Modelo de inventario determinístico con tasa de demanda lineal

Determinist inventory model with linear demand rate

*Henry Laniado Rodas**, *Jamer Carmona López*

Grupo de Investigación de Econometría Aplicada, Facultad de Ciencias Económicas, Bloque 13, oficina 410, Universidad de Antioquia, Calle 67 # 53-108, Medellín, Colombia

(Recibido el 27 de agosto de 2008. Aceptado el 26 de mayo de 2009)

Resumen

En este artículo se examina un modelo de inventario determinístico con tasa de demanda lineal. Se supone que en cada instante T_{j-1} el nivel de inventario se hace cero e inmediatamente se repone con un pedido de tamaño S_j, para $j = 1,..., (m - 1)$, el cual permite satisfacer la demanda hasta el siguiente instante de reposición T_j. El resultado principal es la determinación de los tiempos óptimos de reposición T_{j-1} que minimizan el costo total en el horizonte de planificación.

----- *Palabras clave:* Inventario determinístico, reposición, tasa de demanda lineal, horizonte de planificación.

Abstract

In this paper we examine a deterministic inventory model with a linear demand rate. We suppose that in each time T_{j-1} , the inventory level is zero and immediately, it is replaced its level with an asked of size S_j, for $j=1, 2, ..., (m-1)$, allowing to satisfy the demand to the next reposition time. The main result is to find the optimal reposition time $T_{j-1,}$ *that* will minimize the total cost in a planning horizon.

----- *Keywords:* Deterministic inventory, replacement, linear rate demand, planning horizon.

* Autor de correspondencia: teléfono + 57 + 4 + 219 58 23, fax + 57 + 4 + 233 12 49, correo electrónico: hlaniado@est-econ.uc3m.es (H. Laniado).

Introducción

Por inventario se entiende un conjunto de recursos útiles que se encuentran en algún momento en espera de ser utilizados. Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer una demanda sobre un horizonte de tiempo llamado horizonte de planificación. Si la demanda solo puede ser predicha de manera probable, esta debe considerarse como una variable aleatoria; por otra parte, si es posible hacer un pronóstico de la misma con certidumbre, estamos enfrentados a un problema con demanda determinística que es la considerada en éste trabajo. Bajo características determinística de la demanda, ésta se podrá satisfacer almacenando todas las unidades en el instante inicial del horizonte de tiempo. Otra opción es almacenando separadamente a determinados intervalos de tiempo durante el horizonte. Los dos casos extremos que se pueden considerar son sobrealmacenamiento respecto a una unidad de tiempo o subalmacenamiento respecto al horizonte completo.

Un sobrealmacenamiento requerirá un capital invertido superior, pero menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Un subalmacenamiento disminuirá el capital invertido por unidad de tiempo y aumentará la frecuencia de los pedidos. Los dos extremos son costosos y, por consiguiente, las decisiones considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordenan, pueden estar basadas en minimizar una función de costos total apropiada, la cual debe involucrar varios costos asociados al problema. Entre los costos más relevantes se encuentran los costos resultantes de sobrealmacenamiento y subalmacenamiento. Para mejores detalles acerca de definición y características de los diferentes modelos clásicos de inventario ver, por ejemplo, Taha [1], Hillier y Lieberman [2], Davis y Keown [3] referencias básicas para un primer acercamiento. En este artículo se presenta una solución a un problema poco examinado en la literatura de los modelos de inventario, el que se refiere a la determinación de los instantes de reposición óptimos cuando se considera una tasa de demanda lineal. En la referencia [4] se estudia el problema en forma parcial, obteniendo una solución aproximada para los tiempos de reposición, sin embargo en literatura especializada en el tema como [5, 6, 7] no se examina este problema con profundidad. La solución del problema es la obtención de los tiempos óptimos de reposición, estos tiempos serán determinados con una fórmula recursiva que se construye a partir del proceso de minimización de una función de costo total. Aunque la aproximación presentada en Naddor [4] es buena, la solución que se expone en este trabajo es la que realmente minimiza la función de costos y se demuestra al probar, con la ayuda del teorema de los círculos de Gerschgorin, que la matriz Hessiana evaluada en los tiempos obtenidos es definida positiva, condición suficiente para garantía de un mínimo. Hariga y Goyal [8, 9] proponen soluciones de tipo heurístico para los tiempos óptimos de reposición y número óptimo de pedidos, no desarrollando formalmente para los primeros, condiciones suficientes de optimalidad. Se presenta entonces en este artículo una metodología alternativa para la búsqueda de los tiempos de reposición y la prueba formalizada de que son óptimos en el sentido de minimización de una función de costo total.

El artículo está organizado de la siguiente forma, primero se presenta el análisis del modelo para deducir la función de costo total y su proceso de optimización. Posteriormente se presenta un ejemplo donde se resuelve paralelamente utilizando la aproximación de Naddor [4] y la solución obtenida en el presente trabajo. Por último, se muestra un algoritmo de solucion no muy complejo programado en Visual-Basic que permite determinar simultáneamente el número de reposiciones y los instantes de reposición que minimizan la función de costo total.

Supuestos y notación

1. La tasa de demanda es conocida y es lineal por unidad de tiempo.
2. No hay demanda insatisfecha.
3. El tiempo de espera entre la orden de pedido y la recepción del mismo es cero.

4. Los costos en consideración son por mantenimiento por unidad de tiempo y por reposición.

Se hará uso de la siguiente notación. Alguna notación adicional será incluida cuando sea necesaria.

H Horizonte de planificación.

m Número de reposiciones durante el horizonte de planificación.

S_j Tamaño del j – ésimo pedido

j = 1,2,…, (m - 1).

T_{j-1} Instante de tiempo en el cual se lleva a cabo el j – *é*simo pedido, $j = 1,2,\ldots, m,$ donde $T_o = 0$.

$T_m = H$ En este último instante no se hace pedido.

c_1 Costo de mantenimiento de inventario por unidad y por unidad de tiempo.

c_2 Costo de cada reposición, el cual es independiente del volumen.

λt Tasa de demanda con $\lambda > 0$.

Análisis del Modelo

En la figura 1 se presenta el modelo general con demanda creciente.

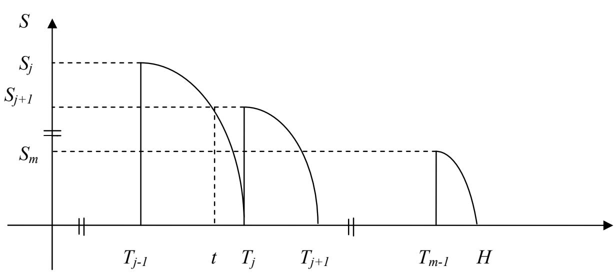

Figura 1 Modelo general con demanda creciente

Se considera un plan $[T_j, S_j]$ para un modelo de inventario determinístico con tasa de demanda λt, $\lambda > 0$.

El tamaño del pedido que se recibe en el instante inicial T_{j-1} y que permite satisfacer la demanda para el j-ésimo período $[T_{j-1}, T_j]$ viene dado por:

$$S_j = \int_{T_{j-1}}^{T_j} \lambda t dt, \quad \text{(Ver Figura 1).}$$

Definición 1. Carmona [10]. *El nivel de inventario I(t) es una función del tiempo que representa el número de unidades almacenadas en determinado instante* t.

El nivel de inventario en el instante $t \in [T_{j-1}, T_j]$, esta dado por

$$I_j(t) = S_j - \int_{T_{j-1}}^{t} \lambda x dx = \int_{T_{j-1}}^{T_j} \lambda x dx - \int_{T_{j-1}}^{t} \lambda x dx = \int_{t}^{T_j} \lambda x dx.$$

Para un m dado, y teniendo en cuenta que $T_0 = 0$ y $T_m = H$, se tiene que el inventario promedio por unidad de tiempo durante el horizonte de planificación $[0, H]$ es:

$$\overline{I(t)} = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{m}\int_{T_{j-1}}^{T_j} I_j(t)dt = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{m}\int_{T_{j-1}}^{T_j}\int_{t}^{T_j}\lambda x dx = \left[\frac{\lambda H^2}{3} - \frac{\lambda}{2H}\sum_{j=2}^{m}\left[T_j^2 - T_{j-1}^2\right]T_{j-1}\right].$$

Sabiendo que la función de costo total es igual a la función del costo de mantener mas la función del costo de ordenar. Se tiene que la función de costos para el modelo de estudio es

$$C(m, T_j) = c_1\left[\frac{\lambda H^2}{3} - \frac{\lambda}{2H}\sum_{j=2}^{m}\left[T_j^2 - T_{j-1}^2\right]T_{j-1}\right] + c_2 m \quad (1)$$

Los $T_1, T_{2,\ldots,} T_{m-1}$ que minimizan la función de costo total (1) deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial C}{\partial T_j} = \frac{\lambda}{2H}\left[2T_jT_{j-1} - 3T_j^2 + T_{j+1}^2\right] = 0 \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, m-1.$$

Resolviendo para T_j el sistema anterior, se obtiene

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} T_2, \qquad T_2 = \left(3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} T_3,$$

$$T_3 = \left(3 - 2\left(3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} T_4,$$

en general, se tienen las siguientes formulas recursivas

$$T_j = a_j T_{j+1} \qquad \text{donde} \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{y} \qquad a_j = \left(3 - 2a_{j-1}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Por tanto, para un valor m fijo es posible calcular $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ y posteriormente calcular

$$T_{m-1} = a_{m-1} H, \qquad T_{m-2} = a_{m-2} T_{m-1}, \ldots, T_1 = a_1 T_2.$$

La matriz Hessiana correspondiente a la función de costo total (1) está dada por

$$B = \begin{cases} 3\lambda T_i - \lambda T_{j-1} & si \quad i = j \\ -\lambda T_{\max\{i,j\}} & si \quad |i - j| = 1 \\ 0 & en \text{ otro caso} \end{cases} \qquad (3)$$

Para garantizar que los tiempos de reposición obtenidos mediante recursividad minimizan la función de costos (1), es suficiente demostrar que B es definida positiva. Esto se formuló en el teorema 1 y es el principal resultado del artículo.

Observe de (2) que $T_j = a_j T_{j+1}$, además $T_j < T_{j+1}$, en consecuencia

$$0 < a_j < 1 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, (m - 1).$$

Propiedad 1

$$a_j > a_{j-1} \text{ para } j = 1, 2, \ldots, (m - 1)$$

Demostración. Claramente $(3 - 2x)^{-1/2} > x$ para $0 < x < 1$.

En particular para $x = a_{j-1}$, luego $(3 - 2a_{j-1})^{-1/2} > a_{j-1}$ de donde se deduce, a partir de una de las formulas recursivas de la expresión (2), que $a_j > a_{j-1}$.

Propiedad 2

$$T_j - T_{j-1} > T_{j+1} - T_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, (m - 1).$$

Demostración. Es fácil probar que

$$\frac{2}{(3 - 2x)^{\frac{1}{2}}} > 1 + \frac{x}{(3 - 2x)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

En particular para $x = a_{j-1}$ se tiene

$$\frac{2}{(3 - 2a_{j-1})^{\frac{1}{2}}} > 1 + \frac{a_{j-1}}{(3 - 2a_{j-1})^{\frac{1}{2}}}.$$

Por consiguiente utilizando la fórmula recursiva (2) para a_j, se verifica entonces que:

$2a_j > 1 + a_{j-1} a_j$.

En efecto $2a_j T_{j+1} > T_{j+1} + a_{j-1} a_j T_{j+1}$.

De (2) se sabe que $T_j = a_j T_{j+1}$ entonces:

$2T_j > T_{j+1} + a_{j-1} T_j = T_{j+1} + T_{j-1}$,

luego,

$T_j - T_{j-1} > T_{j+1} - T_j$

Lema 1. *Todo valor propio v de B satisface que:*

$$|v - b_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |b_j|$$

Ver: Teorema de los círculos de Gerschgorin Strag [11].

Teorema 1. *La matriz Hessiana B es definida positiva.*

Demostración. De la Matriz Hessiana (3) se tiene que $b_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, (i - 2), \quad (i + 2), \ldots, (m - 1)$.

$b_{i(i-1)} = -\lambda T_i$, $b_{ii} = 3\lambda T_i - \lambda T_{i-1}$, $b_{i(i+1)} = -\lambda T_{i+1}$.

Por tanto:

$$\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right| = \left|-\lambda T_i\right| + \left|-\lambda T_{i+1}\right| = \lambda T_i + \lambda T_{i+1}$$

De la propiedad (2) se garantiza que $T_{i+1} + T_i < 3T_i - T_{i-1}$, de donde

$\lambda T_{i+1} + \lambda T_i < 3\lambda T_i - \lambda T_{i-1} = b_{ii}$,

luego

$$\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right| < b_{ii}.$$

Suponga que v es un valor propio de la matriz B, entonces por el Lema 1 se verifica que

$$\left|v - b_{ii}\right| < \sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right| < b_{ii}.$$

En efecto $0 < v < 2b_{ii}$, lo cual garantiza que todos los valores propios de la matriz Hessiana *B son* positivos, en consecuencia B es definida positiva.

Algoritmo

El algoritmo de solución permite determinar el número óptimo de reposiciones y los instantes de reposición que minimizan la función de costos correspondiente al modelo de estudio. El algoritmo de cálculo de los valores m y T_j óptimos se puede resumir de la siguiente manera:

1. Hacer $m = 2$.
2. Hallar T_1 y $C(2;T_1)$.
3. Haga para $i = 1$ hasta $(m - 1)$.
4. $V_i = T_i$.
5. Fin para.
6. Hallar $C(m; T_{1,...,} T_{m-1})$.
7. Si $C(m; T_1, ..., T_{m-1}) \leq C(m - 1; V_1, ..., V_{m-2})$.
8. $m = m + 1$ ir a 3.
9. Si no, los valores óptimos son $(m - 1)$ reposiciones, en los instantes $V_1, ..., V_{m-1}$.

Ejemplo 1 Una línea de producción requiere cierto combustible a un índice uniforme de 24 horas al día, 7 días a la semana, durante 3 años: la tasa anual de consumo del combustible es de $1.600\, t\,\frac{galones}{año}$. Se consideran dos costos, c_1 = \$ 0,4 por galón por año correspondiente a mantenimiento de inventario. El combustible se envía por camiones y cada vez que se hace un pedido se incurre en un costo c_2 = \$ 500. Sabiendo que la línea de producción necesita en los tres años 7.200 galones de combustible, ¿Qué cantidades se deben entregar en cada envió?, ¿En que tiempo se deben hacer los pedidos?, ¿Cual es el costo total del sistema en los tres años?

Se resolverá el problema con el algoritmo de cálculo presentado con anterioridad, haciendo paralelamente una comparación con la solución aproximación de Naddor [4] dada por:

$$T_i = \frac{H}{2}\left(\frac{i}{m} + \sqrt{\frac{i}{m}}\right)$$

Los datos del problema son:

H = 3 años = T_m; $r(t) = 1.600\, t\,\frac{galones}{año}$;

c_1 = \$ 0,4; c_2 = \$ 500.

Para m = 1 Reposición

Se hace una sola reposición al inicio del periodo de tamaño S_1 = 7.200 galones, con un Costo = \$ 6.260.

A continuación se hará la comparación de los costos para m = 2, 3 4 reposiciones, es decir, se intenta comparar la solución obtenida en el presente trabajo, que se ha denotado como solución exacta y la aproximación que se propone en (Naddor [4])

Para m = 2 Reposiciones

Solución exacta

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 2399{,}86$
$T_1 = 1{,}7320$	$S_2 = 4800{,}14$
Costo Total = \$ 1811.488	

Aproximación

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 2622{,}62$
$T_1 = 1{,}8106$	$S_2 = 4577{,}38$
Costo Total = $ 1814.964	

Para m = 3 Reposiciones

Solución exacta

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 1300{,}5$
$T_1 = 1{,}2750$	$S_2 = 2599{,}71$
$T_2 = 2{,}2084$	$S_3 = 3299{,}78$
Costo Total = $ 2006.591	

Aproximación

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 1492{,}76$
$T_1 = 1{,}3660$	$S_2 = 2557{,}24$
$T_1 = 2{,}2247$	$S_3 = 3150{,}00$
Costo Total = $ 2009.500	

Para m = 4 Reposiciones

Solución exacta

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 850{,}37$
$T_1 = 1{,}0315$	$S_2 = 1701{,}47$
$T_2 = 1{,}7867$	$S_3 = 1469{,}4$
$T_3 = 2{,}4271$	$S_4 = 3178{,}74$
Costo Total = $ 2366.604	

Aproximación

Tiempo de reposición	*Tamaño del pedido*
T_i *(Años)*	S_i *Galones*
$T_o = 0$	$S_1 = 1012{,}50$
$T_1 = 1{,}1250$	$S_2 = 1610{,}12$
$T_2 = 1{,}8106$	$S_3 = 2078{,}00$
$T_3 = 2{,}4240$	$S_4 = 2499{,}38$
Costo Total = $ 2369.024	

La solución óptima para el problema planteado en el ejemplo es hacer 2 reposiciones en los instantes,

$T_o = 0$; $T_1 = 1{,}7320$;

A continuación, se presentan varias ejecuciones del algoritmo cuyos datos de entrada se observan en la figura 2, las salidas son los tiempos óptimos de reposición, costos totales de la solución exacta y solución aproximada.

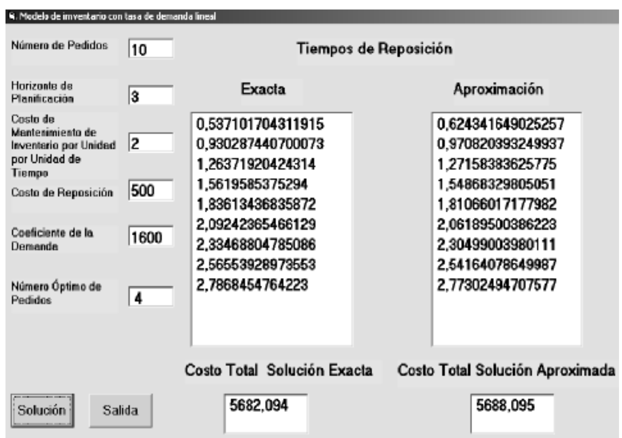

Figura 2 Ejecución del algoritmo

Otra salida importante del algoritmo es el número óptimo de reposiciones; inicialmente se entran 10 reposiciones pero la salida asociada al número óptimo de pedidos muestra que bajando a 4 reposiciones los costos serán menores.

Esta nueva ejecución se muestra en la figura 3.

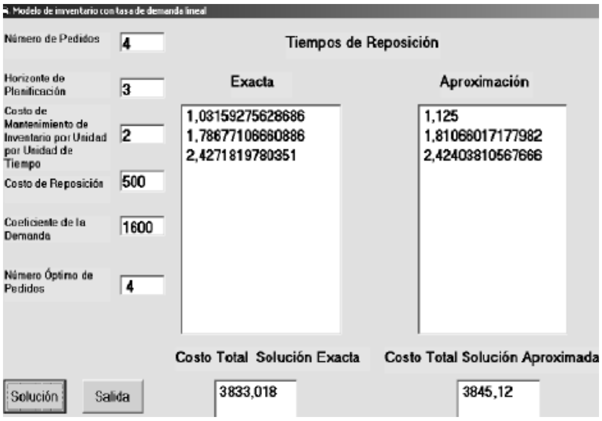

Figura 3 Ejecución del algoritmo con el número óptimo de reposiciones

Conclusiones

Las soluciones numéricas a los problemas cuyos resultados analíticos son complejos ofrecen alternativas interesantes y de fácil implementación computacional dado el avance significativo del análisis numérico en los últimos tiempos. Muchas disciplinas sobre todo la ingeniería ha adoptado estás técnicas de carácter numérico para dar respuesta a los problemas reales que surgen sin necesidad de relajar supuestos. Sin embargo, la labor de las personas dedicadas a investigar soluciones analíticas a tales problemas que solo han sido enfrentados numéricamente se debe destacar, ya que proporciona la manera de obtener resultados más precisos y exactos. En este artículo, hemos dado solución exacta y analítica a un problema aplicado cuya solución solo se había enfrentado de manera aproximada, hemos dado a lo largo del estudio mucho crédito a la aproximación. Sin embargo, nuestros resultados son exactos y contrastados. Este trabajo proporciona elementos para nuevas investigaciones por ejemplo abordar el problema con una tasa de demanda lineal de la forma $r(t) = \lambda t + \beta$. o de grado mayor.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo del grupo de Econometría aplicada, al Departamento de Estadística y Matemáticas y al Centro de Investigaciones y Consultoría de la Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Antioquia y al CODI por la financiación del proyecto. A Diego Castañeda y Catalina Cortés, estudiantes de Economía y Matemáticas de la Universidad de Antioquia, también a Mónica Montoya y Andrés Puerta, egresados del programa de Economía de la Universidad de Antioquia, por su participación activa en el desarrollo de este trabajo.

Referencias

1. H. A. Taha. *Operations Research: an introduction.* Macmillan Publishing Co Inc. Indianapolis. USA. 4ª ed. 1987. pp. 237- 241.

2. F. S Hiller, G. J. Liberman. *Introducción a la investigación de Operaciones.* 8ª ed. Mc GrawHill. México. 2006. pp. 833-900.

3. D. R. Anderson, D. J. Sweney, T. A. Williams. *Métodos cuantitativos para los negocios*. 7ª ed. International Thomson. México. 1999. pp. 531-582.

4. E. Naddor. *Inventory System*. Jhon Wiley Publisher. New York. 1996. pp 111-120

5. G. Hadley, T. M. Whitin. *Analysis of Inventory system*. Englewood Cliffs. Prentice – Hall. London. 1963. pp. 29-83.

6. E. A. Silver, D. F. Pyke, R. Peterson. *Inventory management and Production Planning and Sheduling*. 3ª ed. Jhon Wiley Sons. Inc. New York. 1998. pp. 147-382.

7. P. H. Zipkin. *Foundations of Inventory Management*. McGraw Hill. Boston. 2000. pp. 29-61.

8. S. K. Goyal, M. A Hariga, A. Alyan. "The Trended inventory lot sizing problem shortages under a new replenishment policy". *The journal of the operational research society.* Vol 47. 1996. pp. 521-527.

9. M. A. Hariga, S. K . Goyal. "An alternative procedure for determining the optimal policy for an inventory item having linear trend in Demand" *The journal of the operational research society.* Vol 46. 1999. pp. 1286-1295.

10. J. R. Carmona. *Sobre las condiciones suficientes para los tiempos de reposición en un modelo de inventario determinístico con tasa de demanda no constante.* Tesis de Maestría. Universidad de EAFIT. 2008. pp. 30-45.

11. G. Strag. *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano. México. 1982. pp. 337.