Desarrollo de un modelo para determinar el lote óptimo de producción mediante programación no lineal y propuesta de su resolución con una hoja de cálculo

Development of a model that determines the optimal production lot size using nonlinear programming and proposal of resolution with a spreadsheet

Javier Valencia[1], María Pilar Lambán[1], Jesús Royo[1,2]*

[1]Departamento de Ingeniería de Diseño y Fabricación. Universidad de Zaragoza. Ma. de Luna 3, 50018. Zaragoza, España.

[2]Zaragoza Logistics Center, Massachusetts Institute of Technology (MIT). Calle Bari 55, Edificio Náyade 5, 50197. Zaragoza, España.

(Recibido el 20 de junio de 2013; Aceptado el 7 de abril de 2014)

Resumen

Para facilitar el esfuerzo de reducción de costos que la crisis mundial ha generado en empresas de todo el mundo, en este artículo se propone un modelo para hacer más eficiente la producción, área fundamental de la cadena de suministro. El modelo propuesto determina el lote óptimo a fabricar tomando en consideración actividades propias de diversas áreas de la cadena de suministro, muchas de la cuales no se habían considerado previamente. Con el objeto de facilitar la aplicación del modelo propuesto en diversas empresas, incluyendo Pymes, se presenta como resolver el modelo mediante una hoja de cálculo.

----------*Palabras clave:* Cadena de suministro, logística, producción, tamaño de lote, cantidad económica a ordenar (EOQ), cantidad económica a producir (EPQ), índice logístico

Abstract

To facilitate the cost reduction effort that the global crisis has led in companies around the world, in this paper we propose a model to streamline production,

* Autor de correspondencia: María Pilar Lambán, e-mail: plamban@unizar.es; teléfono: + 34 976 761890 (M. Lambán)

a key area of the supply chain. The proposed model determines the optimal lot size considering activities of different areas of the supply chain, many of which were not previously considered. In order to facilitate the implementation of the proposed model in several companies, including SMEs, we show how to solve this model with a conventional spreadsheet.

----------*Keywords:* Supply chain, logistics, production, lot size, economic order quantity (EOQ), economic production quantity (EPQ), logistic index

Introducción

El ahorro en costos es una de las claves para el éxito y la productividad de cualquier empresa [1], por lo que la optimización de la gestión de la cadena de suministro ha adquirido una gran importancia [2], más aún en tiempos de crisis económica como el actual. Existen diversas iniciativas en pro de reducir de los costos de las empresas: Reducir la plantilla, externalizar operaciones, optimizar procesos, entre otras; en este trabajo nos enfocamos en la optimización de un proceso clave para cualquier empresa productiva, la determinación del lote óptimo de producción.

En este artículo se propone un nuevo modelo para determinar la cantidad óptima a fabricar tomando en cuenta diversos aspectos de la cadena de suministro de un producto. El modelo propuesto va más allá de las soluciones analíticas, las cuales si bien resultan muy valiosas por su aplicabilidad, requieren de la cumplimentación de diversos supuestos los cuales no necesariamente pueden satisfacerse en situaciones "reales".

El modelo aquí propuesto propone una formulación de programación no lineal la cual determina valores muy cercanos a los óptimos reales, no únicamente porque toma en cuenta múltiples elementos claves de la gestión de la cadena de suministro sino también porque incorpora diversas restricciones las cuales no pueden ser incorporadas en modelos analíticos, como lo es el reconocido modelo EOQ propuesto en [3].

A pesar de que los problemas de programación no lineal pueden proporcinar soluciones más precisas que las determinadas a partir de otras metodologías, estos modelos no están tan ampliamente difundidos debido entre otras cosas a que su resolución no es sencilla y en diversas empresas, sobre todo en Pymes, no se cuenta con los recursos necesarios para resolver este tipo de problemas, entre otras cosas porque en muchos de ellos se requiere de programación computacional. Es por esto y para facilitar la aplicación del modelo aquí propuesto que como una contribución adicional de este trabajo se detalla un método para resolver la formulación aquí planteada a partir de una herramienta al alcance de practicamente todas las empresas, incluyendo las más pequeñas, *Microsoft Excel*©.

La importancia de determinar la cantidad óptima a producir, o comprar, es tal que el modelo EOQ es utilizado en múltiples empresas en todo el mundo [4, 5]. Más aún, el trabajo donde ser presentó la versión dinámica de este modelo [4] fue elegido como uno de los 10 trabajos más influyentes de "*Management Science"* de los últimos 50 años (1954-2004) [5].

El modelo EOQ y su versión extendida EPQ que se propusiera en [6], optimiza la producción al minimizar los costos fijos de fabricación, o de compra, y de mantener el inventario, tal como se detalla en la figura 1.

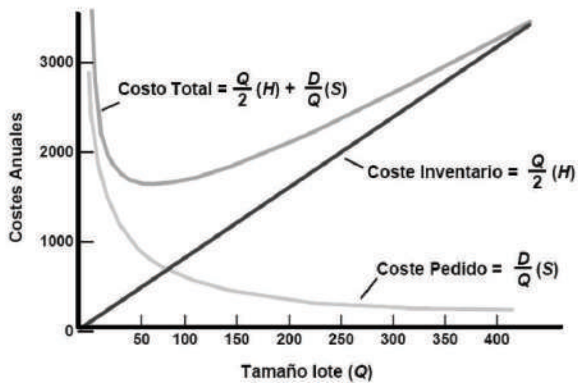

Figura 1 El modelo EOQ. Adaptada de [2]

En dicho modelo se procura minimizar el costo total a partir de los siguientes datos: 1) El tamaño del lote (Q), 2) El costo unitario de mantener el inventario (H), 3) La demanda (D) y 4) El costo fijo por pedido a realizar (S). Este modelo, que no incorpora restricciones, calcula la cantidad óptima a producir derivando e igualando a cero la función costo total, obteniéndose la ecuación (1):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \qquad (1)$$

Dicho modelo sigue siendo muy utilizado hoy en día aunque diversos autores piensan que puede resultar demasiado simplista y por lo tanto impreciso [7]. Es por esto que en el modelo propuesto en este trabajo se han incorporado múltiples factores del proceso productivo que influyen en el costo total y por ende en el lote óptimo a fabricar. Si bien varios de estos factores ya se han tratado en modelos analíticos (e.g. [7, 8]) no se han incorporado –más que de manera aislada– en modelos basados en programación lineal o no lineal, lo que compone una de las principales contribuciones de este artículo.

Dos características del presente modelo son de particular interés: 1) El suponer que los tiempos de producción pueden no ser constantes sino que siguen una distribución de Probabilidad Normal, 2) El incorporar el índice logístico, inductor de costo propuesto en [9, 10] el cual ajusta los costos de procesos logísticos a referencias concretas.

La motivación para considerar los tiempos de producción variables se encontró en [11, 12] al estipularse la importancia de considerar ciertos costos que tradicionalmente se suponen constantes, tales como la demanda o las tasas de fabricación [13], como variables para obtener óptimos más próximos a los reales. A su vez, la necesidad de incorporar el índice logístico en el modelo propuesto surge de [9] al establecerse que muchas empresas no cuentan con información precisa de sus costos logísticos por tipologías de productos concretas.

Previamente a la realización de este trabajo se contabilizan otros esfuerzos tanto analíticos como no analíticos para determinar valores óptimos de producción más precisos que los encontrados con el modelo EOQ. En [14] se incorporó la necesidad de contar con restricciones de espacio en el almacenamiento de los productos, como se hizo en el presente modelo, a su vez se consideró que la demanda no es constante sino que sigue un comportamiento difuso. En [15] se propuso un modelo de programación geométrica para establecer el lote óptimo de producción en un proceso productivo con fallos de calidad. En el modelo aquí expuesto se da un paso más al considerarse que a pesar de que los elementos no satisfactorios son retrabajados no se logra alcanzar que la totalidad de los productos cumplan las requisiciones de calidad por lo que una parte se convierte en chatarra, esta idea fue propuesta por primera vez en [8] aunque para un modelo analítico.

Otro trabajo relacionado con el aquí expuesto, aunque para sistemas "multiproducto" se presenta en [16], en dicho artículo los autores establecen un método para determinar valores óptimos de producción mediante programación incierta. Recientemente, se presentó en [8] un modelo para determinar lotes óptimos de produccion incorporando inspecciones muestrales de calidad. En el modelo aquí propuesto también se consideran inspecciones de calidad aunque se asume que las inpecciones se realizan al total de los productos.

Un modelo que incluya de forma integrada prácticamente la totalidad de los factores propuestos por los autores expuestos anteriormente no se ha realizado más que en problemas analíticos, siendo esta la principal aportación de esta investigación. Más aún, en este trabajo se va más allá al incorporar en el modelo una serie de características que no se han considerado anteriormente en un modelo no analítico, en este sentido se cuentan la incorporación del índice logístico, el desarrollo de restricciones de espacio en el almacenaje, la incorporación de tiempos variables de producción para la misma referencia y el detalle de cómo resolver el modelo propuesto a través de una hoja de cálculo.

El resto del artículo se compone de lo siguiente: La sección siguiente describe el proceso productivo estudiado, después se detalla el modelo, posteriormente se muestra mediante un problema resuelto cómo solucionar el modelo mediante *Microsoft Excel©*, finalmente se presentan algunas conclusiones y posibles líneas de investigación futuras.

El proceso productivo

El objetivo de este trabajo consiste en desarrollar un modelo de optimización a través de un problema de programación no lineal para determinar el costo mínimo de fabricación del proceso estudiado, el cual se describe en esta sección.

El proceso productivo estudiado incluye diversos aspectos claves de la gestión de la cadena de suministro, algunos de las cuales ya habían sido tratadas por otros autores como se estableció previamente. Este proceso ha sido seleccionado tanto porque es una forma común de trabajar en múltiples organizaciones como porque debido la amplitud de los factores que integra puede trasladarse con relativa sencillez a otros procesos productivos.

El objetivo del modelo es determinar el tamaño del lote que minimice los costos totales de producción del proceso que se ilustra en la figura 2, dicho proceso consiste en lo siguiente: Se cuenta tanto con la capacidad productiva como con la materia prima suficiente para satisfacer la demanda existe –y constante– de una única referencia. Previamente determinada la cantidad a fabricar (Q) se pone en marcha el proceso para transformar la materia prima, una vez finalizada toda la transformación se realiza una inspección del cien por ciento de los productos fabricados para determinar cuáles de ellos son satisfactorios y cuáles deben reprocesarse, lo que se hace inmediatamente y en el mismo sistema. Finalizado el reproceso se determina, a partir de una segunda inspección, qué productos ya son satisfactorios y cuáles se han convertido en chatarra. Una vez concluida la segunda inspección todos los productos que cumplen con las especificaciones de calidad son trasladados al almacén, el cual tiene un espacio limitado y conocido, a su vez que los que se han convertido en chatarra reciben una disposición adecuada. Por último, los productos almacenados se entregan en lotes fijos al cliente utilizándose los medios de transporte que por sus dimensiones sean necesarios.

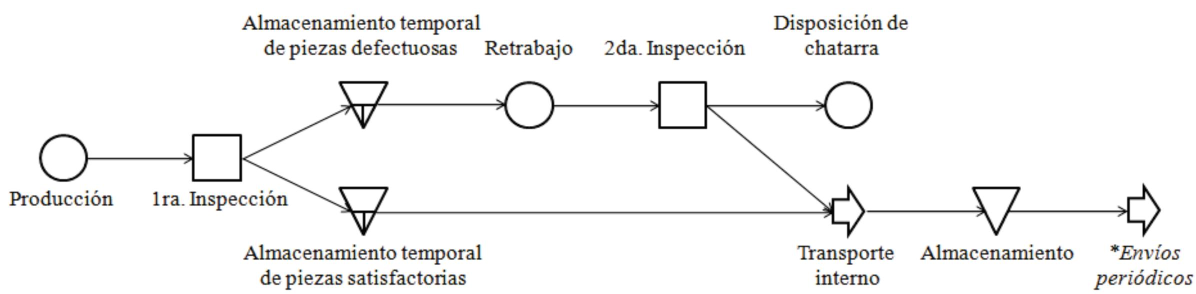

Figura 2 El proceso productivo

De lo expuesto anteriormente se desprende que en el presente modelo se deban tomar en cuenta los costos de: 1) Aprovisionamiento, 2) Producción. Incluye el costo fijo de "set up" y los variables de producción y de reproceso, 3) Inspección, 4) Almacenamiento. Incluye el costo del almacenaje del total de productos durante el proceso, el de los productos satisfactorios y no satisfactorios durante el reproceso y el del total de productos satisfactorios durante el período de entregas, 5) Disposición de la chatarra, 6) Mantenimiento preventivo, 7) Transporte. Incluye el costo del interno y del externo.

Muchos de estos costos, tales como el de mantenimiento o inspección, no se habían tomado en cuenta previamente en modelos de lote óptimo no analíticos lo que genera que los valores obtenidos mediante la formulación propouesta sean más próximos a los óptimos reales. Así mismo, en este trabajo se contempla por primera vez en un modelo de estas carácterísticas la posibilidad de que los tiempos de producción de un producto bajo las mismas condiciones no sean constantes sino que se ha supuesto varían de acuerdo a una distribución que está presente en muchos aspectos de la vida "real" como es la Distribución Normal. Otra aportación de este trabajo es la incorporación del "Índice logístico" el cual fuera introducido en [9] y en [10] como un inductor de costo que permite ajustar los costos de almacenamiento y de transporte de la referencia a analizar.

El modelo propuesto

Los modelos como el aquí propuesto buscan minimizar el costo de cierto proceso productivo, en este caso el ilustrado en la figura 2, tomando en consideración diversos costos tanto de fabricación como de otras áreas de la cadena de suministro.

Para lograr lo anterior se requiere de establecer la función costo total del proceso, en los modelos analíticos una vez que se cuenta con dicha función ésta se deriva para determinar el tamaño del lote que minimiza el costo total. Esta forma de establecer los costos mínimos tiene el inconveniente de no tener en cuenta las restricciones del proceso, lo que puede generar que las soluciones halladas sean o bien no precisas o bien no aplicables.

En el modelo propuesto la función costo se obtuvo de analizar la sección anterior y del estudio del comportamiento del inventario que se detalla en la figura 3, para minimizar dicha función no se deriva sino que se plantea un problema de programación no lineal.

En la figura 3 se muestra como durante el tiempo correspondiente al proceso (T_1) el total de productos va en aumento a una tasa variable. Una vez finaliza T_1 el inventario de productos satisfactorios alcanza el valor H_1. En T_2 los productos defectuosos se reprocesan también a ritmo variable para finalmente alcanzarse el valor del inventario H. Por último, el inventario decrece a un ritmo constante y periódico durante el período de entregas T_3.

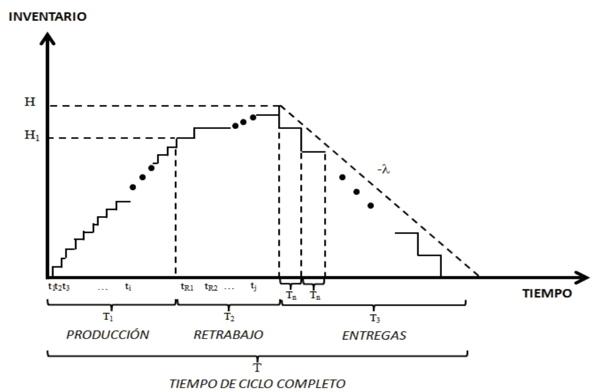

Figura 3 El volumen del inventario

Dado que en este trabajo se ha buscado proporcionar un modelo lo suficientemente robusto que pueda representar de manera fehaciente un proceso productivo real es natural que para su desarrollo se requieran una importante cantidad de variables, mismas que se detallan en la tabla 1. La nomenclatura empleada guarda similitudes con la utilizada en [7].

Tabla 1 Las variables del modelo

	PROCESO		*COSTO*
λ	Demanda anual.	K	Costo fijo de producción.
P	Tasa de producción para el ciclo estudiado.	C	Costo de producción por unidad de tiempo.
x	Porción de productos defectuosos.		
P_1	Tasa de reproceso de los productos defectuosos.	C_R	Costo de reproceso por unidad de tiempo.
Q_1	Porción de productos convertidos en chatarra.	C_S	Costo de manejar la chatarra producida.
Q	Tamaño del lote.	r	Costo de la materia prima por producto.
n	Entregas a realizar.		
I_{logA}	Índice logístico de almacenamiento.	K_1	Costo fijo por envío
I_{logT}	Índice logístico de transporte.	h_1	Costo de almacenaje unitario por tiempo durante el reproceso, será el costo medio si el índice logístico no es 1.
H_1	Inventario al finalizar la producción inicial.		
H	Inventario máximo tras el reproceso.		
$CapA_1$	Capacidad de almacenaje de prod. satisfactorios en el proceso.	h	Costo de almacenaje unitario por tiempo, será el costo medio si el índice logístico no es 1.
$CapA_2$	Capacidad de almacenaje de prod. satisfactorios durante el reproceso.		
$CapA_3$	Capacidad de almacenaje de prod. defectuosos durante el reproceso.	C_T	Costo unitario de transporte al cliente.
$CapA_4$	Capacidad de almacenaje de productos satisfactorios durante la entrega	C_{TI}	Costo unitario de transporte interno.
T_1	Tiempo de producción.		
T_2	Tiempo de reproceso.		
T_3	Tiempo del período de envíos.	M	Costo unitario de mantenimiento.
μ_{tp}	Tiempo medio unitario de producción.		
μ_{tr}	Tiempo medio unitario de reproceso.		
T	Tiempo del ciclo.	N	Costo unitario de inspección.
t_i	Tiempo unitario de fabricación del prod. i.		
t_j	Tiempo unitario de reproceso del prod. j		
Cap_T	Capacidad del transporte externo a utilizar.		
N_T	Total de medios de transporte por envío.		

Una aportación de este trabajo es la inclusión del índice logístico en un modelo de lote óptimo que no se resuelva por medios analíticos. Este índice es un valioso inductor de costo el cual permite ponderar el costo de ciertos procesos logísticos a un tipo de producto concreto. En este modelo se ha modificado la forma de obtención del índice propuesto en [8], variándose las ecuaciónes (2) y (3) para calcularse con respecto a las dimensiones de la media de los productos involucrados en el proceso logístico. El índice logístico (I_{log}) como se emplea en este modelo se determina a partir de la siguiente formulación:

$$I_{peso} = \frac{Peso\ de\ la\ referencia}{\mu_{peso\ de\ las\ referencias}} \tag{2}$$

$$I_{Vol} = \frac{Volumen\ de\ la\ referencia}{\mu_{volumen\ de\ las\ referencias}} \tag{3}$$

Siguiendo a [9] se mantiene (4) y (5),

$$I_{log} = \alpha I_{peso} + \beta I_{vol} \tag{4}$$

α y β son coeficientes establecidos para cada proceso y los cuales cumplen:

$$1 = \alpha + \beta \tag{5}$$

Si se conoce con precisión los costos logísticos de la referencia a estudiar o bien se fabrican productos homogéneos el I_{log} debe ser igual a 1 para que el lote sea el adecuado.

En el modelo propuesto se introdujo una característica común de muchos procesos productivos y la cual previamente no se había incorporado en modelos que se resuelvan mediante programación lineal o no lineal, dicha característica es la posibilidad de que las tasas de producción de la referencia estudiada no sean constantes sino que se ha supuesto siguen una distribución muy importante en los procesos industriales [16], la Normal.

Comentado lo anterior se establece la función costo total del proceso estudiado, lo que se hace en (6), la cual incluye los costos detallados en la sección *el proceso productivo*.

$$\begin{gathered} TC(Q) = rQ + K + C\sum_{i=1}^{Q} t_i + C_R\sum_{j=1}^{Qx} t_j + C_s x\theta_1 Q + nN_T K_1 + I_{\log T}[C_T H + C_{TI} H] + \\ I_{\log A}\left[h\sum_{i=1}^{Q-1} t_{i+1} i + h_1\sum_{j=1}^{Qx}(t_j)(Qx-j) + hH_1\sum_{j=1}^{Qx} t_j + h\sum_{j=1}^{Qx-1} t_{j+1} j + h\left(\frac{n-1}{2n}\right)HT_3\right] + \\ MQ + MQx + NQ + NxQ \end{gathered} \tag{6}$$

Como se puede apreciar en (6) para resolver esta ecuación se requiere de poder encontrar algún método para poder tratar los tiempos variables de producción, ya que en esta forma no se puede resolver la ecuación. En este trabajo se empleó la esperanza matemática para dar paso a una nueva ecuación la cual no requiera de conocer cada uno de los tiempos de fabricación y de reproceso sino que, al suponerse una distribución normal, basta con conocerse sus respectivas medias. La idea de emplear la esperanza matemática para afrontar valores variables fue propuesta en [7] aunque en dicho trabajo no se trataron tiempos de producción sino proporción de fallos. Mediante la aplicación de la esperanza matemática, cuyo cálculo se proporciona en el apéndice I, se estableció la función costo esperado del ciclo, la cual se muestra en (7) y la que habrá de ser la función optimizar.

$$\begin{gathered} E[TCU(Q)] = \frac{\lambda r}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda K}{Q(1-\theta_1 x)} + \frac{\lambda C\mu_{tp}}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda C_R x\mu_{tr}}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda C_s x\theta_1}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda n\left[\frac{Q(1-\Theta x)}{nCap_T}\right]K_1}{Q(1-\theta_1 x)} + \lambda I_{\log T}(C_T + C_{TI}) + \\ \frac{\lambda I_{\log A}}{1-\theta_1 x}\left[\frac{Q-1}{2}h\mu_{tp} + h_1\left(Q\mu_{tr}x^2 - \mu_{tr}x\frac{Qx+1}{2}\right) + Qh(1-x)x\mu_{tr} + h\mu_{tr}x\frac{Qx-1}{2} + \right. \\ \left. h\frac{n-1}{2n}(1-\theta_1 x)\ (T - Q\mu_{tp} - Qx\mu_{tp})\right] + \frac{\lambda(M+Mx+N+Nx)}{1-\theta_1 x} \end{gathered} \tag{7}$$

Considerando lo anterior e incluyendo las restricciones de espacio de almacenamiento se obtiene el siguiente problema de programación no lineal:

$$Min\text{: } E[TCU(Q)] = \frac{\lambda r}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda K}{Q(1-\theta_1 x)} + \frac{\lambda C\mu_{tp}}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda C_R x\mu_{tr}}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda C_S x\theta_1}{1-\theta_1 x} + \frac{\lambda n\left[\frac{Q(1-\theta x)}{nCap_T}\right]K_1}{Q(1-\theta_1 x)} + \lambda I_{\log T}(C_T + C_{TI}) + \frac{\lambda I_{\log A}}{1-\theta_1 x}\left[\frac{Q-1}{2}h\mu_{tp} + h_1\left(Q\mu_{tr}x^2 - \mu_{tr}x\frac{Qx+1}{2}\right) + Qh(1-x)x\mu_{tr} + h\mu_{tr}x\frac{Qx-1}{2} + h\frac{n-1}{2n}(1-\theta_1 x)(T - Q\mu_{tp} - Qx\mu_{tp})\right] + \frac{\lambda(M+Mx+N+Nx)}{1-\theta_1 x} \quad (7)$$

S. A.

$I_{logA}\ Q(1\text{-}x) \leq CapA_1$

$I_{logA}\ Q(1\text{-}x) \leq CapA_2$

$I_{logA}\ Q(x) \leq CapA_3$

$I_{logA}\ Q(1\text{-}\theta x) \leq CapA_4$

Para resolver un problema de estas características basta con determinar, a partir de un programa computacional iterativo, el valor de Q que minimice la función E[TCU(Q)] a su vez que cumpla las restricciones del problema las cuales, como se aprecia, corresponden al espacio disponible de los diferentes lugares donde se almacenarán los productos.

Resolución un problema con una hoja de cálculo convencional

Como se mencionó anteriormente un problema de programación no necesariamente es de fácil resolución, lo que puede dificultar la adopción del modelo en ciertas empresas, sobre todo en Pymes. Es por esto que como una contribución adicional de este trabajo se detalla en la presente sección cómo puede resolverse la formulación planteada mediante una herramienta que está a disposición de prácticamente todas las empresas: *Microsoft Excel*©. Para mostrar este método de resolución se emplea un problema resuelto el cual guarda ciertas similitudes con uno presentado en [7].

El proceso productivo cuyo tamaño de lote óptimo se habrá de calcular cuenta con ciertos valores los cuales se presentan en la figura 4, ya plasmados en una hoja de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		PROCESO		COSTO			RESTRICCIONES	
3		l	3400	K	$ 20.000,00		0,7*Q*(1-0,15) ≤ 3000	
4		P	60000	C	$ 200,00		0,7*Q*(1-0,15) ≤ 2000	
5		x	0,15	C_R	$ 120,00		0,7*Q*x ≤ 2000	
6		Θ_1	0,1	C_S	$ 20,00		0,7*Q*(1-0,1*0.15) ≤ 10000	
7		P_1	2200	K_1	$ 4.350			
8		n	4	C_T	$ 0,10			
9		μ_{tp}	0,5	C_{TI}	$ 0,05		RESTRICCIONES (YA DESPEJADA Q)	
10		μ_{tr}	0,8	h_1	$ 0,0023		Q≤	5042,0
11		I_{logA}	0,7	h	$ 0,0046		Q≤	3361,3
12		I_{logT}	0,5	M	$ 0,05		Q≤	19047,6
13		T	2,35	N	$ 0,01		Q≤	16806,7
14		Cap_T	1000	r	$ 10,00			
15		$CapA_1$	3000					
16		$CapA_2$	2000				Q*=	
17		$CapA_3$	2000				E[TCU(Q)]=	
18		$CapA_4$	10000					

Figura 4 Los valores del problema resuelto y su acomodo en la hoja de cálculo

El objetivo del problema es determinar el valor de Q que minimice la función E[TCU(Q)] a su vez que se cumplen todas las restricciones. Primeramente se debe plasmar la función (7) en la celda H17, dicha función queda como se detalla en (8) debido a la posición de cada uno de los valores en la hoja de cálculo:

=+C3*E14/(1-C6*C5)+C3*E3/(H16*(1-C6*C5))+C3*E4*C9/(1-C6*C5)+C3*E5*C5*C10/(1-C6*C5)+C3*E6*C5*C6/(1-C6*C5)+C3*C8*REDONDEAR.MAS((H16*(1-C6*C5)/(C8*C13)),0)*E7/(H16*(1-C6*C5))+C3*C12*(E8+E9)+(C3*C11/(1-C6*C5))*((H16-1)*E11*C9/2+E10*(H16*C10*C5^2-C10*C5*(H16*C5+1)/2)+H16*E11*(1-C5)*C5*C10+E11*C10*C5*(H16*C5-1)/2+E11*(C8-1)*(1-C6*C5)*(((H16/C3)*(1-C5*C6))-H16*C9-H16*C5*C9)/(2*C8))+C3*(E12+E12*C5+E13+E13*C5)/(1-C6*C5) (8)

Para minimizar el valor de E[TCU(Q)] se utiliza la herramienta *Solver* la cual se debe habilitar en el menú *Opciones de Excel* el cual se encuentra en el *Botón de Office*. Ya habilitado *Solver* se puede resolver el problema de programación no lineal, tal como se detalla en la figura 5, donde se muestra la ventana *Parámetros de Solver*. Como se aprecia, las restricciones del problema se deben ingresar ya habiendo despejado la variable Q.

Figura 5 Parámetros de *Solver* para el problema resuelto

A partir de los datos de entrada dados, y con los valores estándar de la subventana *Opciones de Solver:* 1) Tiempo: 100 segundos, 2) Iteraciones: 100, 3) Presición: 0,000001, 4) Tolerancia: 5% y 5) Convergencia: 0,0001, se obtuvieron las soluciones que se muestran en la figura 6 y las cuales son plasmadas en las celdas correspondientes mediante *Solver*.

	F	G	H
15			
16		Q*=	3361
17		E[TCU(Q)]=	$ 475,059.71

Figura 6 La solución encontrada mediante *Solver*

La solución encontrada corresponde al valor máximo que la variable a determinar Q* podía alcanzar y el cual estaba determinado por una de las restricciones con las que contaba el problema. De no contarse con restricciones, es decir de suponerse un espacio de almacenamiento suficientemente grande para albergar un lote cualquiera, el tamaño de Q* –determinado con *Solver* bajo los mismos parámetros– es de 12,146 productos, lo que muestra el grado de importancia que tiene incoporar en modelos de optimización restricciones, como se hizo en este trabajo, ya que de otra manera en ciertos procesos la solución encontrada mediante procesos analíticos puede no ser aplicable en la vida "real".

Conclusiones

En este trabajo se propone un nuevo modelo para determinar el lote óptimo a producir, el cual puede generar importantes disminuciones de costos.

Para apróximar los valores alcanzados mediante el modelo propuesto a los óptimos reales se incluyeron en él múltiples elementos de la cadena de suministro muchos de los cuales no se habían incorporado previamente en trabajos que sean resueltos a partir de programación lineal o no lineal. Entre las incorporaciones más valiosas del modelo se encuentran el utilizar el índice logístico para ajustar los costos de los procesos logísticos a la referencia estudiada así como considerar los tiempos de producción variables.

Se presentó la formulación matemática necesaria para determinar el lote óptimo del proceso productivo estudiado, el cual puede ser facilmente extrapolable a otros procesos. Más aún, para facilitar la implementación del modelo en diversas empresas, incluyendo pymes, se mostró como dicha formulación puede ser resulta a través de *Microsoft Excel*©.

La importancia de determinar el lote óptimo a partir de un modelo de estas características se estableció mediante un problema resuelto en el cual se mostró como la cantidad óptima a producir puede variar de forma significativa si se calcula de forma analítica o bien con una que posibilite la incorporación de restricciones. Esto sin embargo no desmerece la valía de los modelos analíticos ya que su aplicación en determinados procesos productivos resulta muy importantes tanto a nivel teórico como aplicado.

A pesar de modelo aquí propuesto posee ciertas fortalezas aún existen diversas líneas de investigación que de desarrollarse lo convertirían en una herramienta más completa y precisa. Entre las más importantes se encuentran el suponer que los tiempos productivos siguen otras funciones de probabilidad diferentes a la normal así como el trabajar con otros elementos del proceso productivo variables. Trabajos donde se validara el modelo aquí expuesto en entornos reales también serían incorporaciones muy valiosas a la literatura.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores anónimos del presente trabajo por los comentarios vertidos respecto al mismo y los cuales han contribuido a mejorar su calidad. A su vez, agradecen al Centro Español de Logística el reconocimiento otorgado en 2010 a la mejor Tesis Doctoral en logística, de donde surgió parte de este artículo. J. Valencia agradece al CONACYT y al CONCIYTEY la beca de estudios doctorales otorgada.

Apéndice I

Para dar paso a la ecuación (7) a partir de la (6) se hicieron las siguientes modificaciones y consideraciones:

1) El número de transportes a utilizar (N_T) por envío se calculó en (9) al redondear al entero inmediato superior el resultado de dividir el total de productos a enviar durante el ciclo entre el producto del número de envíos por la capacidad máxima de cada transporte.

$$N_T = \left\lceil \frac{Q(1-\Theta x)}{nCap_T} \right\rceil \qquad (9)$$

2) El costo del almacenaje durante los n períodos de entrega se obtuvo de la sumar los n-1 *rectángulos de costo* de base T_n que se muestran en la figura 3, como se ilustra en (10).

$$\frac{HT_3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)h = \frac{Hh(n-1)T_3}{2n} \qquad (10)$$

3) Se sustituyó el valor de T_3 por su equivalente, como se ve en (11).

$$T_3 = T - \sum_{i=1}^{Q} t_i - \sum_{j=1}^{Qx} t_j \qquad (11)$$

4) Se substituyeron los valores de H, H_1 y T_3 y para obtenerse (12).

$$TC(Q) = Qr + K + C\sum_{i=1}^{Q} t_i + C_R\sum_{j=1}^{Qx} t_j + QC_s x\theta_1 + n\left\lceil \frac{Q(1-\Theta x)}{nCap_T} \right\rceil K_1 + QI_{\log T}(C_T + C_{TI})(1-\theta_1 x) +$$
$$I_{\log A}\Big[h\sum_{i=1}^{Q-1} t_{i+1} i + h_1\sum_{j=1}^{Qx}(t_j)(Qx-j) + Qh(1-x)\sum_{j=1}^{Qx} t_j + h\sum_{j=1}^{Qx-1} t_{j+1} j + \qquad (12)$$
$$Qh\left(\frac{n-1}{2n}\right)(1-\theta_1 x)\left(T - \sum_{i=1}^{Q} t_i - \sum_{j=1}^{Qx} t_j\right)\Big] + Q(M + Mx + N + Nx)$$

5) Se calculó el costo esperado del ciclo con (13), teniéndose en consideración (14).

$$E[TCU(Q)] = \frac{E[TC(Q)]}{E[T]} \qquad (13)$$

$$T = \frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x) \qquad (14)$$

Teniendo en cuenta los tiempos de producción y de reproceso como funciones de tipo normal con media μ_{tp} y μ_{tr} y teniendo en cuenta las consideraciones y modificaciones establecidas se encontró la función costo esperado, misma que se detalla en (15).

$$E[TCU(Q)] = \frac{Qr}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{K}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{QC\mu_{tp}}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{QC_R x\mu_{tr}}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{QC_S x\theta_1}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{n\left[\frac{Q(1-\Theta x)}{nCap_T}\right]K_1}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)} + \frac{QI_{\log\ T}}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)}(C_T + C_{TI})(1-\theta_1) +$$

$$\frac{I_{\log\ A}}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)}\left[\frac{Q(Q-1)}{2}h\mu_{tp} + h_1\left(\mu_{tr}Q^2x^2 - \mu_{tr}Qx\frac{(Qx+1)}{2}\right) + Qh(1-x)(Qx)(\mu_{tr}) + \right. \tag{15}$$

$$\left. h\mu_{tr}(Qx)\frac{(Qx-1)}{2} + Qh\left(\frac{n-1}{2n}\right)(1-\theta_1 x)(T - Q\mu_{tp} - Qx\mu_{tp})\right] + \frac{Q(M+Mx+N+Nx)}{\frac{Q}{\lambda}(1-\theta_1 x)}$$

Finalmente, tras algunas simplificaciones a la ecuación (15) se obtiene la función (7).

Referencias

1. A. Baykasoglu, V. Kapanoglu. "Developing a service costing system and an application for logistics companies". *Int. J. of Agile Manufac*. Vol. 9. 2006. pp. 13-18.
2. E. Gutiérrez, H. Fuquen, D. Hernández. "Planificación integrada de producción y distribución para un conglomerado industrial". *Rev. Fac. Ing. Universidad de Antioquia*. Vol. 53. 2010. pp. 88-105.
3. F. Harris. What quantity to make at once. In *The Library of Factory Management*, *Operation and Costs*. 1st ed. Ed. A. W. Shaw Company. Chicago, USA. 1915. pp. 47-52.
4. H. M. Wagner, T. M. Whitin. "Dynamic version of the economic lot size model". *Management Science*. Vol. 5. 1958. pp. 89-96.
5. W. Hopp. "Ten most influential papers of Management Science's first fifty Years". *Management Science.* Vol. 50. 2004. pp. 1763.
6. E. Taft. "The most economical production lot". *The Iron Age.* Vol. 101. 1918. pp. 1410-1412.
7. P. Yuan, L. Shang, C. Chun, C. Huei. "Mathematical modeling for determining the replenishment policy for EMQ model with rework and multiple shipments". *Mathematical and computer modeling*. Vol. 54. 2011. pp. 2165-2174.
8. L. Moussawi-Haidar, M. Salameh, W. Nasr. "An instantaneous replenishment model under the effect of a sampling policy for defective items". *App. Mathematical Modelling*. Vol. 37. 2013. pp. 719-727.
9. M. Lambán. *Determinación de costos de procesos de la Cadena de Suministro e influencia de factores productivos y logísticos.* Tesis (Ph.D.). Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España. 2010. pp. 1-380
10. M. Lambán, J. Royo, J. Valencia, L. Berges, D. Galar. "Modelo para el cálculo del costo de almacenamiento de un producto". *Dyna*. Vol. 179. 2012. pp. 23-32.
11. M. Darwis. "EPQ models with varying costs". *IJPE.* Vol. 113. 2008. pp. 297-306.
12. V. Pando, J. García, L. San José, J. Sicilia. "Maximizing profits in an inventory model with both demand rate and holding cost per unit time dependent on the stock level". *Computers & Industrial Engineering.* Vol. 62. 2012. pp. 599-608.
13. H. Laniado, D. Castañeda, D. García. "Aplicación del orden de mayorización a un problema de producción-inventario". *Rev. Fac. Ing. Universidad de Antioquia.* Vol. 39. 2007. pp. 112-117.
14. T. Roy, M. Maiti. "A fuzzy EOQ model with demand-dependent unit cost under limited storage capacity". *EJOR.* Vol. 99. 1997. pp. 425-432.
15. N. Mandal, T. Kumar, M. Maiti. "Inventory model of deteriorated items with a constraint: A geometric programming approach". *EJOR.* Vol. 173. 2006. pp. 199-210.
16. A. Taleizadeh, S. Niaki, R. Nikousokhan. "Constraint multiproduct joint-replenishment inventory control problem using uncertain programming". *App. Soft Comp*. Vol. 11. 2011. pp. 5143-5154.