Revista Facultad de Ingeniería N.º 39. pp. 112-117. Marzo, 2007

Aplicación del orden de mayorización a un problema de producción-inventario

Henry Laniado Rodas[a,*], *Diego Alejandro Castañeda*[b], *Andrés Felipe García Suaza*[a]

[a]Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia.
[b]Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Antioquia.

(Recibido el 08 de septiembre de 2005. Aceptado el 31 de agosto de 2006)

Resumen

En este trabajo se presenta una aplicación del orden de mayorización a un modelo de producción-inventario con tasas de producción y demanda constantes. Como resultado es posible justificar la homogeneidad de un lote de producción, lo cual se considera como supuesto en la literatura tradicional.

---------- *Palabras clave*: producción, tamaño del lote, inventario.

An aplication of majorization order on a production-inventory problem

Abstract

The order of majorization is a partial order among vectors, taking in account the characteristics of its components. In this paper presents an application of this order to an inventory-production model with constant production and demand rates, which justifies the homogeneity in the lot size of production, what is considered as assumed in the traditional literature.

---------- *Key words:* production, lot size, inventory.

Autor de correspondencia. Teléfono: + 57 + 210 58 20, fax: +57 + 263 82 82, correo electrónico: hlaniado@economicas.udea.edu.co.

Introducción

Es común encontrar que en el tratamiento formal de los modelos de producción-inventario, con tasas de demanda y producción constante y horizonte finito, se suponga que los lotes de producción son del mismo tamaño en cada ciclo, es decir, examinan el problema teniendo en cuenta la homogeneidad del lote de producción o la longitud del ciclo. Con base en este supuesto, trabajos recientes como los presentados por Goyal [1] y Hariga [2], en los cuales se construye una función de costos que mediante un proceso de optimización, no muy complejo, se obtiene el número de ciclos que minimiza dicha función.

Este supuesto, que es de considerable interés para el proceso de solución de los problemas nombrados, tiene una justificación teórica; de ahí el objetivo de este artículo, que demuestra que la función de costos bajo un modelo de producción-inventario es mínima siempre que los lotes de producción sean iguales en cada ciclo en un horizonte de planificación dado. Tal propósito se consigue utilizando el orden de mayorización [3].

Inicialmente se hace una breve presentación del problema bajo una serie de supuestos que se enunciarán más adelante; luego, se presentan los teoremas básicos para la aplicación del orden de mayorización al problema en cuestión para finalmente presentar el resultado.

Supuestos y notación

El modelo aquí propuesto se desarrolla bajo los siguientes supuestos:

Las tasas de producción y demanda son conocidas y constantes en todo el horizonte de planificación.

El consumo de cualquier ciclo comienza sólo en el momento que la producción termina.

La unidad de producción reposa un tiempo constante por cada ciclo.

Las variables del modelo son las siguientes:

N Número de ciclos.

H Horizonte de planificación.

F Costo fijo por ciclo independiente del volumen de producción.

c Costo de producción por unidad.

h Costo de mantenimiento de inventario por unidad de tiempo.

π Costo por demanda insatisfecha.

r Tasa de producción por unidad de tiempo.

d Tasa de demanda por unidad de tiempo.

T Tiempo de reposo de la unidad de producción por ciclo.

T_j Instante de tiempo en el cual comienza el j-ésimo ciclo de producción, $\forall j = 1,2,..., N$.

S_j Lote producido en el (j-1)-ésimo ciclo.

Descripción del modelo

Se considera una situación en la que existen diferentes niveles de producción por ciclo en el horizonte de planificación, por lo tanto, en el instante T_j se tiene un lote de producción S_j (figura 1).

Bajo esta situación los costos a considerar son: costo fijo por ciclo, costo de producción por unidad, costo de mantenimiento de inventario por unidad por unidad de tiempo y costo por demanda insatisfecha. Para hallar el costo de mantenimiento de inventario es necesario conocer el inventario promedio por unidad de tiempo en el horizonte de planificación.

Definición 1: nivel de inventario

Es una función del tiempo que permite determinar el número de unidades almacenadas en determinado instante del tiempo.

Para este problema el nivel de inventario en el j-ésimo ciclo está dado por:

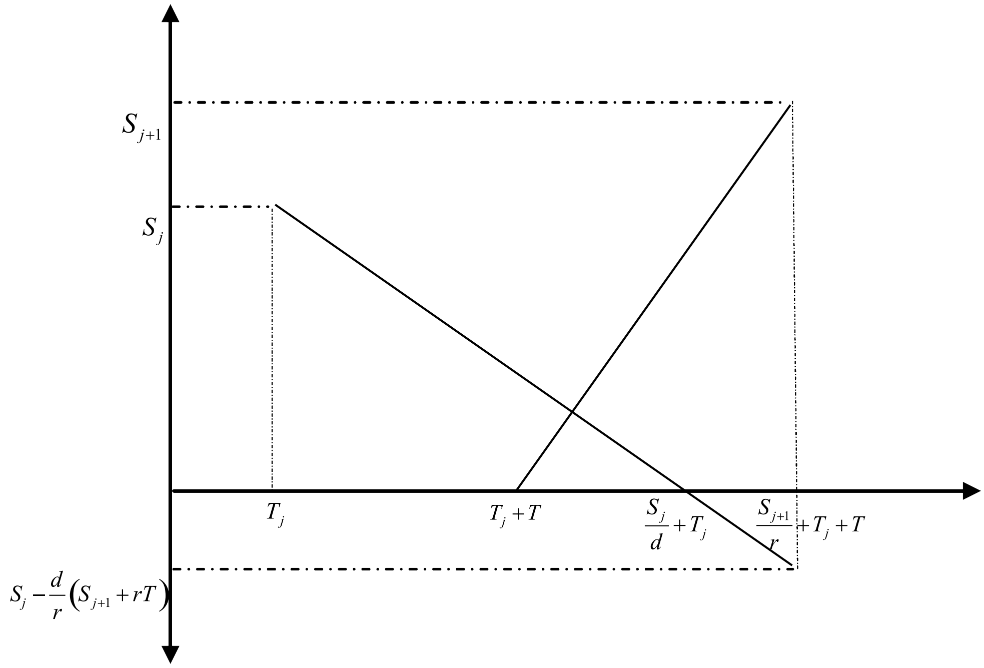

Figura 1 Modelo de producción-inventario con lotes de producción asimétricos

$$I(t)=\begin{cases} S_j-d(t-T_j) & si \quad T_j\le t\le T_j+T \\ S_j-rT+\left(r-d\right)\,(t-T_j) & si \quad T_j+T<t<\dfrac{S_{j+1}}{d}+T_j \\ r\left(t-T-T_j\right) & si \quad \dfrac{S_{j+1}}{d}+T_j\le t\le \dfrac{S_{j+1}}{r}+T+T_j \end{cases} \tag{1}$$

Luego el inventario promedio en todo el horizonte de planificación se expresa

$$\frac{\sum_{j=1}^{N}\int_{T_j}^{\frac{S_{j+1}}{r}+T_j+T} I(t)dt}{H}=\frac{1}{H}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{S_j^2}{2d}+\frac{S_{j+1}^2}{2r}\right] \tag{2}$$

El número de unidades insatisfechas viene dado por la diferencia entre la demanda total y la producción total en el horizonte.

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{r}\left(S_{j+1}+rT\right)-S_j\right] \tag{3}$$

Por tanto, se deduce que la función de costos en todo el horizonte de planificación es

$$C\left(S_j,N\right)=\sum_{j=1}^{N}cS_j+\frac{h}{H}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{S_j^2}{2d}+\frac{S_{j+1}^2}{2r}\right]+\pi\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{r}\left(S_{j+1}+rT\right)-S_j\right]+NF \tag{4}$$

Donde, el objetivo es demostrar que la función es mínima si $S_j = S_{j+1}\ \forall j = 1, 2, ..., N$.

Definición 2. orden de mayorización

Sea $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ... x_m)$ un vector m-dimensional de componentes no negativas. Donde $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq ... x_{[m]}$ denota las componentes de **x** en orden decreciente. Se dice que el vector **x** es mayorizado por el vector $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ... y_m)$, y lo denotamos por $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, si

$$\sum_{i=1}^{j} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{j} y_{[i]} \quad \forall j = 1, 2, ..., (m-1)$$

y $\sum_{i=1}^{m} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{m} y_{[i]}$.

Definición 3. función Schur cóncava y Schur convexa

Sea ϕ una función de valor real definida sobre $[0, \infty]^m$. La función ϕ se llama Schur convexa si $\phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})$ siempre que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. La función ϕ se llama Schur cóncava si $-\phi$ es Schur convexa.

Lema 1

Sean $\mathbf{k_0}=(k, k, ... k)$ y $\mathbf{k}=(k_1, k_2, ..., k_m)$ vectores m-dimensionales de componentes no negativas, donde $\mathbf{k_0}$ posee componentes iguales y $\mathbf{k}$ es tal que $\sum_{i=1}^{m} k_i = m\,k$. Entonces $\mathbf{k_0} \prec \mathbf{k}\ \forall \mathbf{k}$

Demostración

Sea $K = mk = \sum_{i=1}^{m} k_{[i]}$ y $j < m$, ya que

$k_{[1]} \geq k_{[2]} \geq \cdots \geq k_{[m]}$, entonces

$$\begin{aligned} mk_{[1]} &\geq jk_{[1]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]} \\ mk_{[2]} &\geq jk_{[2]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]} \\ &\vdots \\ mk_{[j]} &\geq jk_{[j]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]} \end{aligned}$$

Luego

$$m\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} \geq j\left[\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} + k_{[j+1]} + k_{[j+2]} + \cdots + k_{[m]}\right] = j\sum_{i=1}^{m} k_{[i]}$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} \geq \frac{jK}{m} = jk$, luego $\sum_{i=1}^{j} k_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{j} k$

de donde $\mathbf{k_0} \prec \mathbf{k}$

Retomando la función de costos (4) la cual se puede expresar de la forma de las ecuaciones (5) y (6).

$$C(S_j, N) = \sum_{j=1}^{N}\left[cS_j + \frac{h}{H}\left[\frac{S_j^2}{2d} + \frac{S_{j+1}^2}{2r}\right] + \pi\left[\frac{d}{r}(S_{j+1} + rT) - S_j\right] + F\right] \tag{5}$$

$$C(S_j, N) = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{h}{2Hd}S_j^2 + (c-\pi)S_j + \pi Td\right] + \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{h}{2Hr}S_{j+1}^2 + \pi\frac{d}{r}S_{j+1} + F\right] \tag{6}$$

Se obtiene una función Schur convexa; lo cual se demostrará a continuación.

Lema 2

Si $I \subset \mathrm{R}$ es un intervalo y $g : I \rightarrow \mathrm{R}$ es (estrictamente) convexa, entonces

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^{m} g(x_i)$$

es (estrictamente) Schur convexa sobre I [3].

Propiedad 1

Sean ϕ y ω dos funciones Schur convexas, luego, $\phi + \omega$ es una función Schur convexa.

Demostración

Sean **x, y** dos vectores m-dimensionales tales que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, y, ϕ, ω dos funciones Schur convexas. Luego se cumple que:

$$\phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})$$

$$\omega(\mathbf{x}) \leq \omega(\mathbf{y})$$

Luego

$$\phi(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y}) + \omega(\mathbf{y})$$

Por tanto, $\phi + \omega$ es una función Schur convexa.

Teorema

La función de costos es mínima cuando los lotes de producción son constantes.

$$C\left(S_j, N\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[cS_j + \frac{h}{H}\left[\frac{S_j^2}{2d} + \frac{S_{j+1}^2}{2r}\right] + \pi\left[\frac{d}{r}\left(S_{j+1} + rT\right) - S_j\right] + F\right]$$

Demostración

Mediante un proceso algebraico es fácil ver que la ecuación anterior se puede expresar como:

$$C\left(S_j, N\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{h}{2Hd}S_j^2 + \left(c-\pi\right)S_j + \pi Td\right] + \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{h}{2Hr}S_{j+1}^2 + \pi\frac{d}{r}S_{j+1} + F\right]$$

Y por el *lema 2* y *propiedad 1*, se verifica que la función de costos asociada al modelo en estudio es Schur convexa en S_j. Por tanto, a partir del *lema 1*, dicha función es mínima si

$$S_j = S_{j+1} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N$$

Problema de producción-inventario bajo simetría en el lote de producción

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la sección anterior, se tiene que:

$$S_j = Q \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N$$

Como consecuencia, la función de costos (5) es de la forma de la ecuación (7).

$$\begin{aligned} C\left(Q, N\right) &= \sum_{j=1}^{N}\left[cQ + \frac{h}{H}\left[\frac{Q^2}{2d} + \frac{Q^2}{2r}\right] + \pi\left[\frac{d}{r}\left(Q + rT\right) - Q\right] + F\right] \\ &= cQN + \frac{h}{H}\left[\frac{Q^2}{2d} + \frac{Q^2}{2r}\right]N + \pi N\left[\frac{d}{r}\left(Q + rT\right) - Q\right] + FN \end{aligned} \tag{7}$$

Donde es el lote de producción por ciclo, y viene dado por:

$$Q = \frac{r\left(H - NT\right)}{N} \tag{8}$$

El número de unidades en déficit en el horizonte de planificación, deducido de la ecuación (3) está dado por la ecuación (9).

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{r}\left(Q + rT\right) - Q\right] = \left[\frac{d}{r}\left(Q + rT\right) - Q\right]N \tag{9}$$

Por tanto la función de costos para todo el horizonte de planificación viene dada por la ecuación (10).

$$C\left(Q, N\right) = cr\left(H - NT\right) + \frac{hr\left(H - NT\right)^2}{2NH}\left[1 + \frac{r}{d}\right] + \pi\left[\left(d - r\right)H + rNT\right] + FN \tag{10}$$

Usando las condiciones de primer orden sobre la ecuación (10) y optimizando para N se tiene

$$N^{*} = H\left[\frac{A}{rT\left(c-\pi\right)-F-AT^{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

Con $A = \dfrac{hr}{2H}\left(1+\dfrac{r}{d}\right)$

Ejemplo

Consideremos los siguientes datos para una estructura productiva

H = 250 días *d = 40 / día* *r = 36 / día*
F = 200 / ciclo *c = 30 / unidad* *π = 5 / unidad*
h = 20% de c *T = 0,1 días*

En este caso, el número óptimo de ciclos está dado por:

$$A = \frac{6\left(36\right)}{2\left(250\right)}\left(1+\frac{36}{40}\right) = 0,8208$$

$$N^{*} = 250\left[\frac{0,8208}{36\left(0.5\right)\left(30-5\right)-200-0,8208\left(0.5\right)^{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 14,33$$

Conclusiones

El trabajo presentado en este artículo ha permitido desarrollar una interesante aplicación del orden de mayorización, con el fin de proporcionar un soporte teórico al supuesto que desde la literatura tradicional de los modelos de inventario y producción-inventario se hace. Como se ha mencionado en la introducción , el proceso consiste en optimizar los modelos con base en el supuesto de que los lotes de producción son iguales cuando se consideran tasas de producción y tasas de demanda constantes. En esta investigación se ha concluido, que no es necesario este tipo de suposiciones y que partiendo de lotes de producción no homogéneos se logra demostrar que la función de costos asociada al modelo es mínima cuando se toman lotes de producción de igual tamaño.

Es de considerable interés examinar el principio, cuando el tiempo *T* de receso de la unidad de producción es considerada como una variable aleatoria. Este problema se propone para investigaciones futuras.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del proyecto: Modelos estocásticos y determinísticos en el análisis de optimización y mejoramiento de la confiabilidad de sistemas. El cual es realizado para el Centro de Investigaciones Económicas CIE de la Universidad de Antioquia y financiado por el CODI.

Referencias

1. S. Goyal; M. Gopalakrishnan. "Production lot sizing model with insufficient production capacity". *Production planning control*. Vol. 7. 1996. pp. 222-224.
2. M. A. Hariga. "Economic production-ordering quantity models with limited production capacity". *Production Planing Control*. Vol 9. 1998. pp. 671-674.
3. A. Marshall, I. Olkin. *Theory of mayorization and its applications.* New York. Academic Press. 1979.