INICIACION EN LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

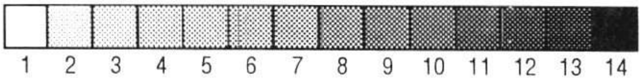
Carlos Mario Sierra Duque
Facultad de Ingeniería U. de A.

La teoría de los conjuntos borrosos fue introducida por Lofti Zadeh a mediados de los años 60. Aunque en el mundo su difusión y aplicación ya son ampliamente conocidas, en Colombia todavía se muestra cara de extrañeza cuando se menciona dicho término. El fin de este artículo, es dar una visión panorámica sobre algunas de las definiciones, conceptos, términos y operaciones que se han establecido en esta teoría; a partir de la cual podemos ver la teoría clásica de conjuntos como un caso particular de la mencionada arriba.

INTRODUCCION

Suponga que usted hace 20 minutos colocó una cubeta de agua en el congelador, si abre y saca la cubeta puede decir con toda certeza que el agua está congelada?, o está líquida?

Observe:



El cuadrado 6 es blanco o negro?

Son las 5:45 a.m. ¿está de día, o aún está de noche?

Suponga que conduce un automóvil a una velocidad V = 49.9 km/h, y la velocidad límite, en esa ruta, es de 50 km/h, cree usted no merecer un parte?

A Ud. se le ha evaluado un curso con la nota 2.94, donde un 3.0 es la nota mínima establecida para aprobarlo, debe Ud. pertenecer absolutamente al grupo de personas que en realidad deben perderlo?

Es evidente que la bivalencia no es una manifestación natural aplicable o todo fenómeno de la vida real. La asignación de un sí o un no, del establecimiento de una pertenencia o no de un objeto a un conjunto, clase, o categoría, es sólo una aproximación, muy conveniente, artificialmente efectuada por el ser humano, para manejar la complejidad de ciertos fenómenos.

Hasta hace pocos años, la teoría de conjuntos partía de la premisa de que cualquier elemento de un universo de discurso, podría pertenecer o no a un subconjunto de éste, rechazando términos medios. A esta ley se la denominó ley del tercio excluido. A mediados de los años 60, Lofti Asker Zadeh, escribió un artículo (Zadeh 1965) donde proponía una nueva forma de ver la teoría de conjuntos, ampliándola, flexibilizándola, y proporcionando la posibilidad de que el concepto de pertenencia de un elemento a un subconjunto sea asunto de grado.

A esta teoría se la llama *Teoría de los Subconjuntos*[1] *Borrosos (Fuzzy Subsets)*, y ha encontrado gran aceptación en muchísimos campos de las ciencias puras y aplicadas.

A partir del concepto de conjunto borroso, se han construido o más bien, reconfigurado, otras teorías tradicionalmente reconocidas. Es el caso de la Lógica, que ahora presenta también su versión conforme a los nuevos vientos borrosos; la matemática, el cálculo, y en fin, muchos otros campos de las ciencias puras también han adaptado sus modelos a los cambios. Pero, con una nueva fundamentación, es lógico pensar que

☆ En el resto del documento se hablará de Subconjunto o Conjunto borroso indistintamente las ciencias de aplicación también han abierto sus puertas a la nueva tendencia. Todo ello ha convergido en poder tratar problemas que, por lo complejos, antes lo hacían de manera tosca.

La teoría de subconjuntos borrosos, ha dado pie al surgimiento de otras teorías nuevas que ahora han demostrado ser de gran aplicabilidad; es el caso de la Teoría de la Posibilidad, que junto con otras teorías, como la de la Probabilidad, se establecen como paradigmas que manejan aspectos distintos de lo que se denomina incertidumbre.

La incertidumbre es un concepto que globaliza diversas falencias cuando estamos enfrentados a la toma de decisiones y que puede incluso forzar que las tomemos erradamente. La incertidumbre puede estar contenida en forma de Ruido, o en los datos, la información o el conocimiento.

Como se ha dicho, son varias las partes en donde pueden ser localizadas causas o evidencias de incertidumbre, por ejemplo, la imprecisión, la incorrectitud o inexactitud, la inconsistencia, la incompletitud, la ambigüedad, la borrosidad y la naturaleza inestable del fenómeno (aleatoriedad).

Desde hace mucho tiempo se ha modelado el aspecto aleatorio de los fenómenos mediante la teoría de la probabilidad, y sólo hasta hace poco la aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos, y en especial la de la posibilidad, ha abierto nuevas alternativas de modelamiento para los otros aspectos de la incertidumbre.

Veamos cuáles son los tipos de incertidumbre que manipula la teoría de subconjuntos borrosos. La gente dice en verano, la temperatura está elevada; en un hospital, el médico puede expresar «no estoy muy seguro de cual es la enfermedad del paciente de la 103»; un ingeniero trata de diseñar una estructura para una zona de riesgo sísmico intermedio; en fin, la cotidianidad -y las situaciones no cotidianas, están plagadas de ejemplos donde la incapacidad de asignar un valor único a algún aspecto de un fenómeno, con satisfactoria fiabilidad, tiene como consecuencia el empleo de un conjunto de valores posibles que concuerden con lo experimentado o expresado. Veamos caso a caso. Qué podría ser, para un parroquiano cualquiera, temperatura elevada?, tal vez un rango de valores a partir de alguno que se considere como seguramente elevado, hasta la temperatura máxima observada históricamente. Ahora la pregunta es... este rango es tan definido? Un grado menos en la escala de medición de la temperatura es suficiente para sacarlo de aquellos que se consideran elevados?, o que tal una milésima de grado menos. Es evidente que la pertenencia o no de algunos valores no son 0 o 1, sino, por ejemplo, 0.8 o cualquier otro entre un rango de valores que sirvan para ello. Cuando el médico no está muy seguro de un diagnóstico, lo que está expresando es su falta de confianza en la certeza de la conclusión acerca de la presencia de una enfermedad que aqueja al paciente de acuerdo a ciertos síntomas y exámenes. Esta falta de confianza no es absoluta, y por tanto, deja en el aire un cierto conjunto de «niveles de confianza» posibles -también en cierto grado- que concuerden con el concepto de No Muy Seguro. Un riesgo sísmico Intermedio determina borrosamente un conjunto de valores de riesgo sísmico que puede poseer cierta zona geológica; o sea, no especifica un conjunto claro -en la eventualidad que fuese un conjunto, de valores que pueden ser propios de riesgo intermedio. Se observa cómo, ante la falta de establecer un valor único seguro, o un conjunto perfectamente definido de estos valores, se emplea un valor cualitativo que evalúa el atributo considerado.

La teoría de los subconjuntos borrosos se ha convertido en un puente entre la cualitativa declaración de lo impreciso y la reconocida manipulación de lo cuantitativo.

Se presentan a continuación, a manera de ejemplo, algunos campos de aplicación exitosa de la teoría de los subconjuntos borroso:

Psicología
Control de procesos

Reconocimiento de imágenes
Toma de decisiones
Aprendizaje automático
Tratamiento de lenguaje natural
Reducción de ruido en comunicaciones
Recuperación de información en bases de datos.

DEFINICION DE UN SUBCONJUNTO BORROSO

Antes de entrar a definir lo que es un subconjunto borroso, es deseable recordar la forma como se conciben los conjuntos en la teoría clásica.

Sea **U** un conjunto Universo o de discurso, la pertenencia o no de un elemento u a un subconjunto **A** del universo de discurso, se estima mediante la denominada *Función Característica o Función de Discriminación*, $\mu_A(u)$. Véase:

$$(1)\quad \mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ es un elemento de } \mathbf{A} \\ 0 & \text{si } u \text{ no es un elemento de } \mathbf{A} \end{cases}$$

La función de discriminación puede ser vista como un mapeo funcional, desde el conjunto universo de discurso, **U**, en {0,1}, así:

$$(2)\qquad \mu_A(u) : \mathbf{U} \rightarrow \{0,1\}$$

En la teoría de conjuntos borrosos la pertenencia de un elemento u a un subconjunto A del universo de discurso U, puede ser Parcial[1].

Para este tipo de conjuntos, la membrecía de un elemento a un conjunto, se estima empleando una generalización de la función de discriminación, denominada *Función de Pertenencia.* Al igual que esta última, la función de pertenencia, puede ser definida como un mapeo funcional desde el universo de discurso **U** en un conjunto **M**:

$$(3)\qquad \mu_A(u) : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{M}$$

Un valor particular de la función de pertenencia se denomina Grado de pertenencia, y el conjunto M se denomina Conjunto de pertenencia asociado. M puede ser cualquier estructura, pero en nuestro caso se utilizará a **M** = [0,1].

Un conjunto borroso $\underline{\mathbf{A}}$, también puede definirse como un conjunto de parejas ordenadas.

$$(4)\qquad \{(u, \mu\underline{\mathbf{A}}(u))\},\ \forall u \in \mathbf{U}.$$

Ejemplo 1:
Sea U el conjunto finito de los primeros 10 enteros

$$\mathbf{U} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Definamos el conjunto borroso $\underline{\mathbf{A}}$ de la siguiente forma:

$$A = \{(0,0),(1,0.2),(2,0.3),(3,0),(4,1),(5,1),(6,0.8),(7,0.5),(8,0),(9,0)\}$$

De ahora en adelante se empleará la siguiente notación para la representación de conjuntos de acuerdo a si son o no borrosos:

Un conjunto no borroso, Crisp, del universo de discurso U, finito de n elementos, se simbolizará como:

$$(5)\quad \mathbf{A} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

donde el signo + representa la operación unión, y cada u_j representa los subconjuntos unitarios constituyentes de **A.**

La anterior representación se puede generalizar para un subconjunto borroso del universo de discurso finito **U** de n elementos:

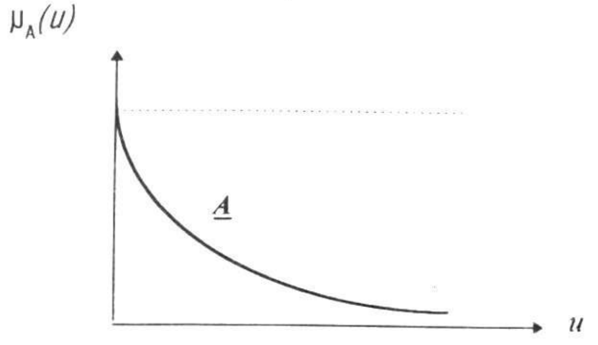
$$(6)\quad \underline{\mathbf{A}} = \mu_{\underline{A}}(u_1)/u_1 + \mu_{\underline{A}}(u_2)/u_2 + \ldots + \mu_A(u_N)/u_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$$

Cuando el conjunto **U** es no finito, se emplea la notación:

$$(7)\quad \underline{\mathbf{A}} = \int_U \mu_A(u)/u$$

☆ De ahora en adelante a los subconjuntos borrosos los distinguiremos por un subrayado, como en: $\underline{A}$

Ejemplo 2.
Sea **U** = R^+, y **A** el conjunto borroso definido como:
A = $\int_{R+} e^{-k1\,u} / u$ con $k_1 \in R^+$



A continuación se darán algunas definiciones de algunos conceptos normalmente empleados en la teoría de los conjuntos borrosos:

La *Altura* de un conjunto borroso **A**, h(**A**), es el grado de pertenencia más alto de alguno de los elementos de **U** en **A**.

El *Conjunto Soporte* de un subconjunto borroso **A** del universo **U**, se define como el conjunto formado por los elementos que tienen un grado de pertenencia mayor a cero. Veamos:

(8) $Sop\,(\underline{\mathbf{A}}) = \{u / u \in \mathbf{U},\ \mu_A(u) > 0\}$

Un *Punto de Cruce* de **A** es el punto de **U** cuyo grado de pertenencia es 0.5 en **A**.

Se dice que un conjunto borroso **A** es Normal si su altura es 1, de otra forma se le llama *Subnormal*.

Ejemplo 3. A partir de este ejemplo vamos a trabajar con la siguiente información inicial.

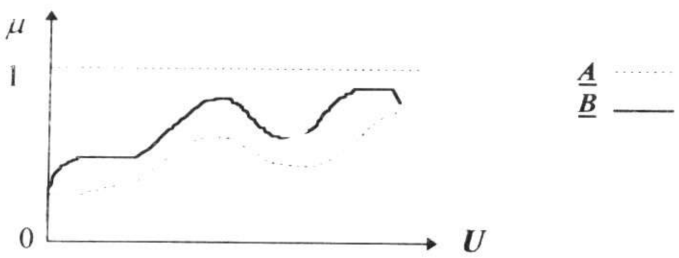
Sea **U** = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
y sean:
$\underline{\mathbf{A}}_1$ = 0.0/0+0.2/1+0.3/2+0.2/3+0.5/4+0.6/5+0.4/6+0.8/7+0.0/8+1/9
$\underline{\mathbf{A}}_2$ = 0.1/0+0.5/1+0.2/2+0.9/3+0.9/4+0.5/5+0.4/6+0.8/7+0.6/8+0.3/9

Obtengamos los siguientes términos:
Sop ($\underline{A}_1$) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9
Sop ($\underline{A}_2$) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9
h($\underline{\mathbf{A}}_1$) = 1, luego $\underline{\mathbf{A}}_1$ es Normal, h($\underline{\mathbf{A}}_2$) = 0.9, y por tanto $\underline{\mathbf{A}}_2$ es Subnormal.
Punto de cruce de $\underline{\mathbf{A}}_1$ = {4},
Puntos de cruce de $\underline{\mathbf{A}}_2$ = {1,5},

OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS BORROSOS

Inclusión. Sean A y B dos subconjuntos borrosos del conjunto de discurso **U**, se dice que A está incluido en B, A ⊂ B, si y sólo si

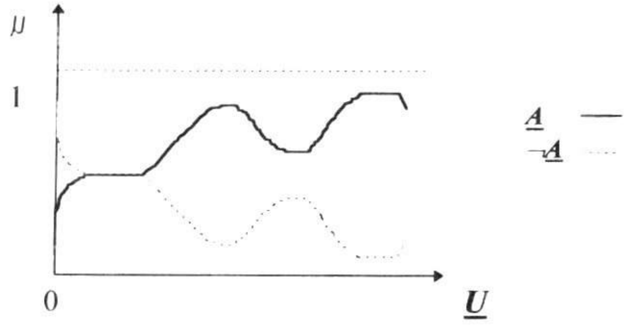
(9) $\forall u \in U \therefore \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$



Igualdad. Dos subconjuntos borrosos A, B del conjunto **U**, se dicen iguales, A = B, si y sólo si:

(10) $\int_U \mu_A(u) / u = \int_U \mu_B(u) / u$

Complementación. El complemento del subconjunto borroso **A** de **U**, ¬A, está definido por:



(11) $\neg\,\underline{\mathbf{A}}\ \Delta * \int (1 - \mu_A(u)) / u$

à De ahora en adelante se seguirá trabajando con el soporte de los conjuntos borrosos.
à El signo (debe entenderse como: denota o es igual por definición

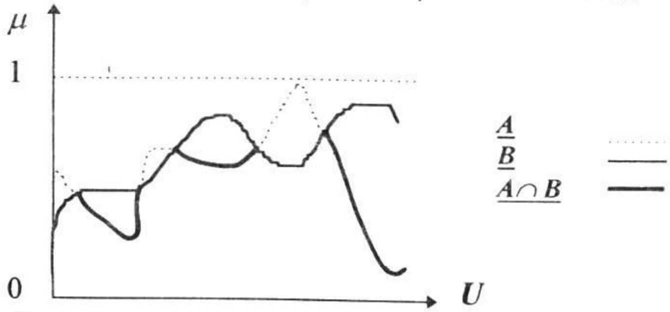
Ejemplo 4

$\neg \underline{A}_1 = 1/0+0.8/1+0.7/2+0.8/3+0.5/4+0.4/5+0.6/6+0.2/7+1/8+0.0/9$

Intersección. El conjunto intersección de n subconjuntos borrosos $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_n$ de U, $\underline{A}_1 \cap\ldots\cap A_n$, se obtiene como:

(12) $\underline{A}_1 \cap\ldots\cap \underline{A}_n \vartriangle \int_U (\mu_{A1}(u) \wedge \ldots \wedge \mu_{An}(u))\ /\ u$

donde $\wedge$ es el símbolo para la operación *mínimo.*



Ejemplo 5

$\underline{A}_1 \cap \underline{A}_2 = 0.2/1+0.2/2+0.2/3+0.5/4+0.5/5+0.4/6+0.8/7+0.0/8+0.3/9$

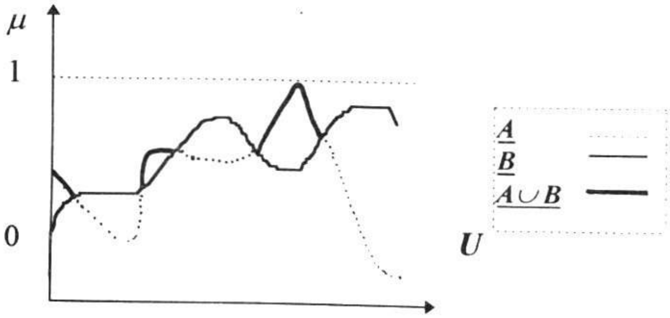
Puede decirse que el subconjunto borroso resultante de la intersección de n subconjuntos borrosos, se considera como aquel subconjunto borroso *más grande* que está incluido en esos n subconjuntos.

Unión. El conjunto que representa la unión de n conjuntos borrosos $\underline{\mathbf{A}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{A}}_n$ de **U**, $\underline{\mathbf{A}}_1 \cup \ldots \cup \underline{\mathbf{A}}_n$, se consigue por:

(13) $\underline{A}_1 \cup\ldots\cup \underline{A}_n \vartriangle \int_U (\mu_{A1}(u)\ \mathrm{V}\ldots\mathrm{V}\ \mu_{An}(u))\ /\ u$

donde $\vee$ es el símbolo para la operación *máximo.*

Puede verse al subconjunto borroso resultante de la unión de n subconjuntos borrosos, como aquel subconjunto borroso más pequeño que incluye a esos n subconjuntos.



Ejemplo 6

$\underline{A}_1 \cup \underline{A}_2 = 0.1/0+0.5/1+0.3/2+0.9/3+0.9/4+0.6/5+0.4/6+0.8/7+0.6/8+1/9$

Producto. El conjunto Producto de n subconjuntos borrosos $\underline{\mathbf{A}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{A}}_n$ de **U**, $\underline{\mathbf{A}}_1 \ldots \underline{\mathbf{A}}_n$, está definido por:

(14) $\underline{A}_1 \ldots \underline{A}_n \vartriangle \int_U (\mu_{A1}(u)^* \ldots {}^*\mu_{An}(u))/u$

donde * es el producto aritmético.

Ejemplo 7

$\underline{\mathbf{A}}_1\underline{\mathbf{A}}_2 = 0.1/1+0.06/2+0.18/3+0.45/4+0.3/5+0.16/6+0.64/7+0.3/9$

Luego el conjunto $\mathbf{A}^\alpha$, donde α es un entero positivo debería ser interpretado como:

(15) $\underline{A}^\alpha \vartriangle \int_U (\mu_A(u))^\alpha/u$

A partir de la anterior definición, se han determinado los siguientes nociones:

La operación *Concentración* sobre un conjunto borroso $\underline{\mathbf{A}}$, Con ($\underline{\mathbf{A}}$), establece un conjunto borroso tal que :

(16) Con ($\underline{\mathbf{A}}$) $\vartriangle$ $\underline{\mathbf{A}}^2$

La operación concentración obtiene un subconjunto borroso donde los grados de pertenencia de los elementos se han reducido respecto a los de A. Así entonces, el nuevo conjunto es más restringido que el original.

La **Dilatación**, definida como:

(17) Dil($\underline{\mathbf{A}}$) $\vartriangle$ $\underline{\mathbf{A}}^{0.5}$.

tiene el efecto contrario al de la concentración, y por ello la dilatación calcula un nuevo conjunto borroso a partir de $\underline{\mathbf{A}}$ donde los grados de pertenencia de los elementos se han relajado respecto a los originales.

La Intensificación de un subconjunto borroso **A**, origina un nuevo conjunto borroso donde el grado de pertenencia se calcula por:

(18) $\mu_{Int(A)}(u) = \begin{cases} 2\,(\mu_A(u))^2 & 0 \leq \mu_A(u) \leq 0.5 \\ 1 - 2\,(1-\mu_A(u))^2 & 0.5 < \mu_A(u) \leq 1 \end{cases}$

La intensificación funciona como la intensificación del contraste en las pantallas de TV, computadores, etc. La idea con la intensificación es aumentar los

grados de pertenencia de los elementos con grados de pertenencia mayor que 0.5 y la reducción de aquellos que no lo son.
Ejemplo 8

$Con(\underline{\mathbf{A}}_1) = 0.04/1+0.09/2+0.04/3+0.25/4+0.36/5+0.16/6+0.64/7+0.49/9$

$Dil(\underline{\mathbf{A}}_2) = 0.32/0+0.71/1+0.45/2+0.95/3+0.95/4+0.71/5+0.63/6+0.89/7+0.77/8+0.55/9$

$Int(\underline{\mathbf{A}}_2) = 0.02/0+0.5/1+0.08/2+0.98/3+0.98/4+0.5/5+0.32/6+0.92/7+0.68/8+0.18/9$

La **Normalización** de un conjunto borroso $\underline{\mathbf{A}}$, *Norm* ($\underline{\mathbf{A}}$), se obtiene mediante:

(19) $\mu_{Norm(A)}(u) = \mu_A(u) \,/\, h(\underline{\mathbf{A}})$

en el que el símbolo / representa la operación *división*.
Ejemplo 9
La *Norm* ($\underline{\mathbf{A}}_1$) $= A_1$ y

Norm ($\underline{\mathbf{A}}_2$) $= 0.11/0+0.55/1+0.22/2+1/3+1/4+0.55/5+0.44/6+0.88/7+0.66/8+0.33/9$

Si α es cualquier real no negativo tal que $\alpha\, h(A) \leq 1$,

(20) $\alpha A \triangleq \int_U (\alpha(\mu_A(u)))/u$

Ejemplo 10

$0.6\, \underline{A}_2 = 0.06/0+0.3/1+0.12/2+0.54/3+0.54/4+0.3/5+0.24/6+0.48/7+0.36/8+0.18/9$

La **Suma Confinada** de $\underline{A}$ y $\underline{B}$ de U, denotada como $\underline{A} \oplus \underline{B}$, se calcula como:

(21) $\underline{A} \oplus \underline{B} \triangleq \int_U (1 \wedge (\mu_A(u)+\mu_B(u)))/u$

donde + es la suma aritmética.

Ejemplo 11

$\underline{\mathbf{A}}_1 \oplus \underline{\mathbf{A}}_2 = 0.1/0 + 0.7/1 + 0.5/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6+1/7+0.6/8+1/9$

La Diferencia Confinada de $\underline{A}$ y $\underline{B}$, $\underline{A} \ominus \underline{B}$, está definida por:

(22) $\underline{A} \ominus \underline{B} \triangleq \int_U (0 \vee (\mu_{\underline{A}}(u) - \mu_{\underline{B}}(u)))/u$

donde - es la diferencia aritmética.

Ejemplo 12

$\underline{\mathbf{A}}_1 \ominus \underline{\mathbf{A}}_2 = 0.1/2+0.1/5+0.7/9$

El **Producto Confinado** de $\underline{A}$ y $\underline{B}$, $\underline{A} \otimes \underline{B}$, está definido por:

(23) $\underline{A} \otimes \underline{B} \triangleq \int_U (0 \vee (\mu_{\underline{A}}(u) + \mu_{\underline{B}}(u)-1))/u$

donde + es la suma aritmética.

Ejemplo 13

$\underline{\mathbf{A}}_1 \otimes \underline{\mathbf{A}}_2 = 0.1/3+0.4/4+0.1/5+0.6/7+0.3/9$

La *Potencia enésima Izquierda** de **A**, $^n\mathbf{A}$, se determina por:

(24) $^n\mathbf{A} \triangleq \int_{\boldsymbol{V}} \mu_A(u)/u^n$

donde $\boldsymbol{V} \triangleq \{u^n/u \in U\}$

Ejemplo 14

$^3\underline{\mathbf{A}}_2 = 0.1/0 +0.5/1+0.2/8 + 0.9/27 + 0.9/64 + 0.5/125 + 0.4/216 + 0.8/343 + 0.6/512 + 0.3/729$

Si $\underline{\mathbf{A}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{A}}_k$, son subconjuntos borrosos de U, y $w_1,\ldots,w_k$, son ponderaciones no negativas que suman 1, entonces la Combinación Convexa de $\underline{\mathbf{A}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{A}}_k$, es un subconjunto borroso de **U**, que se obtiene como:

(25) $C\underline{\mathbf{A}} \triangleq \sum_{i=1}^{k} w_i\, \mu_{Aj}(u)$

donde en este caso Σ representa sumatoria aritmética.

Una definición importante es la siguiente:

Un subconjunto borroso $\underline{\mathbf{A}}$ de **U** es de tipo 1 si su función de pertenencia, $\mu_A(u)$ es un mapeo de **U** a [0,1]; y $\underline{\mathbf{A}}$ es de tipo K, K = 2, 3, ..., si $\mu_A(u)$ es un mapeo de **U** al conjunto de subconjuntos borrosos de tipo (K-1). Será entendido de ahora en adelante, que los subconjuntos borrosos que tratemos serán de tipo 1, a no ser que se diga otra cosa.

---

* Observar más adelante el principio de extensión Ec. (44) en Iniciación en la Teoría de los Conjuntos Borrosos II

Por último, si $\underline{\mathbf{A}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{A}}_k$, son subconjuntos borrosos de $U_1,\ldots,U_k$, respectivamente, el *Producto Cartesiano* de $\underline{A}_1$ X ... X $\underline{A}_k$, está definido como un subconjunto borroso de U_1 X ... X U_k, de la siguiente manera:

$$(26)\ A_1 \text{ X}\ldots\text{X}\mathbf{A}_k \ \Delta \int_{U1 \text{ X} \ldots \text{ X } Uk} (\mu_{A1}(u_1) \wedge \ldots \wedge (\mu_{Ak}(u_k))/(u_1,\ldots,u_k)$$

donde $u_1 \ \varepsilon \ U_1,\ldots,u_k \ \varepsilon \ U_k$, respectivamente.

O sea, se concibe al producto cartesiano como el conjunto borroso más pequeño, formado en U_1 X ... X U_k, a partir de $A_1,\ldots,A_k$

BIBLIOGRAFÍA

KAUFMANN, A. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol. I. New York, Academic Press, Inc., 1975. pp. 1-87, 167-172.

MOLINA, J.F. Teoría de Subconjuntos Borrosos y Sistemas Expertos. Revista Universidad EAFIT, Medellín, No. 76, pp. 27-40, octubre-diciembre, 1989.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. Info Control. Vol. 8, 338-353, 1965

VIRGIL, N. Expert Systems and Fuzzy Systems. Menlo Park, California, The Benjamin/Cummings Company, Inc., 1985. pp. 1-116, 165-168.

KANDEL, A. Fuzzy Mathematical Techniques With Applications. Addison-Wesley Publishing Company. 274 p.

PRADE, H. & DUBOIS D. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, Inc. San Diego. 1980. 393 p.