

# Planeación de la operación de sistemas Hidrotérmicos

**Ricardo Cuervo Arriagada**  
**Ingeniería Eléctrica U. de A.**

## **Resumen**

La operación óptima de sistemas hidrotérmicos, es un problema complejo que requiere tanto de conocimientos adecuados de análisis de sistemas de potencia como de herramientas matemáticas de optimización de nivel avanzado y de buenos conocimientos de métodos computacionales.

Haremos aquí una exposición de la teoría de la optimización, aplicada a despacho hidrotérmico tanto a largo y mediano plazo, como el problema del despacho de carga.

Presentaremos los algoritmos computacionales adecuados para implementar en el computador y en un próxima entrega mostraremos una aplicación a un sistema hidrotérmico real.

## PLANIFICACION DE LA OPERACION DE SISTEMAS DE POTENCIA

La planificación y operación de sistemas de potencia es un problema complejo que requiere no sólo de conocimiento adecuado de métodos computacionales sino de un conocimiento detallado del sistema en estudio, como por ejemplo equipos existentes o por instalar en el horizonte en estudio, los costos de operación, rango y horizonte de optimización, se debe conocer el tipo de centrales, térmicas e hidráulicas, el comportamiento de la hidrología en el pasado y una proyección adecuada en el horizonte o período analizado, las curvas de demanda en el pasado y su proyección hacia adelante, las pérdidas, las capacidades de generación, y sus restricciones inherentes, costos de generación térmica y su equivalente hidráulica, etc. También es importante anotar que este tipo de estudio es imposible hacerlo sin una adecuada ayuda computacional, esto se debe a la gran cantidad de información que se debe consultar, y como de por sí los métodos de computación usados son iterativos esto hace que los cálculos sean complejos y se repitan una y otra vez hasta lograr la minimización que se busca.

El problema lo podemos dividir en cuatro etapas:

### 1— PLANIFICACION DE LA OPERACION

Esto se hace en dos procesos o etapas diferentes:

- 1.1. Estudios a largo plazo (mayores a un año).
- 1.2. Estudios a mediano plazo (un mes a un año).

### 2— DESPACHO DE CARGA

El predespacho de carga permite resolver el problema diario pero con suficiente anticipación, como la selección de unidades en servicio; se puede determinar el control de regulación y su margen, así como la reserva rodante.

Se llama despacho de carga a las decisiones que toma el operador frente a los instrumentos de medida y control, hoy día tiende a ser un proceso automático con ciclo cerrado pero siempre antes de cualquier operación interviene la voluntad humana para determinar si se toma o no la decisión propuesta.

### 3— CONTROL AUTOMATICO DE LA GENERACION

Este proceso como su nombre lo dice es totalmente autónomo y consta de dos fases:

3.1. Control de frecuencia.

3.2. Control de generación.

Haremos ahora un desarrollo más detallado de cada una de las dos primeras etapas, ya que la tercera por ser un proceso automático no entra realmente en la parte de los sistemas de potencia, si no que el estudio se puede hacer a la luz de los modernos métodos de control electrónico automático.

### 1— PLANIFICACION DE LA OPERACION

La diferencia entre uno y otro es la identificación de las centrales de filo de agua y la certeza con la que se conocen las predicciones de demanda hidrológica.

— Planificación a largo plazo.

Va desde un año a 15 años, se debe correr antes un programa de mantenimiento de equipos y centrales con operación simulada y con predicciones de demanda.

Además se programan centrales en operación con sus capacidades probables de energía y potencia, en este análisis interesan las centrales con grandes embalses cuyas variables de interés son cotas, gastos de afluentes y gastos de descarga.

— Planificación a mediano plazo.

Es una revisión del programa de mantenimiento en un plazo más corto y se programan las centrales con capacidad de regulación similar al período considerado (entre dos semanas y un año).

Veamos la siguiente tabla donde se enumeran las diferencias básicas entre el despacho de carga y la planificación.

#### Despacho de Carga

— Hidrología definida.

— Hay restricciones de energía hidráulica debido a la hidrología definida y se puede fijar una cantidad de energía a utilizar en cada embalse.

- La cota se considera constante.
- Demanda horaria constante en cada hora, implica una sola variable para cada hora.
- Las unidades hidráulicas que se desean utilizar han sido definidas en un paso anterior por lo tanto el sistema está completamente definido.

**Planificación de la operación**

- Hidrología no definida, sólo se conocen las variables hidrológicas al comienzo del horizonte en estudio.
- No hay restricción de energía pues la hidrología no está definida, de ahí es necesario reemplazar esta restricción por otras que son:
- Restricción de cota ( $h_{min} < h < h_{max}$ ).
- Restricción de caudal turbinado ( $q_{min} < q < q_{max}$ ).
- Cota variable.

$$h(t) = h_0 + \int_0^T \frac{1(i(t) - q(t)) dt}{S}$$

$i(t)$  = afluente.  
 $q(t)$  = caudal turbinado.  
 $h(t)$  = cota.

- Se considera en un período la demanda media y la demanda máxima.
- Las unidades hidráulicas no están definidas, y las centrales están semi-definidas. Se incluye entonces un requisito de mantenimiento.

Desarrollaremos a continuación algunos fundamentos matemáticos de optimización para solucionar los problemas de la planificación de la operación.

**1.1. Planificación de la Operación a Largo Plazo**

En este caso se pretende optimizar (mínimo) una función objetivo para una central hidráulica y/o térmica.

$$F = \underset{q}{\text{Min}} E \sum_{k=1}^T \frac{C_k(q, h, i)}{(1+a)^k}$$

donde E = Esperanza.  
 q = Caudal turbinado.  
 i = Caudal afluente.  
 h = Cota.  
 T = Número de períodos.  
 a = Interés.  
 $C_k$  = Costos que es  $f(q, h, i)$

Si i tiene una distribución discreta con m valores posibles P(i) entonces:

$$F = \text{Min}_q \sum \sum \frac{C_k(q, h, i) P(j)}{(1+a)^k}$$

Con las siguientes restricciones de Energía.

$$E_d(k) = E_t(k, i) + E_h(k, i)$$

$E_d(k)$  = Energía demandada.

$E_t(k, i)$  = Energía térmica.

$E_h(k, i)$  = Energía hidráulica.

y además:

$$P_{j\min} < P_j < P_{j\max}$$

$$h_{j\min} < h_j < h_{j\max}$$

$$q_{j\min} < q_j < q_{j\max} \quad j \text{ central } j$$

El modelo del embalse es.

$$h(k+1) = h(k) + \frac{1}{s} (1 - q_k) \Delta t$$

El modelo de potencia.

$$P_j = P(q, \eta, i) \quad \eta : \text{Eficiencia}$$

Para los costos

$$C_k = C_k(E_t^*) = C_k(E_d(k) - E_h(q, h, i))$$

Aquí se puede usar el modelo determinístico en el cual se considera la función objetivo sin probabilidades o el modelo probabilístico que si las considera.

Para resolver este problema se usa la programación dinámica estocástica.

Consiste en resolver el problema por partes por medio de la ecuación de recurrencia de la programación dinámica.

Y es

$$(1.) \quad f_k(h^k, q^k, i^k) = \text{Min}_q \left( E(C_k(q^k) + \frac{f_{k+1}(h^k, q^k, i^k)}{(1+a)^k} ) \right)$$

$$\text{donde} \quad h^{k+1} = h^k + \frac{1}{s} (i_r^k - q^k) \quad r = 1, m$$

Para el último período

$$(2.) \quad f_T(h^T) = \text{Min}_q (C_T(q^T))$$

La solución se desarrolla de la siguiente forma:

- Se parte evaluando la ec. 2 para  $h^T$  posibles.
- Se resuelve la ec. 1 para cada  $h$  posible en el período  $T-1$  y así sucesivamente hasta el primer período en el cual se tiene.

$$f_1(h^1) = \text{Min}_q (C_1(q^1) + f_2(t_1(h^1, q^1, l^1)))$$

$h^1$  = es conocido en condiciones iniciales.

y  $f_2(t_1(h^1, q^1, l^1))$  se ha determinado del paso anterior.

Se determina así el óptimo y mediante la ecuación de estado, se determina  $h$  para los siguientes valores.

$$h^2 = h^1 + \frac{1}{s} (i_r^1 - q^1)$$

Ventajas.

- Este método permite considerar todo tipo de restricciones dinámicas y estáticas.
- Pueden usarse funciones de costo lineal, no lineal, analíticas y no analíticas.

Desventajas.

- Grandes requerimientos computacionales.
- Se supone que el óptimo parcial en un período es independiente del óptimo parcial en otro período, por lo tanto el proceso total es un proceso de Markov.
- Se minimiza con respecto a la Energía pero debe satisfacerse la restricción de potencia demandada.

## 1.2. Planificación de la Operación a Mediano Plazo

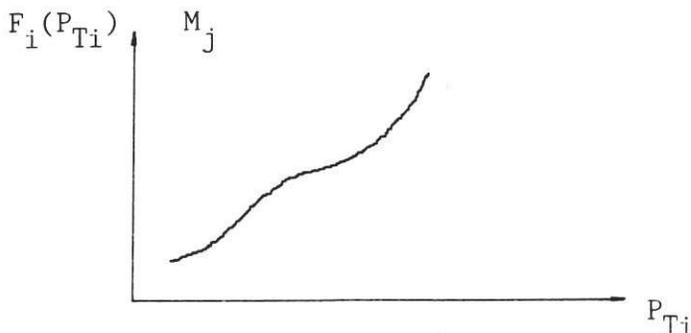
Consideremos un caso típico de un año, aunque la definición del intervalo puede obedecer a criterios muy distintos, y definir tiempos más largos o más cortos de acuerdo con las necesidades y objetivos del estudio.

El problema consiste en minimizar el costo de generación térmica, mediante una función objetivo.

$$F = \text{Min} \int_0^{T_m} \sum_{i=1}^n F_i(P_{Ti}) dt$$

donde  $P_{Ti}$  es la potencia térmica media en el período del intervalo considerado para la central  $i$ .  $F_i(P_{Ti}) =$  Función de costo de la generación.

La función de costo de la generación es particular de cada máquina y está dada en forma de curva que tiene forma semejante a la figura siguiente.



Además el modelo de la central térmica se puede representar por las siguientes expresiones:

$$E_{pot} = \eta \text{ Peso (Mj)}$$

$$\text{Costo} = C_x \text{Peso} = C_x E_{pot} / \eta$$

$E_{pot}$  = Energía Potencial  
 Peso = Peso del combustible.

La ec.(1) tiene las siguientes restricciones:

a. Balance de potencias.

$$\sum_1^n P_{Ti} + \sum_1^m P_{Hj} = P_d + P_L$$

b. Restricción de generación.

$$P_{Ti}^{\min} < P_{Ti} < P_{Ti}^{\max} \quad i = 1, n$$

$$P_{Hj}^{\min} < P_{Hj} < P_{Hj}^{\max} \quad j = n+1, n+m$$

c. Restricción de cota.

$$H_j = h_{0j} + \int_0^T \frac{1}{s} (i_j - q_j) dt$$

$$H_j^{\min} < h_j < h_j^{\max} \quad j = n+1, n+m$$

d. Restricción de reactivos.

$$Q_j^{\min} < Q_j < Q_j^{\max} \quad j = 1, n+m$$

Además se deben tener en cuenta las pérdidas por transmisión y estas se pueden evaluar con una de las expresiones siguientes.

a. Fórmula de George

$$P_L = \sum_{i,j}^{m+n} P_i B_{ij} P_j$$

b. Fórmula de Kron.

$$P_L = B_o + \sum_{i=1}^{n+m} B_i P_i + \sum_{i,j=1}^{n+m} P_i B_{ij} P_j$$

Como sabemos que  $P_{Hj}$  es una función de  $q_j$  y de  $h_j$  y el volumen turbinado es:

$$V_j = \int_0^T q_j(t) dt$$

si en el análisis consideramos como variable independiente a  $P_{Ti}$  y  $V_j$  la función objetivo será.

$$F^* = \text{Min} \int_0^T \left( \sum_1^n F_i(P_{Ti}) + \lambda \left( \sum_1^n (P_{Ti} + P_{Hj}) - P_d - P_L \right) \right) dt$$

$\lambda$ : se conoce como multiplicador de Lagrange y se define como costo marginal de la demanda.

Si tenemos la siguiente función objetivo.

$$G = \text{Min} \int_0^T H dt$$

entonces de la ecuación de Euler-Lagrange se debe cumplir que:

$$\frac{\partial H}{\partial X_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{X}_1} \right) = 0 \quad \text{donde } X_1 = \frac{dX_i}{dt}$$

De acuerdo con lo anterior se definen para las centrales térmicas.

$$H = F^* \quad \text{y} \quad X_1 = P_{Ti} \quad \text{y} \quad \dot{X}_1 = \frac{dP_{Ti}}{dt}$$

Y aplicamos la condición de Euler—Lagrange a la expresión (3) entonces.

$$\frac{\partial F^*}{\partial P_{Ti}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F^*}{\partial \left( \frac{dP_{Ti}}{dt} \right)} \right) = 0$$

se llega a

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_{Ti}} + \frac{\partial P_L}{\partial P_{Ti}} \lambda - \lambda = 0 \quad \text{Ya que } F^* \text{ no depende de } P_{Ti}$$

o sea

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_{Ti}} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Ti}} - 1 \right) = 0 \quad \text{ecuación de coordinación térmica}$$

Si definimos ahora para la central hidráulica

$$x_i = V_j \text{ entonces } \frac{\partial V_j}{\partial t} = q_j = V_j$$

Obtenemos

$$\lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial V_j} - \frac{\partial P_{Hj}}{\partial V_j} \right) - \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{\partial P_L}{\partial q_j} - \frac{\partial P_H}{\partial q_j} \right) \lambda \right) = 0 \quad j = 1, m$$

pero

$$\frac{\partial P_L}{\partial V_j} = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} \cdot \frac{\partial P_{Hj}}{\partial V_j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P_L}{\partial q_j} = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} \cdot \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j}$$

reemplazando en (4)\*

$$\lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial V_j} - \frac{d}{dt} \left( \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j} \right) = 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial P_{Hj}}{\partial V_j} = \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial V_j}$$

ahora bien.

$$h_j = h_o + \frac{1}{S_j} \int_0^T (i_j - q_j) dt$$

entonces

$$\frac{\partial h_j}{\partial V_j} = \frac{1}{S_j} \quad \text{ya que} \quad \int_0^T (i_j - q_j) dt = V_j$$

entonces de (5)

$$\lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j} \cdot \frac{1}{S_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial h_j} - \frac{d}{dt} \left( \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j} \right) = 0$$

definiendo

$$\mathcal{L}_j = - \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j}$$

entonces (6) queda

$$-\frac{\gamma_j}{S_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial h_j} + \frac{d}{dt} \gamma_j = 0 \quad j=1,m$$

la solución de esta ecuación diferencial es

$$\gamma_j(t) = \gamma_{oj} e^{-\frac{1}{S_j} \int \left( \frac{\partial q_j}{\partial h_j} \right) dt}$$

se conoce con el nombre de **Coefficiente de Conversión Hidráulica de la central j**.

De la definición de  $\gamma_j$  se tiene que

$$\gamma_j = -\lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) \frac{\partial P_{Hj}}{\partial q_j}$$

que de otra forma

$$\gamma_j \frac{\partial q_j}{\partial P_{Hj}} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) = 0 \quad j=1,m$$

que se conoce con el nombre de **ecuación de coordinación hidráulica de la central j**.

Si escribimos en una sola expresión las ecuaciones de coordinación térmica (4) y coordinación hidráulica (7)

Se llega a

$$f_i = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \quad i=1, n+m$$

en que  $\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \frac{\partial F_i}{\partial P_{Ti}}$  para  $i=1, n$  (térmicas)

y

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \gamma_i \frac{\partial q_i}{\partial P_{Hi}} \quad i=n+1, n+m \quad (\text{hidráulicas})$$

Las ecuaciones de coordinación térmica e hidráulica se deben resolver por métodos iterativos.

## Método Iterativo de Newton-Raphson.

El sistema de ecuaciones anteriores se debe resolver por algún método iterativo adecuado, veamos el método como Newton-Raphson de gran utilidad en estos casos.

El proceso a seguir es el siguiente.

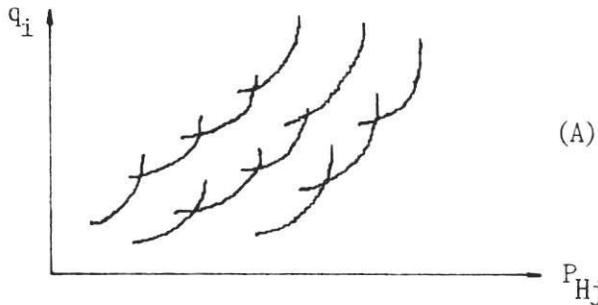
a- Se discretiza el horizonte en estudio e intervalos.

b- Se definen las ecuaciones de coordinación según la ecuación (8)

$$f_i = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \quad i=1, n+m$$

$F_i = \text{Costo } (P_i)$  **función de costos**

existe una relación funcional de la siguiente forma.



definamos

$$g = P_d + P_L - \sum_{i=1}^{m+n} P_i$$

se define la matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} J_{fp} & J_{f\lambda} \\ J_{gp} & J_{g\lambda} \end{bmatrix}$$

donde

$$J_{fP} = \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \qquad J_{f\lambda} = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}$$
$$J_{gP} = \frac{\partial g}{\partial P} \qquad J_{g\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \lambda}$$

c— Se utiliza el método de Newton-Raphson en el cual debemos obtener.

$$\begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f^k \\ \Delta g^k \end{bmatrix}$$

d— Se inicia el proceso con valores tentativos para todas las variables considerando el primer intervalo y la iteración  $k = 1$

e- Se determina  $\Delta P^k$  y  $\Delta \lambda^k$

f- Se verifican las restricciones

$$P_i^{\min} \leq P_i^k \leq P_i^{\max}$$

g— Se determina de la curva (A).

$$q_j = f(P_{hj}, h_j)$$

h— Se verifica restricción del caudal turbinado.

i— Se determina

$$h_j = h_{j0} + \frac{1}{S_j} (i_j - q_j) \Delta t$$

j— Se verifica restricción de cotas

$$h_j^{\min} \leq h_j \leq h_j^{\max}$$

k— Se vuelve a iterar desde 'b' hasta que haya convergencia  $\Delta f \leq Eps, \Delta g \leq Eps$   
y se obtiene  $q_j$  y  $h_j$

para el período siguiente.

l. Se evalúa  $\delta_j = \gamma_{oj} e^p$ , en que  $p = \frac{1}{S_j} \left( \frac{\partial q_j}{\partial h_j} \right) \Delta t$

m— Se pasa al siguiente período y se repite desde b.

n— Se compara  $h_j^T$  con  $h_j$  especificado

si  $h_j^T > h_j^{esp}$  significa que se podría gastar más agua, entonces se debe disminuir  $\gamma_{oj}$  y entrar nuevamente al proceso de optimización desde a. hasta que

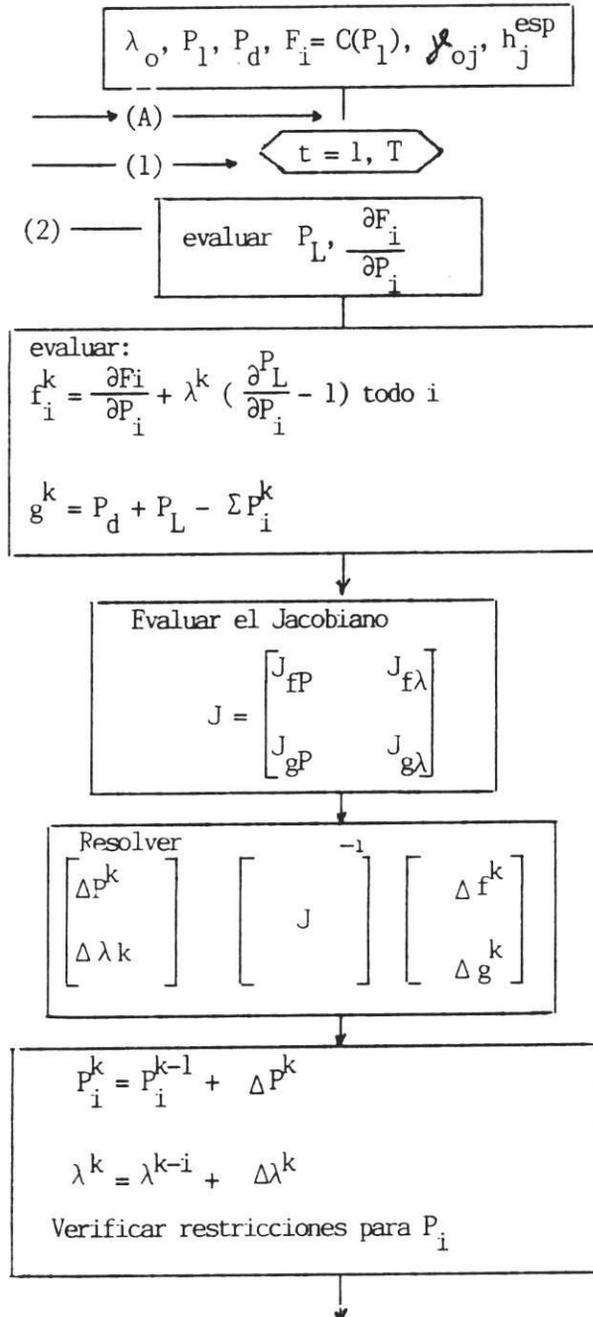
$$h_h^T - h_j^{esp} \leq Eps$$

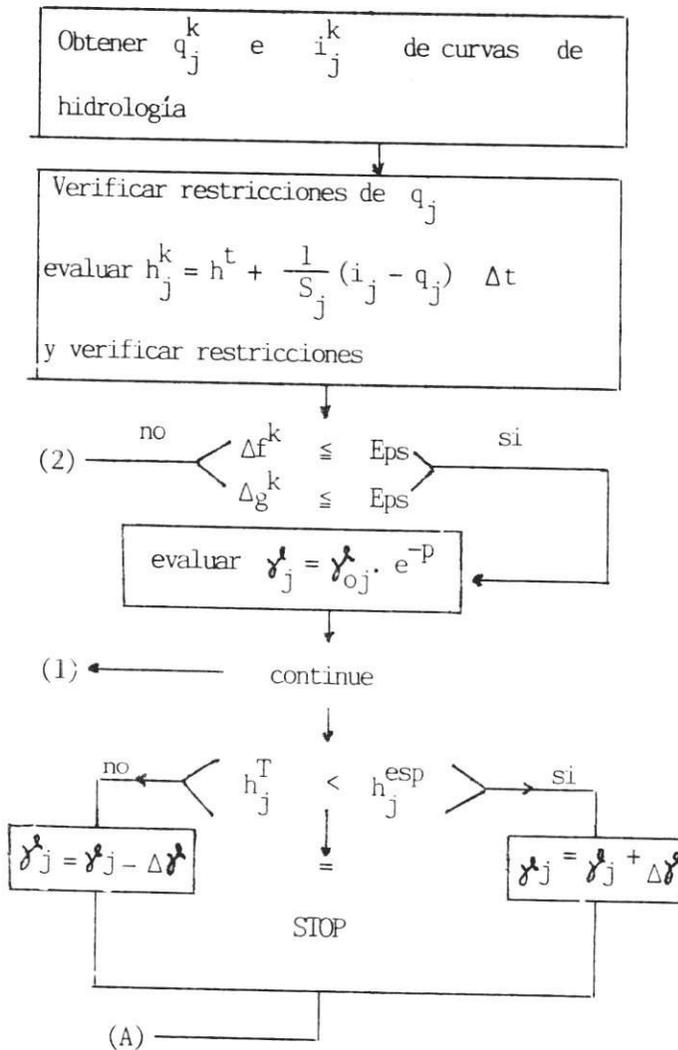
si  $h_j^T < h_j^{esp}$  significa que podría gastar menos agua, se debe aumentar  $\gamma_{oj}$  y repetir el proceso de optimización desde 'a'. hasta que .

$$h_j^T - h_j^{esp} \leq Eps$$

Este método tiene la ventaja de ser rápido en la convergencia pero requiere gran capacidad de computador.

## DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA PLANIFICACION DE LA OPERACION A MEDIANO PLAZO





## 2. DESPACHO DE CARGA

En esta fase corresponde asignar los niveles de generación de las unidades en servicio de un sistema Eléctrico de Potencia para cada intervalo en el horizonte en estudio.

La característica más importante es el uso de modelos determinísticos para la hidrología y la demanda.

Las centrales de embalse se modelan como embalses de cota constante.

### 2.1. Modelos de Centrales

#### 2.1.1. Modelo de central térmica.

Interesa modelos tipo eficiencia entre entrada y salida en el que la entrada es el costo de combustible por hora y la salida es la potencia eléctrica generada en Megawatios.

si  $E_T =$  Energía potencial del combustible en (MJ)

$\eta =$  rendimiento término del combustible por unidad de peso (MJ/kg).

$P =$  peso del combustible (kg).

entonces

$$E_T = \eta P$$

El costo total del combustible será

$$C_T = cP \quad c: \text{costo unitario (\$/Kg)}$$

$P$  Peso (Kg)

entonces

$$C_T = \frac{c}{\eta} E_T$$

y

$$\frac{dC_T}{dt} = F = \frac{c}{\eta} \cdot \frac{dE_T}{dt}$$

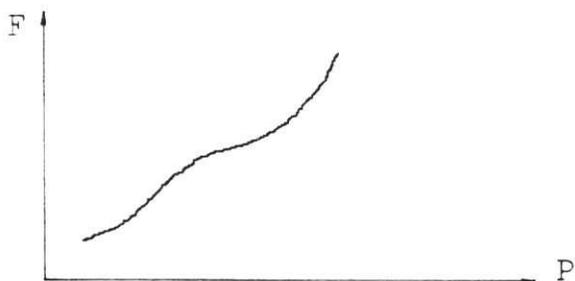
$F$  se conoce como función de costo unitario (\$/hr)

y  $\frac{dE_T}{dt}$  razón de calor

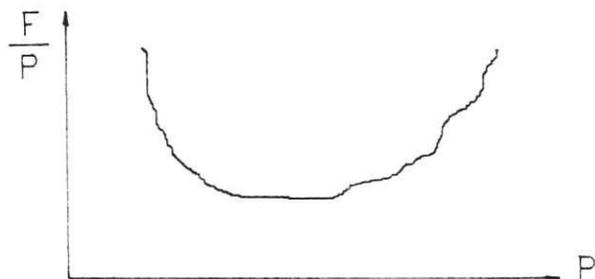
Como se observa  $F$  es inversamente proporcional a la eficiencia.

Las características usuales son:

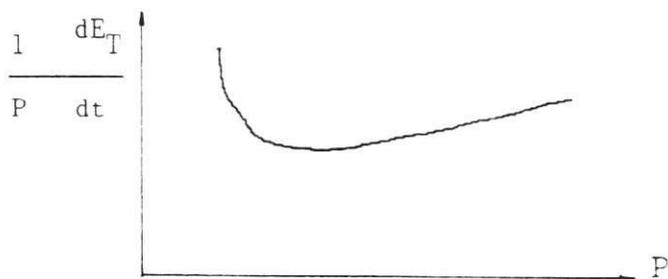
2.1.2. Curva de entrada y salida de una unidad térmica.



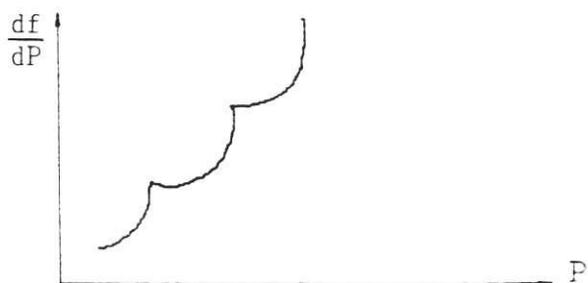
2.1.3. Curva de razón de costo horario medio.



2.1.4. Curva de razón de calor medio (Entregada por el fabricante).



2.1.5. Curva de costo horario marginal.



## 2.2. Modelos de Centrales Hidráulicas

El principal modelo es  $P = f(q,h)$

**q:** Caudal o gasto de turbinación.

**h:** Cota efectiva en metros.

Se puede también ver que

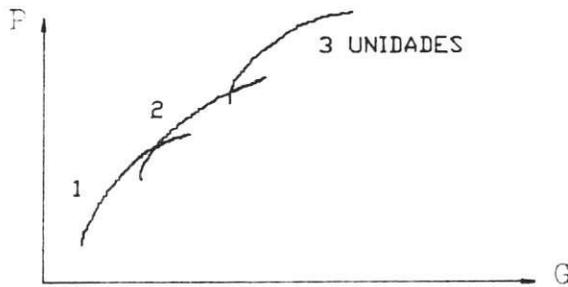
$$P = (\rho gh) q \eta(q, h)$$

en que  $\rho gh =$  presión de la turbina

$\eta(q,h) =$  eficiencia de la turbina.

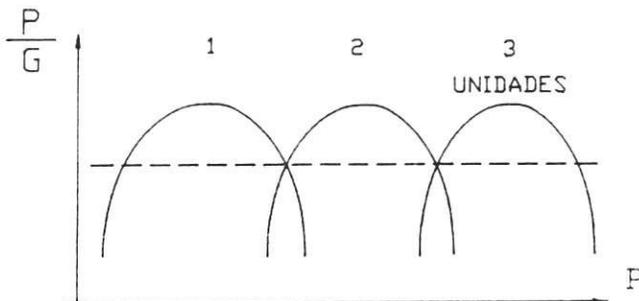
Las curvas características son del tipo eficiencia entre entrada y salida.

### 2.2.1. Curva entrada salida.

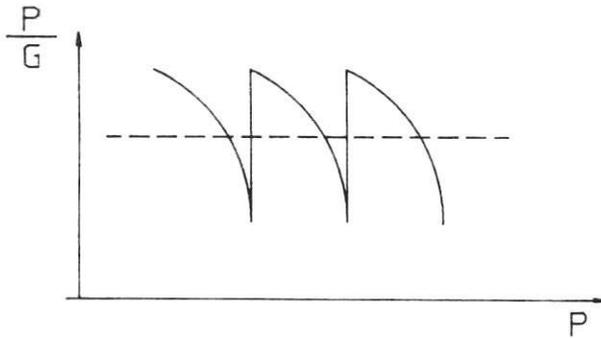


G: Energía potencial hidráulica de descarga por unidad de tiempo, es la homóloga de F.

### 2.2.2. Curva de eficiencia media.



### 2.2.3 Curva de eficiencia marginal.



### 2.3. Modelo de Sistemas

Un sistema son los elementos que unen la generación con las cargas.

#### 2.3.1. Balance de potencia activa sin pérdidas de transmisión.

$$P_d = \sum P_i$$

#### 2.3.2. Balance de activa con pérdidas de transmisión

$$P_d + P_L = \sum P_i$$

para determinar  $P_L$  se usa el método aproximado de los coeficientes  $\beta$  :

##### 2.3.2.1. Fórmula de George.

$$P_L = \sum P_i \beta_{ij} P_j$$

##### 2.3.2.2. Fórmula de Kron

$$P_L = \beta_o + \sum \beta_i P_i + \sum P_i \beta_{ij} P_j$$

Los  $Q(i)$  están incluidos en los coeficientes  $\beta$ .

#### 2.3.3. Balance de potencia activa y reactiva.

$$P_d + P_L = \sum P_i$$

$$\underline{Q}_d + \underline{Q}_L = \sum \underline{Q}_i$$

se determina  $P_L = f(P_i, Q_i)$  con un flujo de carga.

#### 2.4. Despacho de Carga Térmico

Para este caso la función objetivo a minimizar.

$$F = \text{Min } \sum F_i(P_i)$$

que es el costo de combustible sujeto a :

$$P_d + P_L = \sum P_i \quad (\text{condición de igualdad})$$

$$P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max} \quad (\text{condición de desigualdad})$$

Aquí se presentan dos casos:

1. Considerar en forma explícita las relaciones de desigualdad en la función objetivo.
2. Considerar la restricción de igualdad en forma explícita en la función objetivo y la desigualdad se chequea al final y se hacen las correcciones del caso.

Para el primer caso la relación de desigualdad se convierte en una función de igualdad mediante el método de las variables de KUNH-TUCKER.

Estas variables se consideran positivas tal que

$$P_i^{\min} - P_i + \delta_i^2 = 0 \quad i=1,n$$

y análogamente

$$P_i - P_i^{\max} + \bar{\delta}_i^2 = 0 \quad i=1,n$$

Entonces la función objetivo aumentada con estas restricciones de igualdad se convierte en:

$$F^* = \sum F(P_i) + \lambda (P_d + P_L - \sum P_i) + \sum \underline{\mu}_i (P_i^{\min} - P_i + \delta_i^2) + \sum \bar{\mu}_i (P_i - P_i^{\max} + \bar{\delta}_i^2)$$

Derivando con respecto a  $P_i$  la función objetivo para optimizar, se tiene:

$$\frac{\partial F^*}{\partial P_i} = \frac{dF_i}{dP_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) - \underline{\mu}_i + \bar{\mu}_i = 0 \quad l=1, n$$

Se conoce como ecuación de coordinación térmica con restricciones de desigualdad activa. Y además:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda} = \sum P_i - P_d - P_L = 0$$

Las condiciones de exclusión indican si las restricciones son activas o pasivas.

$$(9) \begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial \underline{\mu}_i} = P_i^{\min} - P_i + \delta_i^2 = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial \delta_i} = 2 \underline{\mu}_i \delta_i = 0 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \frac{\partial F^*}{\partial \bar{\mu}_i} = P_i - P_i^{\max} + \bar{\delta}_i^2 = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial \bar{\delta}_i} = 2 \bar{\mu}_i \bar{\delta}_i = 0 \end{cases}$$

Considerando la ecuación 9, si  $\underline{\mu}_i = 0$  entonces  $\delta_i \neq 0$  lo que significa que  $\delta_i > 0$  entonces  $P_i^{\min} < P_i$  esto se cumple siempre, lo que nos indica que  $P_i^{\min}$  no es una restricción activa. Ahora bien si  $\delta_i = 0$  quiere decir que  $P_i^{\min} - P_i = 0$  es decir  $P_i^{\min} = P_i$  lo que indica que  $P_i^{\min}$  es una restricción activa, entonces  $\underline{\mu}_i \neq 0$  es importante y relevante en la optimización.

De la ecuación(10) en foma análoga hay dos casos.

- a. En el caso en que todas las restricciones sean pasivas es decir son iguales a cero para todo  $i$  entonces las ecuaciones de coordinación quedan

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \quad i=1,n$$

$$\text{ó} \quad \frac{1}{\frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda$$

si

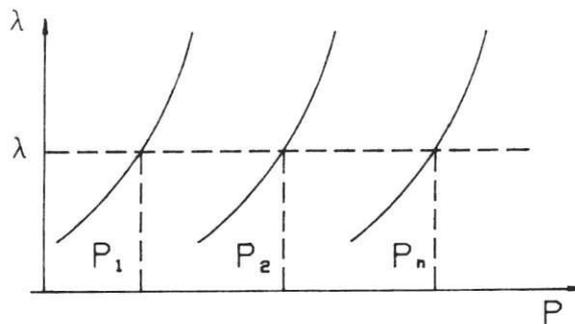
$$L_i = \frac{1}{\left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right)} = \text{factor de penalización}$$

entonces

$$L_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda$$

Estas ecuaciones nos dicen que el óptimo económico del sistema se tiene cuando el costo marginal de todas las centrales ponderadas por su factor de penalización respectivo son iguales entre si e iguales al costo marginal de la demanda ( $\lambda$ )

Graficamente



b. En el caso de que haya una restricción del tipo  $P_i^{\min} = P_i$  para algún  $i = k$  entonces las ecuaciones de coordinación quedan

$$\frac{\partial F_k}{\partial P_k} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_k} - 1 \right) - \underline{\mu}_k = 0$$

y

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \quad \text{para } i \neq k$$

entonces para la central k

$$L_k \cdot \frac{\partial F_k}{\partial P_k} = \lambda + L_k \underline{\mu}_k$$

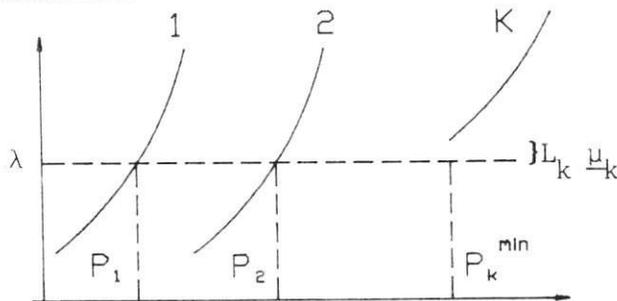
y

$$L_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda$$

Es decir, el óptimo económico se obtiene cuando los costos marginales de todas las centrales, excepto la central k son iguales a  $\lambda$ .

Pero la central k trabaja a un costo marginal mayor en un valor igual a  $L_k \underline{\mu}_k$

Gráficamente.



Similarmente si hay restricción activa del tipo  $P_i^{\max} = P_i$  para la central j entonces

$$\frac{\partial F_j}{\partial P_j} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_j} - 1 \right) + \bar{\mu}_j = 0$$

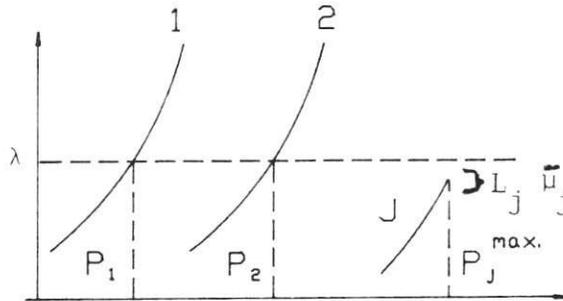
y

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0 \quad i \neq j$$

entonces se tiene que

$$L_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial P_i} = \lambda - L_j \bar{\mu}_j$$

Graficamente.



- c. En el caso en que sólo se consideren restricción de balances de potencia y las restricciones de desigualdad se chequean al final del proceso, cuando se cumpla la restricción, la solución ha sido hallada, en caso que no, se debe seguir iterando hasta conseguir que se cumplan.

## Métodos de Solución

### 2.4.1. Método del Parámetro $\lambda$ .

Este método es un método que requiere para dar el valor adecuado a  $\lambda$  del estado inicial del sistema, de la demanda y de la experiencia.

El proceso consiste en asignarle valores tentativos a  $\lambda$  hasta lograr solucionar las ecuaciones que son:

$$f: L_i \cdot \frac{dF_i}{dP_i} - \lambda = 0$$

$$g: P_d + P_L - \sum P_i = 0$$

el proceso es el siguiente.

a. Cálculo de ZBUS

b. Cálculo de  $P_i, Q_i, V_i$  con el programa de flujo de cargas.

c. Evaluar las pérdidas

$$P_L = f(\alpha, \beta, P, Q)$$

d. Evalúe

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_i} = f(\alpha, \beta, P, Q)$$

e. Estime un valor de  $\lambda$

f. Determine el valor de

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda \left(1 - \frac{P_L}{P_i}\right)$$

g. Determine  $P_i$  de las curvas

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} \text{ vs. } f(P_i)$$

h. Determine  $g = |P_L + P_d - \sum P_i|$

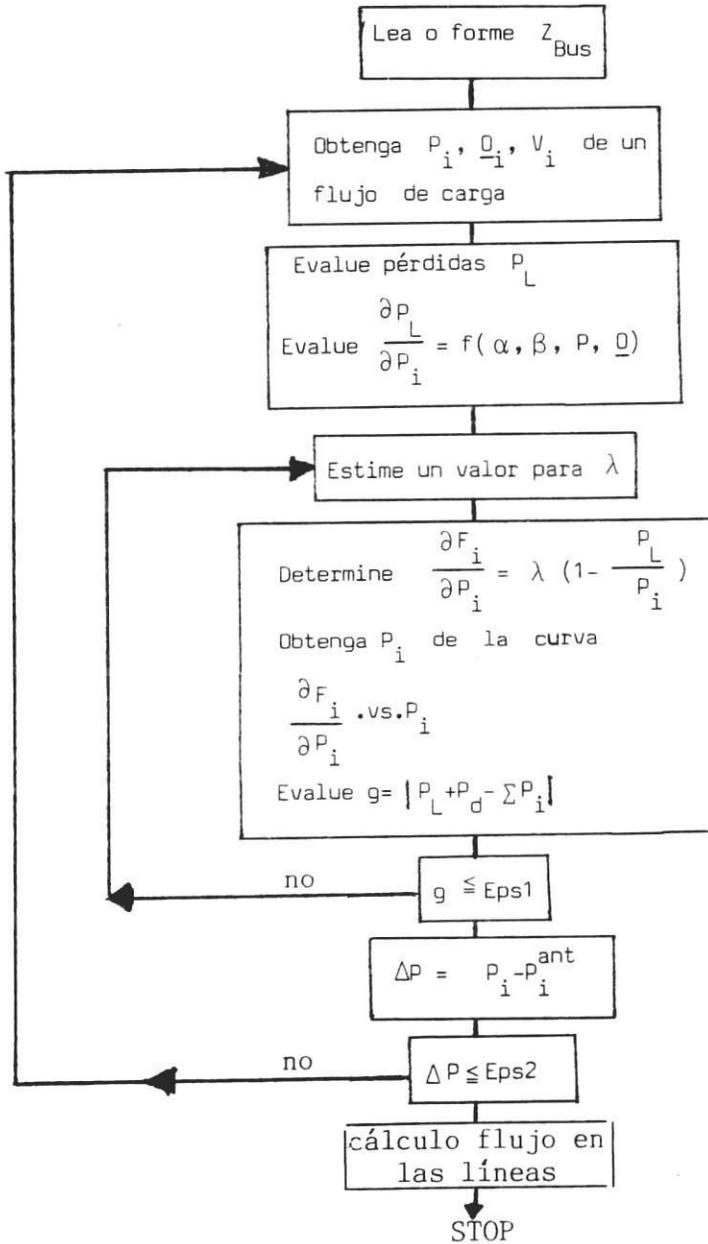
Si  $g > \text{Eps1}$  retorne a “e”

i. Si  $g < \text{Eps1}$  evalúe  $\Delta P = |P_i - P_i^{\text{ant}}|$

j. Si  $\Delta P > \text{Eps2}$  incremente el número de iteraciones y retorne a “b”.

k. Si  $\Delta P < \text{Eps2}$  El problema converge, calcule flujo en las líneas

**Macro-diagrama para el análisis de Despacho de Carga  
térmico-Método del parámetro  $\lambda$**



2.4.2. Método de solución por Newton Raphson. El método se describe a continuación.

a. Definir las funciones

$$f_i = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1)$$

$$g = P_d + P_L - \sum P_i$$

b. Se determina la matriz jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} J_{fp} & J_{f\lambda} \\ J_{gp} & J_{g\lambda} \end{bmatrix}$$

en que

$$J_{fp} = \left[ \frac{\partial f}{\partial P} \right] \quad J_{f\lambda} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right]$$

$$J_{gp} = \left[ \frac{\partial g}{\partial P} \right] \quad J_{g\lambda} = \left[ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right]$$

c. Efectuar sucesivas correcciones a  $\Delta P$  y  $\Delta \lambda$  mediante

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{bmatrix}$$

d. Verificar restricciones.

$$P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}$$

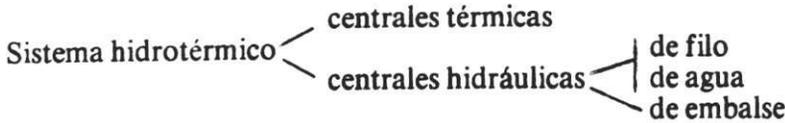
Si  $P_i < P_i^{\min}$  entonces se hace  $P_i = P_i^{\min}$  se elimina la ecuación i del sistema "f<sub>i</sub>" y "g" y la nueva demanda será  $P_d - P_i^{\min}$  y retorne a "a".

Si  $P_i > P_i^{\max}$  entonces se hace  $P_i = P_i^{\max}$  se elimina la ecuación i del sistema "f<sub>i</sub>" y "g" y la nueva demanda será  $P_d - P_i^{\max}$  y retorna a "a".

El proceso se repite hasta obtener  $P_i$  para todas las centrales y para el conjunto y para las centrales donde hubo restricciones.

## 2.5. Despacho de Carga en Sistemas Hidrotérmicos

En un sistema hidrotérmico se deben tener en cuenta algunas consideraciones ya que los componentes son de distinto tipo.



Las centrales de filo de agua, como no tienen capacidad de embalse ni de regulación, se modelan como una central de demanda negativa cuyo valor cambia con el tiempo, es decir.

$$P'_d = P_d - P_{\text{filo de agua}}$$

Por lo tanto  $P'_d$  se debe abastecer con centrales térmicas y de embalse. Es decir:

$$P'_d + P_L = \sum P_T + \sum P_H$$

Centrales de embalse.

Existe una cierta cantidad de energía hidráulica disponible para generar cada día que ha sido definida previamente en los estudios a mediano y corto plazo.

Esto implica que hay restricciones de energía para todo el día. La restricción es:

$$\int_0^t G_j(t) dt = E_{Hj}$$

$$G_j(t) = \text{Potencia hidráulica del embalse } j$$

$$E_{Hj} = \text{Energía hidráulica del embalse } j$$

Luego es necesario optimizar el conjunto para todo el período en el cual se conoce  $E_{Hj}$ .

Por lo tanto la función objetivo es:

$$J = \int_0^t \sum F_i (P_i) dt$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$P_d' + P_L = \sum_1^n P_{iT} + \sum_1^m P_{iH}$$

$P_{iT}$  = Potencia térmica central i.

$P_{iH}$  = Potencia hidráulica central i.

$$\int_0^t G_j (t) dt = E_{Hj}$$

$$P_{iT}^{\min} \leq P_{iT} \leq P_{iT}^{\max}$$

$$P_{iH}^{\min} \leq P_{iH} \leq P_{iH}^{\max}$$

La función objetivo aumentada teniendo en cuenta las restricciones de igualdad y desigualdad es:

$$\begin{aligned}
 J^* = & \int_0^t \left[ \sum F_i(P_i) + \lambda (P_d + P_L - \sum P_{Ti} - \sum P_{Hi}) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^n \mu_j \left( G_j - \frac{E_{Hj}}{T} \right) + \right. \\
 & \left. \bar{\mu}_i (P_{iH} - P_{iH}^{\max} + \bar{\alpha}_{iH}^2) + \alpha_i (P_{iT}^{\min} - P_{iT} + \beta_{iT}^2) + \right. \\
 & \left. \alpha_i (P_{iT} - P_{iT}^{\max} + \bar{\beta}_{iT}^2) \right] dt
 \end{aligned}$$

Si las condiciones de desigualdad se chequean al final del proceso no es necesario considerarlos en la función objetivo por lo tanto queda:

$$\begin{aligned}
 J^* = & \int_0^T \left[ \sum F_i(P_i) + \lambda (P_d + P_L - \sum P_{Ti} - \sum P_{Hi}) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^n \mu_j \left( G_j - \frac{E_{Hj}}{T} \right) \right] dt
 \end{aligned}$$

y tomando la derivada

$$\frac{\partial J^*}{\partial P_{iT}} = \frac{\partial F_i}{\partial P_{iT}} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{iT}} - 1 \right) = 0 \quad i=1, n$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial P_{Hj}} = \mu_j \frac{\partial G_j}{\partial P_{Hj}} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_{Hj}} - 1 \right) = 0 \quad i=1, n$$

nótese que las expresiones d. y e. son similares, por lo tanto si definimos

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \mu_j \frac{\partial G_j}{\partial P_{Hj}}$$

Se puede escribir en una sola expresión, tanto para las centrales térmicas como para las hidráulicas y queda:

$$\frac{dF_i}{dP_i} - \lambda \left( \frac{dP_L}{dP_i} - 1 \right) = 0$$

$i = 1, n$  son térmicas y

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \frac{dF_i}{dP_{iT}}$$

$i = n + 1, n + m$  son hidráulicas y

$$\frac{dF_i}{dP_i} = \mu_j \frac{\partial G_j}{\partial P_{Hj}}$$

El coeficiente

$$\mu_i = \frac{\frac{dF_i}{dP_i}}{\frac{dG_j}{dP_{Hj}}}$$

se conoce con el nombre de coeficiente de conversión hidráulica y permite definir el costo equivalente término de una central hidráulica.

### 2.5.1. Método de Solución.

- Se supone un  $\mu_j$  inicial tentativo con  $j = n + 1, n + m$  y se conoce  $E_{Hj}$  para  $j = n + 1, n + m$
- Se resuelven las ecuaciones de coordinación térmica e hidráulica como si el problema fuera puramente térmico con un proceso iterativo como el de NEWTON-RAPHSON para cada período del intervalo.

$$\frac{dF_i}{dP_i} + \lambda \left( \frac{\partial P_L}{\partial P_i} - 1 \right) = 0$$

- c. Al concluir el último período se evalúa la energía hidráulica descargada durante todo el intervalo para cada central.

$$\int_0^T G_j(t) dt$$

y se compara con  $E_{Hj}$

- d. si

$$\int_0^T G_j(t) dt < E_{Hj}$$

significa que se gastó menos energía que la objetivo, entonces debo usar más energía, se logra disminuyendo el costo equivalente térmico de la central hidráulica  $\mu_j = \mu_j - \Delta\mu_j$

Para todos los  $j$  que cumplan la desigualdad y empieza en b. nuevamente.

- e. si

$$\int_0^T G_j(t) dt > E_{Hj}$$

significa que se gastó más energía que la objetivo entonces debo gastar menos energía, se logra aumentando el costo equivalente térmico de la central hidráulica  $\mu_j = \mu_j + \Delta\mu_j$

para todos los  $j$  que cumplan esta desigualdad y empieza en b. nuevamente.

- T. si

$$\left| \int_0^T G_j(t) dt - E_{Hj} \right| \leq \epsilon$$

para  $j=n+1, n+m$

el proceso converge para todo el período y se ha cumplido el objetivo.

2 . 5 . 2 . Se obtiene como resultado entonces.

- a. Potencia que debe generarse en las centrales térmicas e hidráulicas.
- b. Costo marginal de la energía térmica.
- c. Costo equivalente térmico de cada central hidráulica.

Puede observarse sin necesidad de mucho esfuerzo que el tiempo de computador que se requiere es considerablemente grande ya que el número de iteraciones es bastante alta.

Hagamos un cálculo rápido del tiempo de computador que requeriría un estudio de este tipo.

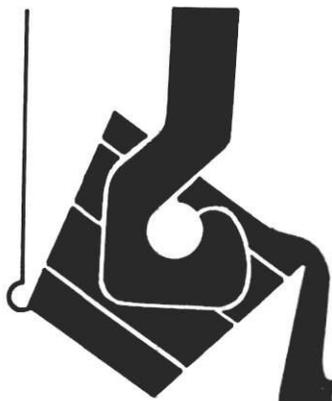
- a. Tomemos un período de 24 horas. . . . . 1 período
- b. Para cada intervalo se requiere un estudio de despacho económico . . . . . 24 desp/per
- c. Para cada estudio económico se requiere como mínimo 5 flujos de carga. . . . . 5 fluj/desp
- d. Cada flujo requiere como mínimo 3 minutos si el sistema es mediano y utilizando NRD. . . . . 3 min/flujo

Tiempo total = 1 perx24 desp/perx5 fluj/desp x 3 min/flujo  
= 6 horas

Este tiempo puede aumentar considerablemente con el número de nodos y centrales del sistema y con el grado de precisión que se requiera.

## Bibliografia

1. Dynamic Economic Dispatch of Generation  
D.W. ROSS and SKIN  
IEEE VOL PAS 99 Nov/Dic 1980
2. Short Term Load Prediction for Economic Dispatch of Generation.  
PROCEEDING OF 1979 POWER INDUSTRY COMPUTER.  
APPLICATION CONFERENCE, CLEVELAND-OHIO, MAY 15-18  
1979.
3. On the optimal Dynamic Dispatch of Power.  
IEEE TRANS VOL-PAS 91 MAY/JUN 1972.  
T.E. BECHERT; H.G. KWATNY
4. Dynamic Optimal Dispatch of real Power for Thermal Generation Units.  
A.D. PATTON, PROC 8TH POWER INDUSTRY COMPUTER APPLI-  
CATION CONFERENCE, MINNEAPOLIS, MINNESOTA, JUN 4-6  
1973.
5. DYNAMIC PROGRAMMING.  
R.E. BELLMAN  
PRINCETON UNIVERSITY PRESS, NEW JERSEY 1957.
6. Applied Dynamic Programing.  
R.E. BELLMAN  
PRINCETON UNIVERSITY PRESS, NEW JERSERY 1962
7. RELIABILITY EVALUATION IN HIDROTHERMAL GENERATING  
SYSTEMS.  
S.H.F. CUNHA, F.B.M. GOMEZ; G.C. OLIVEIRA AND M.V.F. PE-  
REIRA  
IEEE TRANS VOL-PAS 101 DIC 1982.



**SIMESA**  
**SIDERURGICA DE MEDELLIN S.A.**

**APORTAMOS CALIDAD, EXPERIENCIA Y SOLIDEZ**

# Todo en uno!

En impresión  
En titulación  
En composición de textos  
En separación de colores  
En edición de periódicos,  
revistas, folletos,  
afiches, libros,  
plegables  
e insertos



**PROMOTORA  
DE EDICIONES Y  
COMUNICACION  
S.A.**

Calle 53 N°. 73-146 Teléfono: 2642800  
A.A. 53874 Télex 65058 Medellín  
Bogotá: Calle 78 N°. 9-57 Of. 803  
Tels: 2112407 - 2556795  
Nit. 90.921.126



química básica Ltda.

## BICARBONATO DE SODIO

Carrera 28 No. 37 – 60 Sabaneta Antioquia

Tel. 288 04 05

Apartado Aereo 067450



**TINTAS**  
S.A.

---

# AGA

Su Compañía  
de Gases  
en Colombia

---

Revista  
Facultad de Ingeniería

Universidad de Antioquia

SUSCRIPCION

-----  
Ciudad

Fecha

Señor Director  
CESET  
Universidad de Antioquia  
Apartado Aéreo 1226  
Medellín

Adjunto cheque cruzado\* a favor de CESET – Universidad de Antioquia, para suscripción de la Revista Facultad de Ingeniería.

4 números \$ 1.500

Número inicial

Vol

No.

Datos personales:

Nombre .....

Dirección ..... Teléfono .....

Ciudad ..... Departamento .....

Profesión .....

Institución .....

*\*Para suscripciones fuera de Medellín envíe cheque de gerencia con cargo a esta plaza.*

Revista  
Facultad de Ingeniería

Universidad de Antioquia

Vol. 4 No. 1 y 2 1987

ARTICULOS EN EL PROXIMO NUMERO

Anotaciones sobre algunos métodos de cálculo de la resistencia de puesta a tierra.  
*Germán Moreno Ospina*

El computador y las operaciones unitarias  
*Rubén Darío Osorio G.*

El tiempo de humectación de la corrosión atmosférica  
*Asdrúbal Valencia Giraldo*

Anotación en torno a los costos de la corrosión en Colombia.  
*Carlos E. Arroyave Posada*

Predicción de caudales de lixiviado en un relleno sanitario.  
*Arturo Calle Sánchez*

Bases para una mejor comprensión de la problemática tarifaria.  
*Francisco J. Ochoa F.*

Planta de tostación de minerales auro-argentíferos y de metales básicos. Instalada en la seccional minera del Ministerio de Minas y Energía en Medellín.

Estudios de Impacto Ambiental del Tren Metropolitano.

Plantas acuáticas: Sistemas para remover materiales tóxicos.  
*Darío Rojas Blandón*

# Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia

## **NORMAS PARA LA PUBLICACION DE ARTICULOS**

1. La Revista Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia es una publicación orientada a la divulgación de los trabajos técnicos o científicos elaborados por ingenieros colombianos.
2. La Universidad de Antioquia no se identifica necesariamente con las ideas expresadas en los artículos. La responsabilidad de los mismos corresponde exclusivamente a sus autores.
3. El Comité de Redacción estudiará y seleccionará los artículos sometidos a su consideración por los colaboradores.
4. La recepción de un trabajo, no implica obligación para su publicación, ni compromiso con respecto a su fecha de aparición.
5. Los trabajos deben presentarse en original y copia, mecanografiados a doble espacio en papel tamaño carta.
6. Si el artículo incluye mapas, cuadros o gráficos éstos deberán ser originales.
7. Se recomienda una extensión máxima de 30 páginas.
8. Las colaboraciones deben enviarse a Revista Facultad de Ingeniería. Universidad de Antioquia. Apartado Aéreo 1226. Medellín—Colombia.

## **PUBLICIDAD**

Las entidades interesadas en hacer publicidad a través de esta publicación, favor dirigirse a: Comité de Redacción "Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia" apartado aéreo 1226 Medellín, o solicitar cualquier información sobre el particular al teléfono 233-86-11.

