ESTIMACION DEL PROCESO DE POISSON NO HOMOGENEO

Por: Luis Pérez G.
Isaac Dyner R.
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional. Sede Medellín

INTRODUCCION

La estimación de la función de intensidad en un proceso de Poisson no-homogéneo es un problema complejo sobre el cual han surgido variados métodos de solución asociados con diversos estimadores. A pesar de haberse encontrado estimadores muy representativos, no han sido lo suficiente para declarar el problema totalmente resuelto.

En este trabajo se presentan varios métodos de estimación para la función de intensidad; son todos ellos extensiones de trabajos previos que originan nuevos estimadores para la literatura estadística. En la parte final, recurriendo a un ejemplo, se hacen comparaciones gráficas de las diferentes técnicas.

PRELIMINARES

A un proceso estocástico $[\ N(t), t > 0\ ]$ que cuenta los puntos o llegadas que aparecen hasta un instante de tiempo t, se le llama Proceso de Conteo.

Se puede observar que las variables aleatorias $N(t)$ y $N(s + t) - N(s)$ son no decrecientes y toman valores en el conjunto $[\ 0,1,2, \dots\ ]$. En el sentido de la definición antes expuesta, $N(t + s) - N(s)$ representa el número de puntos que aparecen en el intervalo $(s, s + t\ ]$.

En este trabajo se asumirá que $N(0) = 0$.

Se dice que un proceso de conteo $[N(t), t > 0]$ tiene incrementos independientes si para cualquier colección $[t_0, t_1, ..., t_n] \varepsilon R^+$, con $t_0 < t_1 < ... < t_n$, las variables aleatorias

$$N(t_1) - N(t_0) ; ...; N(t_n) - N(t_{n-1})$$

son independientes.

Se dice que el proceso tiene incrementos estacionarios, o incrementos homogéneos, si la variable aleatoria $N(t + h) - N(s + h)$ tiene idéntica distribución a $N(t) - N(s)$ para todo $s< t(s, t \varepsilon R^+)$ y todo $h > 0$.

Con base en lo anterior pueden definirse los Procesos de Poisson.

Un proceso de conteo $[N(t), t > 0]$ es un proceso de Poisson homogéneo si se cumplen las siguientes propiedades:

a) El proceso tiene incrementos independientes.

b) El proceso tiene incrementos estacionarios.

c) Con probabilidad 1, la función $t \rightarrow N(t)$ tiene saltos unitarios únicamente.

A partir de estas condiciones que son sólo de tipo cualitativo, se puede demostrar (Cinclar (1)) que:

$$P [N(s + t) - N(s) = n] = \frac{(\lambda t)^n \ e^{-\lambda t}}{n!} \quad \text{para } n = 0,1,2, ...$$

Donde $\lambda > 0$ siempre existe y se le llama intensidad del proceso.

Siendo $t_1, t_2, ..., t_n$ variables aleatorias que indican los tiempos de aparición de las llegadas 1,2, ..., n respectivamente, y en vista de que el resultado anterior permite asumir los tiempos entre llegadas como exponenciales con parámetro λ para $K = 1,2, ..., n$, la función de densidad de probabilidad de que en el intervalo $(s, s + t]$ ocurran llegadas a los tiempos $t_1 < t_2 < ... < t_n$ está dada por:

$$f(t_1, ..., t_n) = \lambda^n \operatorname{Exp} [- \lambda (t_1 - s) - \lambda (t_2 - t_1) - ... - \lambda (t_n - t_{n-1})]$$

$$\operatorname{Exp} [- \lambda (t + s - t_n)] .$$

El término final corresponde a la probabilidad de que no aparezcan llegadas en el intervalo $(t_n, s+t]$. Agrupando términos:

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) = \lambda^n \operatorname{Exp}(-\lambda t), \quad s < t_1 < t_2 < ... < t_n < t + s.$$

Aplicando propiedades elementales de probabilidad condicional es posible encontrar una expresión para la función de densidad condicionada a que $N(t+s) - N(s) = n$; ésto es,

$$f(t_1, t_2, ..., t_n/n) = \lambda^n \operatorname{Exp}(-\lambda t) \cdot \frac{n!}{(\lambda t)^n \operatorname{Exp}(-\lambda t)}$$

ó

$$f(t_1, ..., t_n/n) = n!/t^n, \quad s < t_1 < ... < t_n < t + s.$$

El resultado obtenido es fácilmente imterpretable luego de notar que si $x_1, ..., x_n$ son variables aleatorias independientes con distribución común y uniforme $1/t$ en el intervalo $(s, s+t]$, entonces la función de densidad conjunta de las estadísticas de orden $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ está dada por:

$$\frac{n!}{t^n}.$$

Lo cual permite afirmar que las posiciones de las llegadas en un proceso de Poisson son independientes y uniformemente distribuidas sobre el intervalo de tiempo de observación, cuando se asume que el número de arribos es n.

Para la estimación del proceso de Poisson homogéneo debe tenerse en cuenta que el proceso se conoce completamente si se determina la intensidad. Ya que:

$$E[N(s+t) - N(s)] = \lambda t,$$

si en el intervalo $(s, s+t]$ ocurren K llegadas, al parámetro λ se le puede estimar por:

$$\hat{\lambda} = \frac{K}{t}.$$

Este estimador es insesgado y de mínima varianza.

EL PROCESO DE POISSON NO–HOMOGENEO

El proceso de Poisson no-homogéneo surge en los casos en los cuales las hipótesis del proceso de Poisson simple se cumplen en intervalos muy pequeños de tiempo. La distribución principal radica en las características de la intensidad; en el caso no-homogéneo es una función del tiempo y en el caso simple es una función constante.

Analizando, por ejemplo, el número de llamadas telefónicas a un conmutador de una empresa, se observará la variabilidad de la intensidad de acuerdo con las horas del día. De una baja intensidad en las primeras horas de la mañana, se pasará cíclicamente de altas y bajas intensidades a medida que transcurre el tiempo.

En general, se dice que un proceso de conteo $[\, N(t), t > 0 \,]$ es un proceso de Poisson *no homogéneo* si cumple las propiedades siguientes:

a) El proceso tiene incrementos independientes.

b) Con probabilidad 1, la función $t \to N(t)$ tiene sólo saltos unitarios.

Asumiendo las dos propiedades anteriores, Grandell (5) prueba que:

$$P\,[\, N(s+t) - N(s) = n \,] = \frac{[\, m(s+t) - m(s) \,]^n \operatorname{Exp}[-m(s+t) + m(s)\,]}{n!}$$

donde $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$

y $\lambda(x)$ es la *función de intensidad* del proceso, la cual es una función no-negativa e integrable según Lebesgue en subintervalos finitos de R^+.

Distribución entre llegadas del proceso.

Asúmase que el $(K - 1)$–ésimo punto del proceso de Poisson no-hemogéneo ocurre en el instante u. Sea t_k la variable aleatoria que indica el tiempo hasta la aparición del K–ésimo punto; además, defínase:

$$F_K(s/u) = P(T_K < u + s/T_{K-1} = u) = P\,(N(u+s) - N(u)) = 0,$$

y $f_K(s/u)$ la función de densidad correspondiente a $F_K(s/u)$.

Entonces,

$$1 - F_K\ (s/u) = P(T_K > u + s/T_{K-1} = u) = P\ [\ (N(u+s) - N\ (u) = 0\ ]$$

$$= \text{Exp}\ [\ -\int_u^{u+s} \lambda\ (x)dx\ ]\ ,$$

y

$$f_K\ (s/u) = \lambda\ (u+s)\ \text{Exp}\ [\ -\int_u^{u+s} \lambda\ (x)dx\ ]\ .$$

Para que las expresiones encontradas para $F_K\ (s/u)$ y $f_K\ (s/u)$ tengan sentido, se requiere que:

$$\lim_{s\to\infty} \int_u^{u+s} + \lambda\ (x)dx = \int_u^{\infty} \lambda\ (x)dx = \infty$$

Para el posterior desarrollo del presente trabajo, es de interés encontrar una expresión para $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ y $f(t_1, t_2, ..., t_n/n)$ en el caso de un proceso no-homogéneo para $t_1 < t_2 < ... < t_n$ en el intervalo $(s, s+t\ ]$.

Se conoce que:

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) = f(t_1)\ f(t_2/t_1)\ f(t_3/t_2\ t_1)\ ...\ f(t_n/t_{n-1}\ ...\ t_1)$$

$$.\ \text{Exp}\ \ [\ -\int_{t_n}^{t+s} \lambda\ (x)dx\ ]\ ,$$

Ya que el último término corresponde a la igualdad

$$P\ [\ N(s+t) - N(t_n) = 0\ ] = \text{Exp}\ [\ -\int_{t_n}^{s+t} \lambda\ (x)dx\ ]\ ,$$

De las discusiones y propiedades asumidas anteriormente para el caso no-homogéneo es posible concluir lo siguiente:

$$f(t_1) = \lambda(t_1)\ \ \text{Exp}\ [\ -\int_s^{t_1} \lambda\ (x)dx\ ]\ ,$$

$$f(t_2/t_1) = \lambda(t_2)\ \mathrm{Exp}\left[- \int_{t_1}^{t_2} \lambda(x)dx \right].$$

y en general,

$$f(t_K/t_{K-1}, \ldots, t_1) = \lambda(t_K)\ \mathrm{Exp}\left[- \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(x)dx \right].$$

Se tiene entonces la información necesaria para encontrar las expresiones propuestas:

$$f(t_1, \ldots t_n) =$$

$$\lambda(t_1)\ \mathrm{Exp}\left[- \int_s^{t_1} \lambda(x)dx \right] \ldots \lambda(t_n)\ \mathrm{Exp}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \lambda(x)dx \right] \mathrm{Exp}\left[- \int_{t_n}^{s+t} \lambda(x)dx \right].$$

ó

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\ \mathrm{Exp}\left[- \int \lambda(x)dx \right],$$

y la densidad conjunta condicionada a la ocurrencia de n puntos en el intervalo (s, s + t] está dada por:

$$f(t_1, t_2, \ldots t_n/n) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\ \mathrm{Exp}\left[- \int \lambda(x)dx \right] . \frac{n!}{\left[\int \lambda(x)dx \right] \mathrm{Exp}\left[- \int \lambda(x)dx \right]},$$

ó ,

$$f(t_1, \ldots t_n/n) = n! \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) . \left[\int \lambda(x)dx \right]^{-n}$$

La integral que aparezca sin límites, se refiere a la integración sobre (s, s + t]

ESTIMACION

Para conocer completamente el proceso de Poisson no-homogéneo se debe determinar la función de intensidad $\lambda(.)$ asociada al proceso. A partir de esta sección se presentarán algunos métodos de estimación para tal función de intensidad.

El estimador exponencial polinómico.

El estimador

$$\hat{\lambda}(t) = \text{Exp}\,[\,\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^K\,]$$

de la función de intensidad $\lambda(.)$ de un proceso de Poisson no-homogéneo, es conocido desde hace muchos años en la literatura estadística. Parzen (8), Cox y Lewis (2) y Lewis (6) han discutido este estimador aunque no en su completa generalidad. Las estadísticas para la determinación del grado K del polimonio y los parámetros $\alpha_0, \alpha_i, \ldots, \alpha_k$ sólo se conocen en forma exacta para K = 1, y en forma aproximada para K = 2.

Si se tienen los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de un proceso de Poisson no-homogéneo observado en $(s, s + t\,]$ de tal manera que $s < t_1 < t_2 \ldots < t_n < s + t$, la función de verosimilitud de los parámetros $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ está dada por:

$$L = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \prod_{i=1}^{n} [\,\text{Exp}\,(\alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_k t_i^K)\,]$$

$$.\,\text{Exp}\,[\,-\int \text{Exp}\,(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^K)dt\,]\,.$$

Lo cual se obtiene al reemplazar $\lambda(t) = \text{Exp}\,(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^K)$ en $f(t_1, t_2, \ldots t_n)$ de la sección anterior.

Luego,

$$\text{Log}\,L = n\,\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} t_i + \ldots + \alpha_k \sum_{i=1}^{n} t_i^k - \int \text{Exp}\,(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^K)dt$$

Derivando parcialmente respecto $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ e igualando cada expresión a cero, los estimadores de máxima verosimilitud para $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pueden encontrarse al resolver las $k + 1$ ecuaciones integrales siguientes

$$n = \int \text{Exp}\,(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t + \ldots + \hat{\alpha}_k t^K)dt$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^j\right) \int \mathrm{Exp}(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t + ... + \hat{\alpha}_k t^K)\, dt = \int t^j \,\mathrm{Exp}(\hat{\alpha}_0 + ... + \hat{\alpha}_k t^K)\, dt$$

para $j = 1, 2, 3, ..., K$.

Con el fin de determinar $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_k$ se deben utilizar métodos numéricos iterativos. El grado K del polinomio debe mantenerse pequeño, pues de lo contrario no sólo se presentarían problemas de cómputo, sino también variabilidad innecesaria en la función de intensidad $\lambda(.)$.

Los estimadores normal y normal truncado.

En la sección anterior se estudió el cálculo del estimador polinómico por medio del método de máxima verosimilitud. Aquí utilizando un método diferente se estimará el modelo particular:

$$\lambda(t) = \mathrm{Exp}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$$

cuando sea razonable que $\alpha_2 < 0$.

En la sección de distribución (págs. 129-131) se obtuvo:

$$f(t_1, t_2, ..., t_n/n) = n! \prod_{i=n}^{n} \lambda(t_i) \left[\int \lambda(u)du\right]^{-n},$$

lo cual puede ser interpretado en forma similar a la función de densidad conjunta de las estadísticas de orden hallada en la sección 2 para el proceso de Poisson homogéneo. Esto es, la función $f(t_1, t_2, ..., t_n/n)$ se puede interpretar como la función de densidad del ordenamiento de n variables aleatorias, cada una con densidad dada por:

$$f(x) = \frac{\lambda(x)}{\int \lambda(u)du} \qquad x \varepsilon (s, s+t].$$

De aquí se concluye que la función de intensidad puede ser estimada por:

$$\hat{\lambda}(x) = \hat{\beta}\, \hat{f}(x),$$

Para $\hat{\beta}$ estimador de $\int \lambda(u)du$ y $\hat{f}(.)$ el de la función $f(.)$, obtenido al tratar $t_1, ..., t_n$ como muestras de una variable aleatoria con densidad $f(.)$. Si los puntos ocurren de la forma:

$$s < t_1 < t_2 < ... < t_n < s + t,$$

entonces la función de verosimilitud estará definida por:

$$L(\beta, f) = f(t_1, t_2, ..., t_n ; n/ \lambda (.))$$

$$= P [N(s+t) - N(s) = n/ \lambda (.)] \; f(t_1, t_2, ..., t_n/n, \lambda (.))$$

y aplicando conclusiones previas:

$$L (\beta, f) = \frac{\beta^n \; Exp (-\beta)}{n!} \prod_{i=n}^{n} f(t_i),$$

donde $\beta = \int \lambda (u)du$

Cuando el modelo exponencial polinómico:

$$\lambda (x) = Exp (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2), \; \alpha_2 < 0$$

es apropiado para la función de intensidad, es razonable tomar la función de densidad de una normal con media μ y varianza σ^2. Es decir,

$$f(x) = (\sigma^2 \, 2\pi)^{-1/2} \; Exp [- \frac{1}{2 \sigma^2} (x - \mu)^2] \qquad -\infty < x < \infty$$

A mayor tamaño de la longitud del intervalo (s, s+ t] más razonable resulta está suposición.

Como:

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i) = [2 \pi \sigma^2]^{-n/2} \; Exp [- \frac{1}{2 \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \mu)^2],$$

la función de verosimilitud se convierte en:

$$L (\beta, f) = \frac{\beta^n \; Exp (-\beta)}{n!} [2\pi \; \sigma^2]^{-n/2} \; Exp [- \frac{1}{2 \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2 + n(\overline{t} - \mu)^2]$$

donde $\overline{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i$.

Para determinar los estimadores de máxima verosimilitud, primero se halla log L(β, f) y luego se encuentran las 3 ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \operatorname{Log} L(\beta, f)}{\partial \beta} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \operatorname{Log} L(\beta, f)}{\partial \mu} = 0 ,$$

y,

$$\frac{\partial \operatorname{Log} L(\beta, f)}{\partial \sigma^2} = 0 .$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen valores para los estimadores:

$$\hat{\beta} = n ,$$

$$\hat{\mu} = t ,$$

y,

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 / n ,$$

donde $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2$.

Usando estos resultados, y haciendo:

$$\lambda (x) = \operatorname{Exp} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) = \beta . (2\pi \sigma^2)^{-1/2} \operatorname{Exp} [- \frac{1}{2 \sigma^2} (x - \mu)^2] ,$$

se encuentran los estimadores deseados para α_0, α_1 y α_2 :

$$\alpha_0 = \log(n) - (1/2) \log (2 \pi \sigma^2) - (1/2) \hat{\mu}^2 \hat{\sigma}^{-2} ,$$

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\mu} \hat{\sigma}^{-2} ,$$

$$\hat{\alpha}_2 = \sigma^{-2} / 2 .$$

En esta sección se estimó la función de intensidad λ (.) por

$$\hat{\lambda} (x) = \beta \hat{f} (x) .$$

Como sólo se tienen puntos $t_1, t_2, ..., t$ en el intervalo $(s, s + t]$, y la densidad normal está definida sobre todo R, es más conveniente trabajar con la densidad normal truncada para la estimación de f(.). Así, cuando el modelo

$$\lambda(x) = \mathrm{Exp}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)$$

parezca ser apropiado (con $\alpha_2 < 0$), se tomará como estimativo de f(.) la función normal truncada presentada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\psi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}, \quad a<x<b,$$

donde

$$\psi(x) = (2\pi)^{-1/2} \ \mathrm{Exp}\left(\frac{-x^2}{2}\right). \qquad -\infty < x < \infty$$

y,

$$\phi(x) = \int_x \psi(\mu)\, d\mu .$$

Utilizando, en forma similar, el procedimiento anterior para determinar estimadores de máxima verosimilitud, se encuentra que $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ deben satisfacer las ecuaciones:

$$\hat{\beta} = n,$$

$$\hat{t} = \hat{\mu} - (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \frac{\int_a^b (x-\mu)\,\mathrm{Exp}\left[-1/2\,\sigma^2 (x-\hat{\mu})^2\right] dx}{\phi\left(\frac{b-\mu}{\hat{\sigma}}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\hat{\sigma}}\right)}$$

y,

$$\frac{s^2}{n} = -(\bar{t}-\hat{\mu})^2 + (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-1/2} \frac{\int_a^b (x-\hat{\mu})^2\,\mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}(x-\hat{\mu})^2\right] dx,}{\phi\left(\frac{b-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \phi\left(\frac{a-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}$$

donde $\bar{t}$ y s^2 conservan la misma definición dada previamente. La truncación se haría en el intervalo $(s, s+t]$.

Los estimadores Kernel y Kernel–Truncado.

1. *El método Kernel.*

El método Kernel para estimar funciones de densidad ha sido desarrollado, principalmente, a partir de los trabajos de M. Rosenblatt (9) y E. Parzen (8). Este método se basa en que si $t_1, t_2, ..., t_n$ son observaciones de una variable aleatoria con función de densidad $f(.)$, esta función será estimada por:

$$\hat{f}_n(x) = \int \frac{1}{h} K\left(\frac{x-y}{h}\right) dF_n(y)$$

$$= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-t_i}{h}\right)$$

Donde

$$F_n(y) = \frac{1}{n} [\, t_1, t_2, ..., t_n < y \,]$$

y, k(.) es la función Kernel la cual cumple las siguientes propiedades:

a. $\int |k(y)|\, dy < \infty$,

b. $\sup_{-\infty < y < \infty} |K(y)| < \infty$,

c. $\lim_{y \to \infty} |y\, K(y)| = 0$,

d. $K(y) \geqslant 0$,

e. $\int K(y)dy = 1$.

Y además, $h = h(n)$ satisface las condiciones:

a. $\lim_{n \to \infty} h(n) = 0$,

b. $\lim_{n \to \infty} n\, h(n) = \infty$.

De lo anterior es inmediato que:

$$\hat{f}_n(x) \geqslant 0, \quad x \in R$$

y que,

$$f_n(x)dx = \int \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K(\frac{x - t_i}{h}) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{nh} \int k(\frac{x - t_i}{h}) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int K(y)dy = 1 ,$$

Con las integrales definidas sobre todos los reales.

Por lo tanto este estimador se comporta como si fuese una función de densidad. Esto, sin embargo, no es indicativo alguno para considerarlo un buen estimador.

Muchos autores lo han estudiado en detalle. R. Tapia y J. Thompson (11) tienen un extenso estudio sobre él. M. Rosenblatt (9) y E. Parzen (8) muestran cómo a pesar de que $f_n(.)$ es un estimador sesgado, es asintóticamente insesgado para todo $x \in R$; y muestran además, que:

a. $\lim_{n \to \infty} [\operatorname{Var} \hat{f}_n(x)] = 0$

b. $\lim_{n \to \infty} E [\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = 0$.

Por su parte E. Nadaraya (7) estudiando la rapidez de la convergencia de $f_n(.)$ hacia $f(.)$ encontró que valores grandes de s aceleran esta convergencia en media cuadrática luego de conocer que:

$$\lim_{n \to \infty} n^k E [\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = 0 \quad \text{con } k = \frac{-2s}{1 + 2s} .$$

2. *El Kernel en la función de intensidad.*

Como se estudió en la pág. 133, la función de intensidad puede ser estimada por:

$$\hat{\lambda}(x) = \beta \hat{f}(x)$$

Si se reemplaza a β por su estimador de máxima verosimilitud n, y a f(x) por la densidad $f_n(.)$ del método Kernel, la función de intensidad puede ser estimada por:

$$\hat{\lambda}(x) = n \hat{f}_n(x) \qquad x \in (s, s+t]$$

cuando el intervalo sea suficientemente grande.

Utilizando el Kernel Normal y teniendo en cuenta que se han observado los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de un proceso de Poisson no homogéneo, la función de intensidad $\lambda(.)$ puede ser estimada por:

$$\lambda(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2h^2}(x - t_i)^2 \right] ; \; x \in (s, s+t] .$$

Se puede probar con facilidad que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E[\hat{\lambda}(x)]}{n} = f(x) = \frac{\lambda(x)}{\int_s^{s+t} \lambda(\mu)du}$$

Las propiedades de este estimador no están completamente determinadas; Dyner y Pérez (3) han estudiado algunas, pero queda todavía trabajo por adelantar.

El siguiente ejemplo permite comparar el método encontrado con los tradicionales mencionados.

EJEMPLO

La tabla 1 a continuación muestra la fecha de los *congelamientos mayores* del Lago Constanza.

875, 895
928,

1074, 1076,
1108,
1217, 1227, 1277,
1323, 1325, 1378, 1379, 1383,
1409, 1431, 1435, 1460, 1465, 1470, 1479, 1497,
1512, 1553, 1560, 1564, 1565, 1571, 1573,
1684, 1695,
1763, 1776, 1788, 1796,
1830, 1880,
1963.

TABLA 1. Años de *congelamientos mayores* del Lago Constanza.

El estimador exponencial polinómico fue estudiado para estos datos por V. W. Steinijans (10), quien encuentra:

$\hat{\alpha}_0 = -0.333059, \quad \hat{\alpha}_1 = 0.648068 \quad y \quad \hat{\alpha}_2 = -0.529.$

Utilizando el estimador Normal encontramos que

$\hat{\alpha}_0 = -0.969, \qquad \hat{\alpha}_1 = 0.921 \qquad y \quad \hat{\alpha}_2 = -0.078,$

pero al hacer uso del estimador Normal truncado observamos que

$\hat{\alpha}_0 = -0.333064, \quad \hat{\alpha}_1 = 0.648069 \quad y \quad \hat{\alpha}_2 = -0.5289.$

Es decir, no hay diferencia si sólo consideramos las 3 primeras cifras significativas del primer y tercer conjunto de estimativos.

La gráfica 1 muestra la diferencia entre el estimador Normal y el estimador exponencial polinómico para los datos del Lago Constanza. En la gráfica 2 vemos la diferencia entre el estimador Kernel (para diferentes valores de h) y el estimador exponencial polinómico.

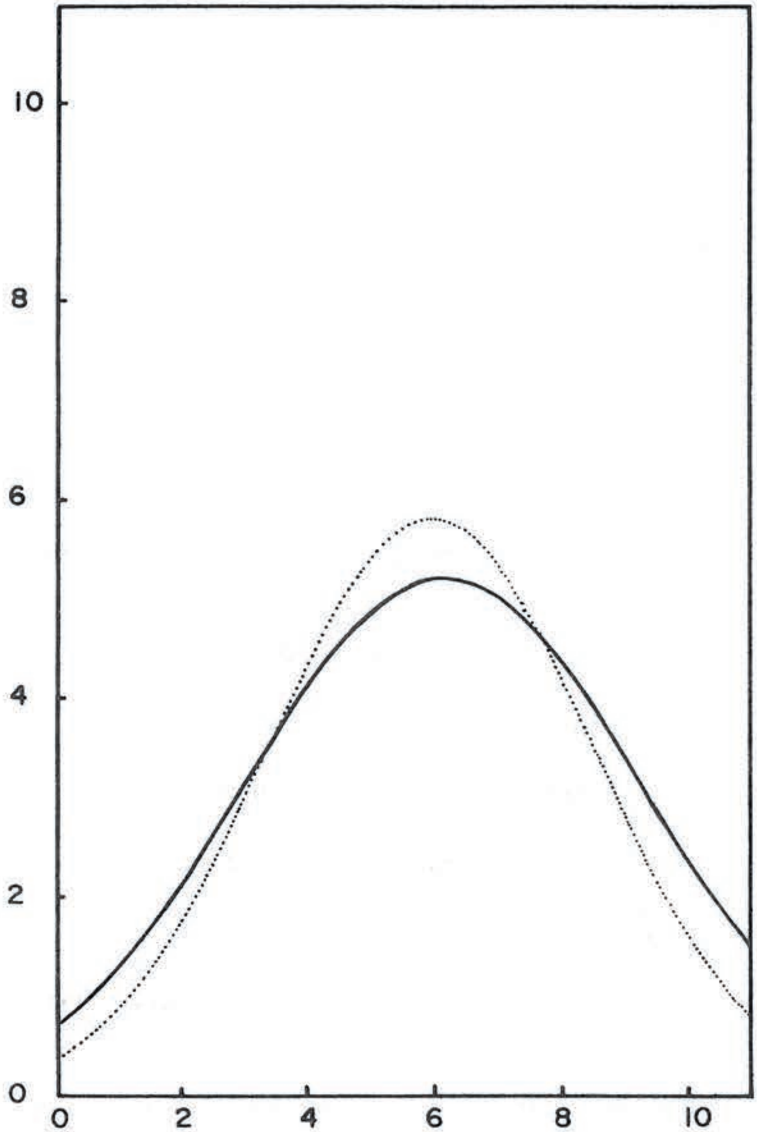

GRAFICO 1

El estimativo exponencial polinómico de la función de intensidad está dado con línea continua, y el Normal con discontinua.

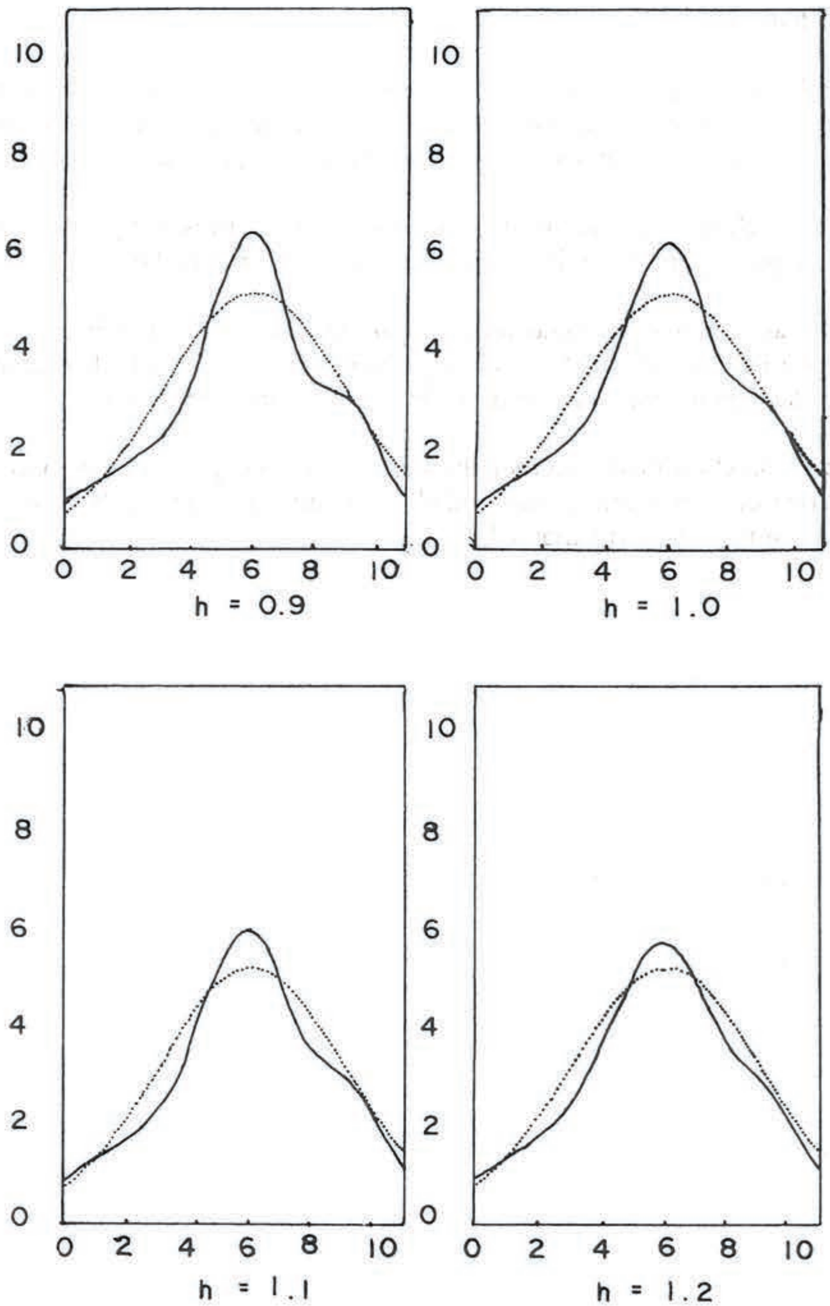

GRAFICO 2

El estimativo exponencial polinómico de la función de intensidad está dado con línea discontinua, y el Kernel con línea continua.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han examinado básicamente tres métodos para la estimación de la función de intensidad de un proceso de Poisson no-homogéneo. Estos permiten el cálculo de, prácticamente, cualquier intensidad de los procesos en cuestión.

El primero de ellos, el exponencial polinómico, aunque presenta problemas en su parte de cómputo, permite un buen ajuste a cualquier serie de datos.

El segundo, aquí conocido como método Normal, en realidad puede ser utilizado para una amplia gama de distribuciones parametrizadas. La parte de cálculo puede ser sencilla dependiendo de la familia de distribuciones empleada.

Por último, con el estimador Kernel obtenemos completa generalidad en presentación analítica de la función de intensidad; su debilidad radica en la arbitrariedad para la determinación de la variable h.

BIBLIOGRAFIA

(1) *E. Cinlar. Introduction to Stochastic Processes. Prentice-Hall, inc. New Jersey. 1976.*

(2) *D. R. Cox and P. A. Lewis. The statistical analysis of series of eventos. Methuen, London. 1966.*

(3) *I. Dyner y L. Pérez. Tiempos en Poisson. Sometido a publicación. 1983.*

(4) *V. Epanechnikov. Nonparametric estimates of a multivariate probability density. Theory of Probability and its applications. 14, 153-58. 1969.*

(5) *J. Grandell. On stochastic processes generated by a stochastic intensiy function. Skand. Aktuar. Tidskrift. 54, 204-40. 1971.*

(6) *P. A. Lewis. Recent results in the statistical analysis of univariate point processes. Stochastic Point processes. Wiley, 1972.*

(7) *E. A. Nadaraya. On the integral mean square error of some non-parametric estimates for the density function. Theory of Probability and its applications. 133-41, 1974.*

(8) *E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. Annals of Math. Stat. 33, 1065-76. 1962.*

(9) *M. Rosenblatt. Remarks on some parametric estimates of a density function. Annals of Math. Stat. 27, 832-35, 1956.*

(10) *V. W. Steinijans. A stochastic point model for the ocurrence of major freezes in Lake Constance. Journal of the Royal Statistical Society (Series C) 25, 58-63. 1976.*

(11) *R. A. Tapia and J. R. Thompson. Non parametric probability density estimation. The johns Hopkns University Press. 1978.*