

# SOBRE LA TEORÍA DE LOS FRACTALES

Carlos A. Escobar

Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia

“La autosimilaridad es la propiedad geométrica en la que cada parte es una imagen reducida del todo”.  
Benoit Mandelbrot

En la literatura científica de los últimos años es frecuente encontrar trabajos basados en una serie de nuevas teorías científicas que se interrelacionan y configuran una nueva visión del mundo que va más allá de las derivadas de la ciencia clásica (teoría de Newton, geometría Euclidiana, entre otras), y la moderna (teoría de la relatividad, mecánica cuántica, geometrías no-Euclidianas). Entre estas nuevas teorías científicas se pueden citar: La teoría de los fractales, las teorías del determinismo-caótico, la termodinámica de los procesos irreversibles, etc. Estas teorías contemporáneas actualizan problemas fundamentales de la comprensión del mundo y plantean respuestas que contrastan con las teorías clásicas y modernas. Proponen la posibilidad de la impredecibilidad en sistemas deterministas, la irreversibilidad de los procesos, las dimensiones fraccionadas, etc.

Los cambios sugeridos tocan elementos tan fundamentales que quizás podrían compararse en intensidad con los ocurridos en el renacimiento cuando se asistió al surgimiento de las teorías del movimiento, la gravitación y la geometría analítica.

En este artículo nos centraremos en la teoría de los fractales. Esta teoría desarrollada en las últimas décadas plantea una geometría diferente a la euclidiana y las no-euclidianas, que establece la posibilidad de trabajar con “dimensiones fractales”. La teoría de los fractales propone un nuevo tipo de formas o estructuras que denominamos “objetos fractales”; éstos permiten simular procesos y formas naturales con gran precisión.

## 1. PRINCIPIO DE AUTOSIMILARIDAD

La teoría de los fractales se fundamenta en una idea que resulta sencilla una vez se comprenda

aunque puede sorprender inicialmente: El principio de autosimilaridad. Cuando un objeto (forma o estructura) tiene sus partes (o elementos componentes) semejantes al (total del) objeto decimos que en él se cumple el principio de autosimilaridad y por tanto el objeto es un objeto fractal.

Observemos la hoja de helecho presentada en la figura 1 la cual es un objeto fractal, allí se cumple la autosimilaridad. Si miramos cada ramita que sale de la línea central del helecho, vemos que tiene la misma forma de la hoja total sólo que más reducida. Es decir, la parte (ramita de la hoja de helecho) se asemeja al todo (hoja de helecho), hay autosimilaridad, se tiene un helecho fractal.



Figura 1. Hoja de helecho fractal

Desde tiempo atrás existían rudimentos de la idea de autosimilaridad. Leibniz consideraba el mundo conformado por “mónadas” que reflejaban en sí mismas el universo; mediante iteraciones y recurrencias, basadas en la serie de Fibonacci y en la “proporción áurea” (planteada por Platón), se hacían antiguamente figuras geométricas recurrentes algunas de las cuales fueron retomadas en la teoría de los fractales.

## 2. GENERACIÓN DE OBJETOS FRACTALES

Existen diversas maneras de generar estructuras u objetos fractales: Mediante un algoritmo de recurrencia, por medio de generadores de números, a partir de ecuaciones diferenciales no-lineales, etc.

En la figura 2 (al aplicar un algoritmo de recurrencia) se observa la generación de un objeto fractal denominado “copo de nieve de Koch”. La figura 2b) es la “semilla” o figura generadora de la imagen fractal. Observamos que consta de cuatro (4) segmentos con una longitud de  $1/3$  de la longitud básica  $L$  de la línea de la figura 2a.

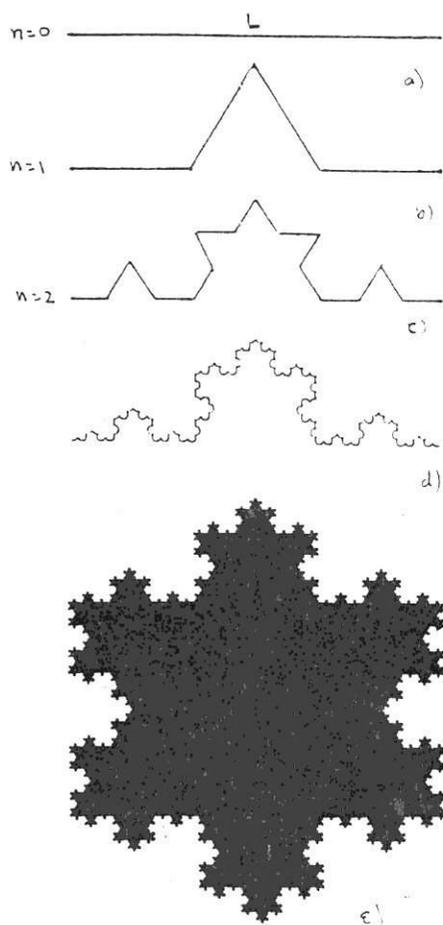


Figura 2. Figura fractal: “copo de nieve de Koch”

Supongamos que mediante una fotocopiadora se reduce tres veces la figura de la “semilla” (figura 2b) y luego, con esta figura de la semilla reducida modificamos cada segmento de la semilla original de la figura 2b; lo que se obtiene es la figura 2c. Al repetir consecutivamente el anterior procedimiento se llega al resultado de la figura 2d. Así podemos seguir hasta el infinito o hasta lo que lo permita el detalle fino (para un determinado número de iteraciones  $n$ ). La figura que nos queda es el “copo de nieve de Koch” que es una forma fractal donde los elementos componentes se asemejan al todo (figura 2e): «copo de nieve» completo).

El “copo de nieve de Koch” es una línea continua pero rugosa; en el límite ideal (para un número infinito de iteraciones) debido a la configuración quebradiza, no tendrá derivada en ningún punto. Si deseamos averiguar la longitud de la curva encontramos que ésta crece (hasta el infinito) en la medida en que aumenta el número de iteraciones  $n = 1, 2, 3 \dots$

## 3. LA NUEVA DIMENSIÓN ESPACIAL: LA DIMENSIÓN FRACTAL

En la geometría convencional decimos que una línea tiene dimensión 1, si se tiene un plano su dimensión es 2, y para un volumen la dimensión es 3. Mientras uno de los axiomas de la geometría Euclidiana considera que por un punto externo a una recta sólo puede pasar otra línea paralela, en las geometrías no-euclidianas se considera que no pasa ninguna paralela o que pasan muchas. Este es el origen de las denominadas geometrías no-euclidianas. Tanto la geometría Euclidiana (geometría clásica) como las no-euclidianas (geometría moderna) comparten el presupuesto de que sus dimensiones  $D$  sólo pueden ser:  $D=1$  (líneas),  $D=2$  (superficies),  $D=3$  (volúmenes). Sin embargo, curvas fractales como la del “copo de nieve de Koch” son figuras rugosas en principio hasta lo infinitamente pequeño. Configuran una sección del espacio que se llena con puntos de rugosidades y esta región es “más

gruesa” que la comprendida por lo unidimensional, y su dimensión que está entre la dimensión uno ( $D=1$ ) y la dimensión dos ( $D=2$ ) es una “dimensión fractal”.

En la teoría de los fractales se encuentra que existen objetos que por lo fibrado, rugoso o fraccionado de su estructura, no ocupan estrictamente dimensiones 1,2,3 sino dimensiones fraccionadas. Es posible encontrar el valor matemático de la dimensión fractal de un objeto; en términos sencillos, ésta es proporcional a su tendencia a llenar el espacio con sus rugosidades. Se puede demostrar que objetos fractales generados con algoritmos similares a los del “copo de nieve” tienen una dimensión fractal  $D$ :

$$D = \ln N / \ln M$$

donde  $N$  es el número de segmentos de la semilla y  $M$  el número de subdivisiones que se hacen a la línea inicial (de longitud  $L$ ), es decir  $L/M$  es la longitud de cada segmento de la semilla. Para el “copo de nieve” (ver figura 2)  $N=4$  y  $M=3$ , luego:

$$D = \ln 4 / \ln 3 = 1.26$$

La dimensión de la línea que configura el “copo de nieve” no es uno (1) como en la geometría euclidiana sino un poco mayor de uno, o sea 1.26.

#### **4. GEOMETRÍA FRACTAL Vs GEOMETRÍAS EUCLIDIANA Y NO-EUCLIDIANAS**

Como se mencionó anteriormente existen una serie de objetos rugosos o fraccionados hasta el ínfimo detalle, que tienen la propiedad de ser autosimilares y a los que además se les puede encontrar una dimensión fractal con cualquier valor entre 0 y 3. El conocimiento de dichos objetos fractales, su generación mediante algoritmos generadores de números y ecuaciones diferenciales no-lineales, el cálculo de su dimensión fractal y de otras propiedades, constituye lo que se ha denominado “geometría fractal”.

La geometría fractal se diferencia de las geometrías euclidiana y no-euclidiana en que trabaja con dimensiones que pueden ser fracciones entre 0 y 3. La geometría convencional podría decirse que trabaja con formas “lisas”, que sólo admiten dimensiones de 1 (línea), 2 (superficie), 3 (volúmenes) y que son poco apropiadas para trabajar con formas rugosas o fraccionadas hasta lo más pequeño. La costumbre y los éxitos alcanzados con la aplicación de las geometrías euclidiana y no-euclidianas nos han hecho pensar en que la naturaleza responde prioritariamente a este tipo de geometrías. Sin embargo la mayoría de los objetos naturales (ríos, montañas, árboles, rayos, nubes, etc) presentan formas rugosas o fraccionadas que siempre aparecen así se descienda a la escala de lo pequeño. Es decir, en lo pequeño las rugosidades no se resuelven en linealizaciones como se pretende desde las geometrías convencionales. Debido a que la geometría fractal toma en cuenta las rugosidades y los fraccionamientos permite mejores simulaciones de los objetos y de los fenómenos naturales (flujo turbulento, crecimientos cristalinos, etc.).

#### **5. EL DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL**

El cuerpo de la geometría fractal se plasma en una serie de fenómenos, formas y procesos, que siguen la estructura fractal y que se conocían parcial y separadamente en el momento en que Benoit Mandelbrot los aunó en una sola teoría de los fractales.

B. Mandelbrot, el descubridor de los fractales, siempre estuvo inclinado, como él mismo lo dice, hacia lo geométrico (figuras, formas) más que a lo algebraico (lo abstracto, ecuaciones matemáticas); prefería expresar sus ideas en el lenguaje geométrico. Investigador ecléctico e interdisciplinario, ha podido trabajar sobre los más diversos campos (matemáticas, física, geometría, economía, geografía física, teoría de la información, etc.).

Pasó un tiempo antes de que la comunidad científica y tecnológica entendiera y aceptara la teoría

de los fractales. Los matemáticos no comprendían sus algoritmos prácticos, mientras a los demás les parecían demasiado complejas sus investigaciones. Una de sus primeras publicaciones sobre fractales la logró ante un redactor de una revista quien no supo diferenciar entre las figuras reales de ríos y las formas de ríos generadas con algoritmos fractales. Al ver en lo anterior la potencialidad de la simulación mediante fractales aseveró: “No entiendo nada pero se publica”.

Mandelbrot al terminar sus estudios sobre matemática aplicada ingresó a la IBM. Allí inició sus primeros acercamientos a la teoría fractal aplicada a la economía, al observar que el patrón de las variaciones de precios no cambiaban a corto ni a largo plazo. Al tratar de encontrar mejores ejemplos en donde se cumpliera el principio de autosimilaridad, se encontró con un problema en apariencia trivial pero que permitía una completa aplicación de la teoría fractal: ¿Es posible medir la longitud de la costa de Bretaña? Un inglés algo excéntrico, Lewis Richardson, había medido las longitudes de distintas costas. Su método empírico lo llevaba a la conclusión de que la longitud de las costas dependía del tamaño del salto dado para cada medida. Si utilizamos una regla de 2 Km la medida nos da menor que si recorremos la playa a pie y para encontrar su longitud multiplicamos el número de pasos que requerimos para recorrerla por la longitud de cada paso. Además si la costa es más rugosa que otra tiene más longitud si en cada caso empleo el mismo paso de medida. La longitud de una costa aumenta, al disminuir la longitud de los saltos de cada medida. Mandelbrot aplica la teoría fractal al caso de la costa y observa que su descripción teórica coincide perfectamente con la medida empírica. Las costas se pueden interpretar como formas fractales aleatorias.

En 1975 publica su libro “Les objets fractals” el cual logra imponerse, como lo explica, más que por un contenido, por sus sorprendentes imágenes fractales generadas por computador.

## 6. EL CONJUNTO DE MANDELBROT

La generación de la figura fractal del “copo de nieve” como vimos, se realiza a partir de un algoritmo de construcción; sin embargo existen otros tipos de figuras fractales de gran belleza que se construyen a partir de números generados por iteraciones realizadas sobre una fórmula matemática sencilla.

El denominado “**conjunto de Mandelbrot**” es un conjunto de números que pueden plasmarse en sorprendentes figuras fractales mediante computador. El proceso se basa en la iteración:

$$Z_{n+1} \leftarrow Z_n^2 + C$$

Donde  $Z_1$  : Es un número complejo variable  
 $C$  : Es un número complejo fijo  
 $n$  : Es el número de iteraciones

En la “fórmula” anterior se inicia con un valor  $Z_0$ , se reemplaza y se obtiene:

$Z_1 = Z_0^2 + C$  (primera iteración), luego el valor obtenido  $Z_1$  se reemplaza de nuevo (se realiza una segunda iteración) en la misma fórmula y se obtiene:  $Z_2 = Z_1^2 + C = (Z_0 + C)^2 + C$  y así sucesivamente hasta  $Z_n$ .

Puede ocurrir luego de un determinado número de iteraciones que el módulo de  $Z_n$  sea mayor o menor que un determinado valor (por ejemplo se utiliza 2) lo cual ajusta el color asignado en el computador a un punto, mientras su posición en la pantalla viene determinada en su eje horizontal por la parte real de  $Z_0$  y la vertical por su parte imaginaria.

Aunque la ecuación  $Z_{n+1} \leftarrow Z_n^2 + C$  es sencilla, el proceso iterativo requiere miles de cálculos y una alta precisión (mínimo de 32 bits) por la cual se hace necesario el computador. El resultado es una figura fractal en la cual al hacer enfoques consecutivos en áreas específicas, se encuentran bellas e imprevistas figuras fractales algunas de ellas similares a la figura original (ver figura 3).

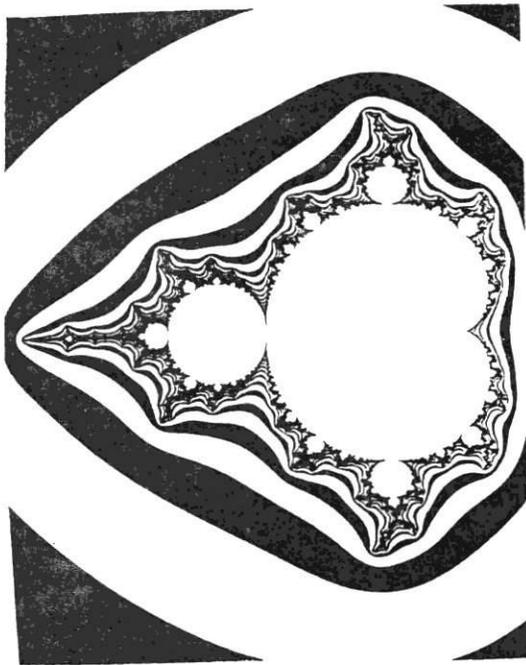


Figura 3. Vista global del conjunto de Mandelbrot

## 7. LOS FRACTALES EN SISTEMAS CAÓTICOS

Existe otra forma de generación de formas fractales a partir de ecuaciones diferenciales no-lineales con comportamiento caótico.

Ilustraremos con un caso la relación que existe entre la teoría de los fractales y la teoría del caos. E. Lorenz descubrió el “efecto mariposa” (sensibilidad de un sistema a las condiciones iniciales) mientras estudiaba la simulación matemática de procesos atmosféricos. Rápidamente encontró que las ecuaciones diferenciales que describían algunos procesos atmosféricos mostraban comportamientos caóticos. Lorenz redujo su modelo a un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias (modelan una celda con líquido calentada por debajo y enfriada por encima):

$$\begin{aligned} dx/dt &= G(y - x) \\ dy/dt &= Rx - y - xz \\ dz/dt &= xy - Bz \end{aligned}$$

G, R, B: Constantes

x : Flujo convectivo

y, z : Distribución de la temperatura en la celda

La solución de dicho sistema (para ciertos valores de las constantes G, R, B, que provocan el “efecto mariposa”) se ubica en zonas que se denominan “atractores extraños”. Un “atractor” es el conjunto de puntos  $(x,y,z) \in R^3$  al cual tiende la trayectoria de la solución de la ecuación diferencial a medida que se incrementa el tiempo.

El atractor de Lorenz es llamado “extraño” pues se muestra que tiene una estructura fractal. Las trayectorias de la solución de la ecuación diferencial no se repiten y forman un entramado fino de trayectorias, tan fino como se quiera (o se pueda de acuerdo con la precisión exigida), sin embargo las trayectorias no se salen de ciertas regiones que constituye el “atractor extraño” (figura 4).

Sobre este tema trataremos en un próximo artículo.

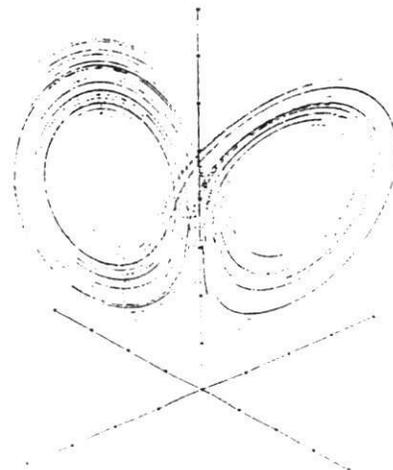


Figura 4. Atractor extraño de Lorenz

## 8. CAMPOS DE APLICACIÓN DE LA TEORÍA FRACTAL

La diversidad de campos en que se aplica la teoría de los fractales, sostiene algunos, es muestra de la “universalidad” del desempeño fractal en lo natural. La teoría de los fractales es una teoría relativamente reciente y sus aplicaciones se mueven aún en muchos casos en el terreno de lo puramente científico, sin embargo su difusión y conocimiento ha ido permeando y modelando los distintos campos del conocimiento humano.

La influencia configurada por el tipo de visión del mundo que comporta la teoría de los fractales se ha extendido tanto a las ciencias naturales como a las humanas.

Los fractales han permitido un mejor entendimiento de procesos y fenómenos considerados “desordenados” o “irregulares” por su difícil acceso mediante las teorías tradicionales. A partir de algoritmos sencillos manejados por computadora ha sido posible desplegar todo tipo de imágenes que semejan el mundo natural (montañas, nubes, lagos, rayos); en muchos casos no son distinguibles de las reales. También se pueden generar escenarios fantásticos, algunos de los cuales han sido utilizados en diversas películas.

Mediante la teoría de los fractales se ha podido simular y medir la dimensión fractal de fenómenos diversos considerados anteriormente como “desordenados” tales como agrupamientos de coloides, flujo turbulento, etc. En teoría de la información se está investigando la posibilidad de compactación fractal de la información para el envío de la información. En la tecnología de petróleos se investiga mediante fractales la recuperación de petróleos en pozos.

## BIBLIOGRAFÍA

American mathematical society. “Chaos and fractals”. 1988

Eckman, J.P. “La física del desorden”. Mundo científico. N° 115, Vol 11

Jugens, Harmut. “El lenguaje de los fractales” Investigación y ciencia. Octubre 1990.

Manderbrot, Benoit. “the fractal geometry of nature”. De. W.H Freeman. 1983

Existe una interrelación de la teoría de los fractales con los procesos caóticos, los fractales están presentes en todo tipo de fenómenos no-lineales con comportamiento caótico. Muchos de estos fenómenos no-lineales están aportando significativos avances en ciencia y tecnología, como es el caso en la tecnología de las comunicaciones de la utilización del “solitón” en fibras ópticas, de la comprensión de diversos procesos químicos de la termodinámica de los sistemas disipativos, del entendimiento de los procesos atmosféricos y ambientales. En medicina se han encontrado estructuras tales como los pulmones y el sistema circulatorio que presentan formas autosimilares.

En resumen, la aplicación de la teoría de los fractales está en dos áreas principales:

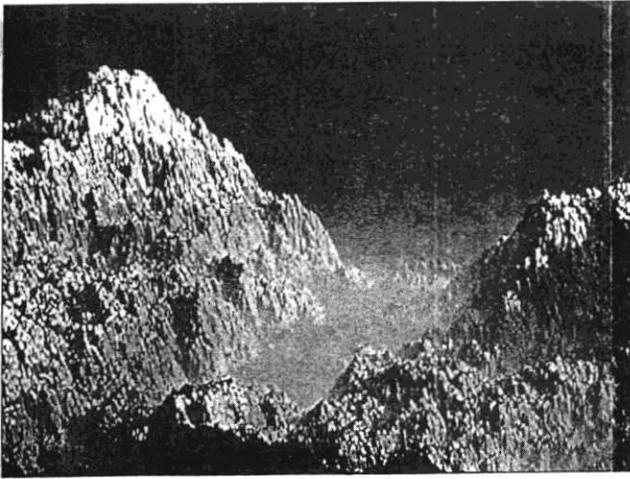
- Modelamiento de estructuras y datos en las ciencias físicas.
- Ciencia de los computadores, específicamente en comprensión de imágenes, computación gráfica y comunicaciones.

Los fractales están en la base de los fenómenos naturales, aparecen en sistemas tan simples como el péndulo de Foucault movilizado magnéticamente o en sistemas tan complejos como la distribución de las galaxias.

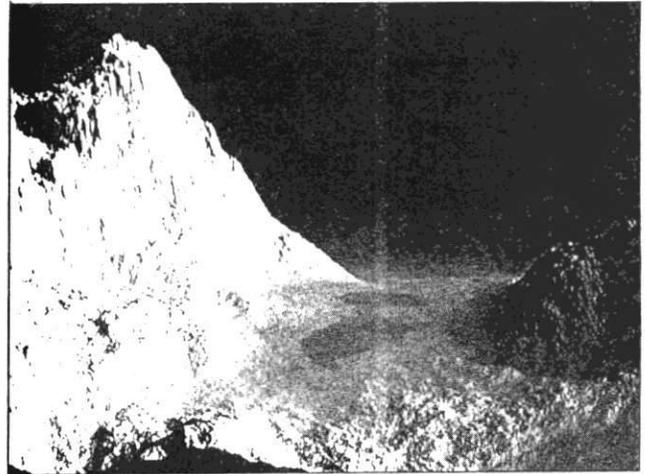
Markus, Mario. “Los diagramas de Lyapunov”. Investigación y ciencia. Septiembre 1995.

Peitgen, H.O. and P.H. Richter. “The beauty of fractals”. E.d. Springer. 1986

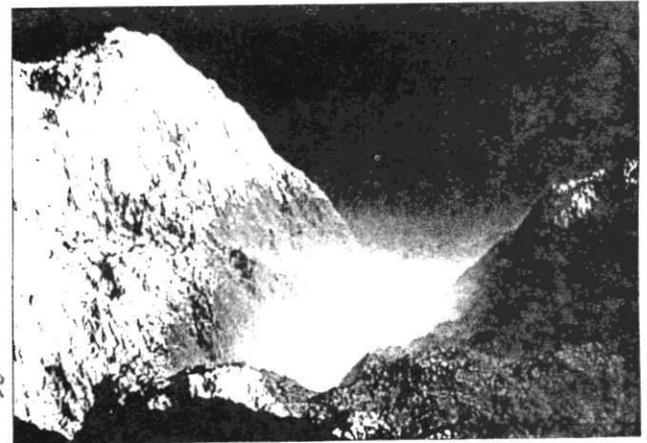
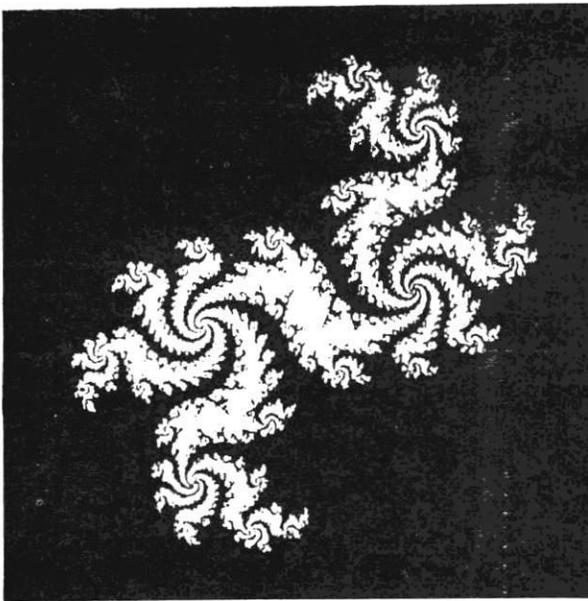
Wagensberg, Jorge (edición de) “Sobre la imaginación científica”. Ed. Tusquest. 1990.



Paisaje fractal



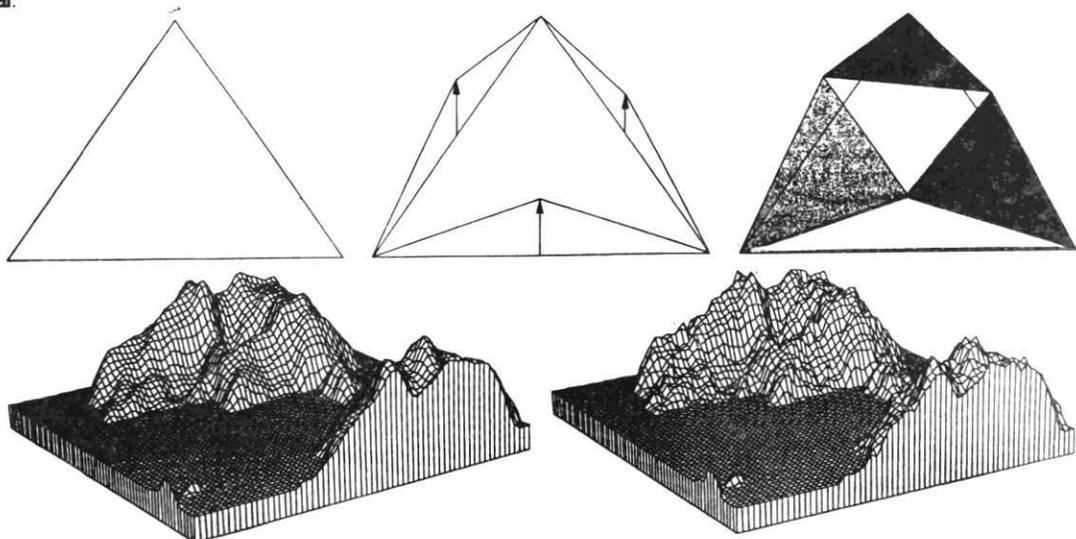
Paisaje fractal invernal

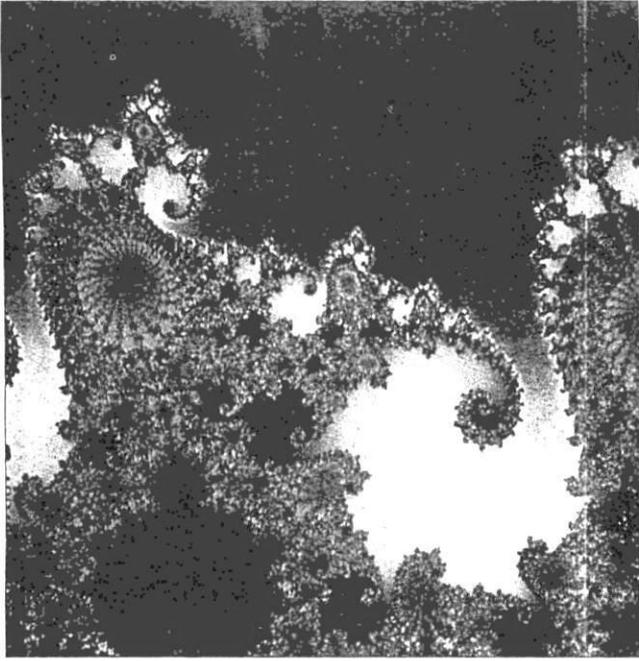


Paisaje fractal - Richard Voss (FGN)

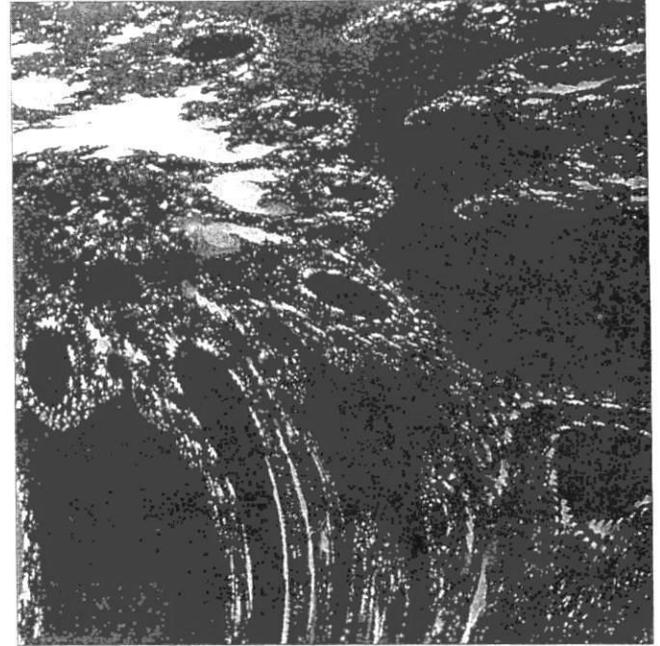
Diseño abstracto fractal:

el dragón (FGN)





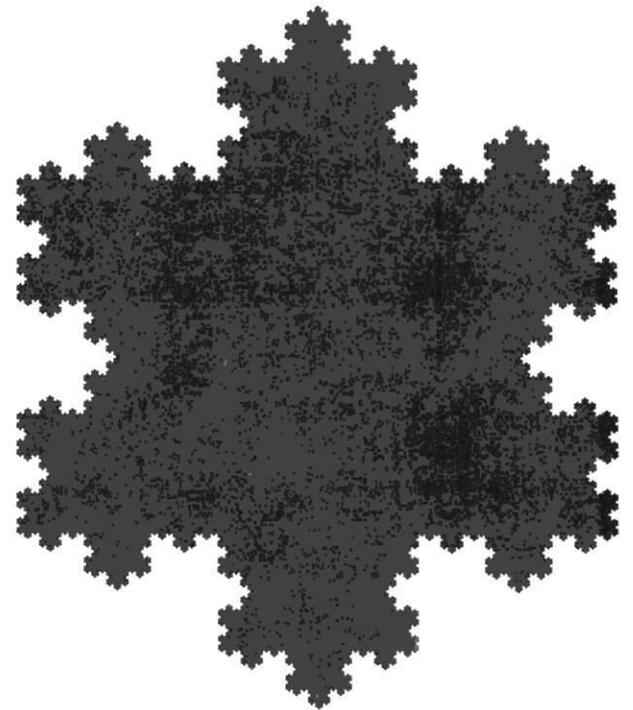
Detalle del conjunto de Mandelbrot



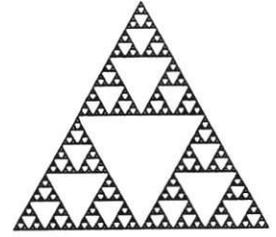
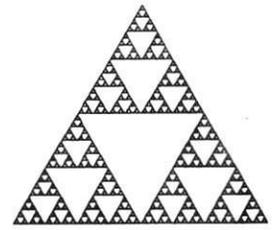
Diseño abstracto fractal



Bosque fractal



Copo de nieve (FGN)



La junta de Sierpinski

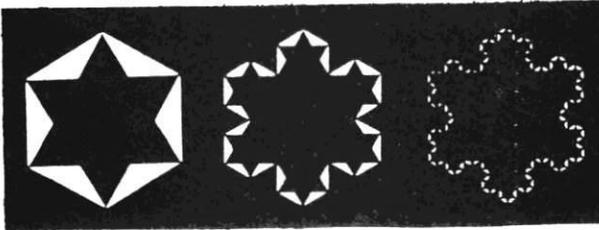
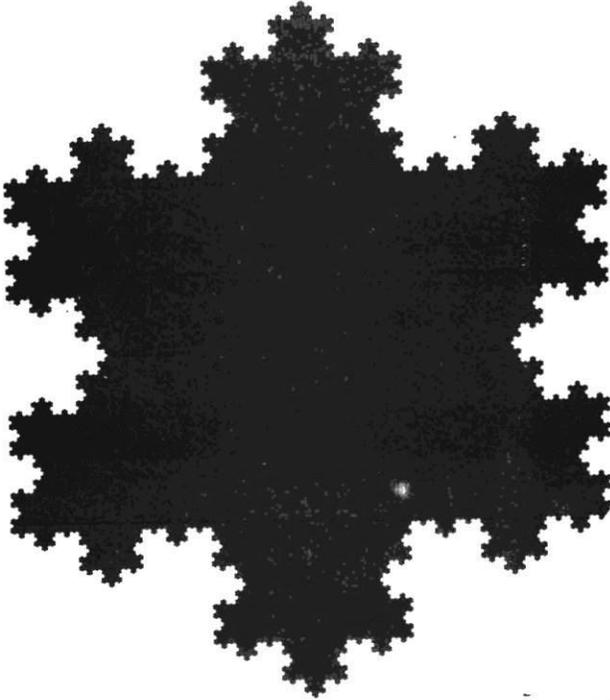


Figura fractal Copo de Nieve de Koch

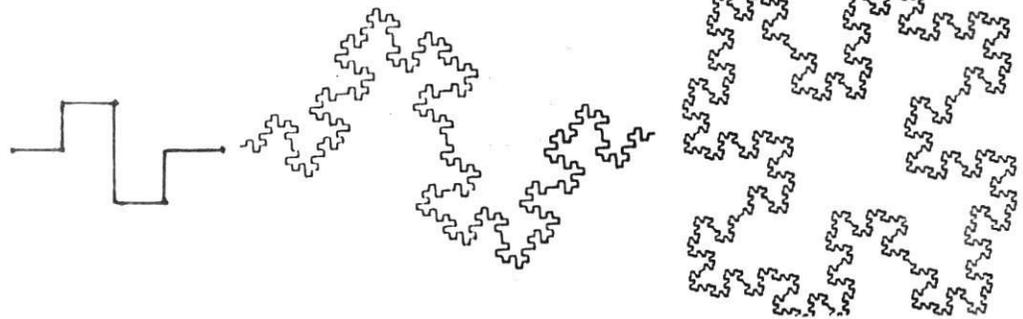


Figura fractal  $D = 1.5$

CURVA DE COCH						HELECHO						HOJA					
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_1$	$b_2$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_1$	$b_2$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_1$	$b_2$
0,33333	0,0	0,0	0,33333	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,17	0,0	0,0	0,64987	-0,013	0,013	0,64987	0,175	0,0
0,33333	0,0	0,0	0,33333	0,66666	0,0	0,84962	0,0255	-0,0255	0,84962	0,0	3,0	0,64948	-0,026	0,026	0,64948	0,165	0,325
0,16667	-0,28867	0,28867	0,16667	0,33333	0,0	-0,1554	0,235	0,19583	0,18648	0,0	1,2	0,3182	-0,3182	0,3182	0,3182	0,2	0,0
-0,16667	0,28867	0,28867	0,16667	0,66666	0,0	0,1554	-0,235	0,19583	0,18648	0,0	3,0	-0,3182	-0,3182	0,3182	0,3182	0,8	0,0