,8 y > 6,8	1 a 4,0 y > 7,0
	P - d	3,0	3,0	3,0
Sayula	N - d	1 a 2,7 > 6,1	1 a 2,8 > 6,2	1 a 2,6 > 5,7
	P - d	3,4	3,4	3,1

(N - d) No causa daños
(P - d) Posible causa de daños

Tabla 2 Duración crítica de tormentas del mes de septiembre a noviembre de 2007 (en días)

Estación	Condición	$\rho(0) - \rho(h)$	$C(0) - C(h)$	$\gamma(h)$
C.H. Malpaso	N - d	1 a 3,7 y > 7,5	1 a 3,8 y > 7,6	1 a 3,5 y > 8,0
	P - d	3,8	3,8	4,5
C.H. Peñitas	N - d	1 a 4,0 y > 6,6	1 a 4,0 y > 6,7	1 a 3,0 y > 7,0
	P - d	2,6	2,7	4,0

(N - d) No causa daños
(P - d) Posible causa de daños

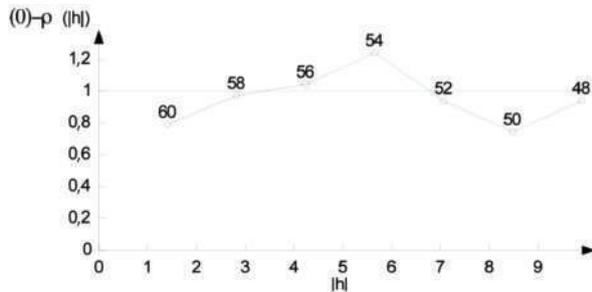


Figura 4 Correlograma para la lluvia de octubre 2007, en la C.H. Peñitas

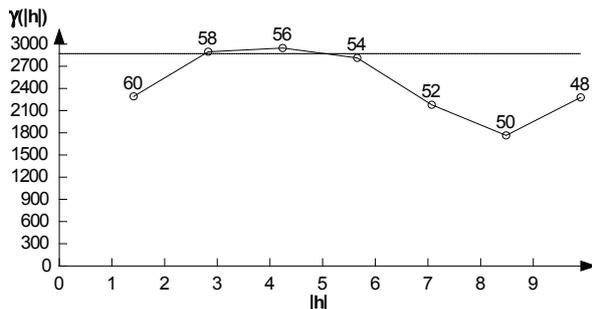


Figura 5 Variograma para la lluvia de octubre 2007, en la C.H. Peñitas

Conclusiones

Se ha presentado una introducción básica del *kriging* y del cálculo de variogramas. El variograma ha sido calculado suponiendo una condición isotrópica, es decir que la variación es la misma en todas las direcciones del plano, lo cual generalmente no ocurre. Si se considera una variación de las mediciones como función de la dirección, entonces debe definirse un variograma para cada punto de los ejes del plano es decir, una

condición anisotrópica. Es conveniente recordar que para calcular los pesos W es conveniente utilizar todos los puntos de medición, sin embargo la mayoría de los programas de cómputo disponibles utilizan sólo un conjunto de ellos. El *kriging* es el método óptimo en el sentido estadístico de interpolación y extrapolación. Es el método estimación más preciso. Contrariamente a todos los otros métodos este nos permite calcular el error de estimación de las variables. Sin embargo es conveniente agregar que muchos casos y especialmente cuando se trata de una malla regular el método de *Splines* cúbicos produce de una manera más rápida y simple, resultados muy cercanos o casi equivalentes a los obtenidos por el *kriging*. Si la precisión de resultados es lo importante el *kriging* es entonces el método privilegiado que debe utilizarse [6].

Respecto a la relación entre un correlograma y un variograma, se ha demostrado que ambas son dos formulaciones de una misma función estructural de variabilidad; sin embargo, el variograma al estar definido únicamente por la varianza, no tienen ninguna dependencia del tiempo, únicamente del incremento sobre la distancia en el espacio (h) de los puntos de medición. Es decir, el conocimiento del variograma permite siempre evaluar la varianza del estimador. Esta condición es privilegiada cuando se analizan datos espacialmente variados. El correlograma, al mostrar la correlación entre las mediciones, permite en la mayoría de los casos, analizar la independencia entre eventos, tal y como se utiliza esta formulación en problemas de hidrología estocástica; el variograma es

entonces la herramienta matemática utilizada tradicionalmente para representar la variabilidad geoestadística de una medición.

Respecto a los resultados de la duración crítica de las tormentas, se concluye que la función de covarianza y el correlograma arrojan resultados similares. El variograma que matemática y visualmente aporta un mayor número de elementos para caracterizar la variabilidad en el tiempo (para este caso $h \rightarrow \Delta t$), es la herramienta adecuada para identificar la duración crítica de las tormentas. Para el caso de la C.H. Malpaso- $\gamma(h)$, la lluvia que pudiera causar daño en el mes de octubre, tiene una duración de 4 días, mientras que si se analiza un periodo más largo de tiempo, la duración crítica de la tormenta aumenta a 4,5 días. Para el caso de la C.H. Peñitas, la duración de la tormenta crítica en octubre es de 2,2 días; y de 4,0 días si se toma el período lluvioso de septiembre a noviembre. Finalmente cabe mencionar que para la lluvia de octubre, en tres de las cuatro estaciones, la función de covarianza y el correlograma presentan sistemáticamente valores menores a los que se obtienen con la función variograma. Esto quiere decir que al tomar como estimador de la variabilidad de la lluvia en esta zona, tanto la función de covarianza y el correlograma, pudieran estar sobre-estimando la duración crítica de una tormenta que puede ocasionar daños en octubre.

Referencias

1. D. G. Krige. A statistical approach to some Basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of chem., metal. and mining*. Vol. 52. 1951. pp.119-139.
2. G. Matheron. "Principles of Geostatistics". *Economic Geol.* Vol. 58. 1963. pp.1246-1268.
3. L. S. Gandin. "Objective Analysis of Meteorological fields". *Israel Program for Scientific Translations*. N.º 1373. 1965. pp. 155-265.
4. F. B. Bretherton, R. E. Davis, C. B. Fandry. "A technique for objective analysis and design of oceanographic experiments applied to MODE-73". *Deep-Sea Res.* Vol. 23. 1976. pp. 559-582.
5. P. B. Liebelt. *An introduction to Optimal Estimation*, Ed. Addison-Wesley. Boston (MA). 1967. pp. 62-102.
6. Y. Gratton. *Le Krigeage: la méthode optimale d'interpolation spatiale*. Ed. Institut d'Analyse Géographique. Quebec (Canadá). 2002. pp. 1-4.
7. A. G. Journel, C.J. Huijbregts. *Mining Geostatistics*, Ed. Academic Press. London (UK). 1978. pp. 202-515.
8. E. H. Isaaks, R. Srivastava. *Applied Geostatistics*. Ed. Oxford University Press. New York. 1989. pp. 278-290.
9. O. Dubrule. "Comparing Splines and Kriging". *Computers and Geosciences*. Vol. 10. 1984. pp. 327-33.
10. T. Lebel, *Moyenne spatiale de la pluie sur un bassin versant: estimation optimale, génération stochastiques et gradex des valeurs extremes*. Thesis. D. I. USMG, INP. Grenoble (Francia). 1984. pp. 35-198.
11. J. C. Davis. *Statistics and Data analysis in Geology*. Ed. John Wiley and Sons. New York. 1986. pp. 125-134.
12. R. Haining. *Spatial data analysis, theory and practice*. Ed. Cambridge University Press. Cambridge (UK). 2003. pp. 181-225.
13. P. Goovaerts. "Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall". *Journal of Hydrology*. Vol. 228. 2000. pp. 113-129.
14. J. Creutin, C. Obled. "Objective analyses and mapping techniques for rainfall fields: an objective comparison". *Water Resources Research*. Vol 18. 1982. pp. 413-431.
15. E. Todini. "Influence of parameter estimation uncertainty in Kriging: Part 1 Theoretical Development". *Hydrology and Earth System Sciences*. Vol. 5. 2001. pp. 215-223.