

ANÁLISIS MODERNO DE SISTEMAS DINÁMICOS EN INGENIERÍA. UN EJEMPLO

*Héctor A. Botero C.,**
*Henry O. Sarmiento M.,**
José L. Álvarez S.

RESUMEN

En este documento se presentan los pasos a seguir cuando se realiza un análisis en ingeniería y se resuelve un problema sobre la dinámica de un sistema electromecánico, utilizando software de simulación, como MATLAB y SIMULINK. Al final, los resultados obtenidos se analizan.

INTRODUCCIÓN

El análisis de sistemas es una de las tareas fundamentales que deben realizar cotidianamente los estudiantes y los profesionales relacionados con la ciencia y la tecnología. Algunas veces se carece de los conocimientos básicos que tocan estos aspectos, debido a la poca atención que se le otorga a este tipo de estudios, y al desconocimiento de técnicas y herramientas que permitan una fácil manipulación de los modelos matemáticos. Se retoma entonces un proceso de análisis en ingeniería propuesto en [1] y a la vez se aportan varios métodos de solución aplicados a un ejemplo particular. Como resultado de las simulaciones desarrolladas en este documento, se muestran las respuestas en el tiempo de las variables de estado de un sistema electromecánico (relé) y se analiza el comportamiento transitorio y esta-

cionario del sistema. Los programas de simulación se realizan con MATLAB [3] y SIMULINK [4].

EL PROCESO DE ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS

Cuando se realiza el análisis y el estudio de sistemas dinámicos es necesario considerar los siguientes aspectos:

Consideraciones topológicas y descripciones físicas

Se debe tener un diagrama del sistema físico que se estudia y sobre el diagrama se deben definir los parámetros y las variables. Para la realización del diagrama se siguen ciertas normas sobre la representación de los elementos activos y pasivos, que en general consisten en almacenadores, disipadores y fuentes de energía.

* Integrantes "GIMEL", Línea automatización y control.

Elección de un modelo y suposiciones simplificativas

Aquí se aplican las leyes y principios a cada componente del sistema, para luego enlazar los diferentes componentes con leyes generales. En este paso es importante tener conocimientos de los principios físicos que se manejan en ingeniería. Otro punto importante es el grado de refinamiento o exactitud esperada para la solución del problema. Por lo tanto, algunas consideraciones se hacen para despreciar fenómenos como la histéresis, las capacitancias parásitas, los parámetros distribuidos o las fricciones; esto con el fin de dar simplicidad al modelo obtenido. Es decir, debe existir un compromiso entre la simplicidad del modelo y la exactitud de los resultados del análisis.

Determinación de los parámetros del sistema

En este punto se deben cuantificar en unidades de ingeniería las resistencias, inductancias y capacitancias del sistema; así mismo para sistemas mecánicos, es necesario conocer los valores de las masas, los coeficientes de fricción viscosa y las constantes de resortes, entre otros. Muchos de estos parámetros se obtienen con pruebas o curvas de reacción que resultan al aplicar técnicas experimentales sobre el sistema físico que se estudia [6].

Formulación de las ecuaciones dinámicas

Las ecuaciones que rigen la dinámica de los sistemas físicos son ecuaciones diferenciales. En general, estas ecuaciones son no lineales. Las variables dependientes son, generalmente, las variables de interés y casi siempre son físicamente medibles. La variable independiente es el tiempo. Si las ecuaciones diferenciales tienen coeficientes constantes se dice que el sistema es invariante.

Solución de las ecuaciones dinámicas

Después de formular las ecuaciones diferenciales y conocer los coeficientes de éstas, es necesario resolverlas por algún método. En general las ecuaciones diferenciales se pueden resolver en forma analítica o en forma numérica. Para la solución analítica se pueden utilizar métodos clásicos o métodos de transformada de Laplace si el sistema es lineal. Para la solución numérica se utilizan métodos de integra-

ción numérica que, arrojan como resultado una solución aproximada al problema. Dichos métodos numéricos exigen capacidad de computo, por lo cual la ayuda del computador es indispensable. Así mismo, se tienen programas de simulación que resuelven conjuntos de ecuaciones diferenciales y son de amplia divulgación entre los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, estos programas tienen el inconveniente de simplificar demasiado la solución de los problemas y no brindan un panorama profundo sobre la forma como trabajan. Por lo tanto, es recomendable utilizar paquetes con prudencia y resolver los problemas primero en forma minuciosa, reconociendo el porqué de las cosas, para luego utilizar plenamente las potencialidades de esos paquetes, con el objetivo de aprovechar al máximo el proceso de aprendizaje sin dejar baches o lagunas conceptuales en el camino.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para ejemplificar la metodología expuesta se resolverá el problema del relé electromecánico, que consiste en encontrar y analizar utilizando diferentes métodos, la respuesta en el tiempo de las variables de estado.

Consideraciones topológicas y descripciones físicas

Un relé electromecánico puede ser modelado como un sistema con parámetros concentrados, como se muestra en la figura 1.

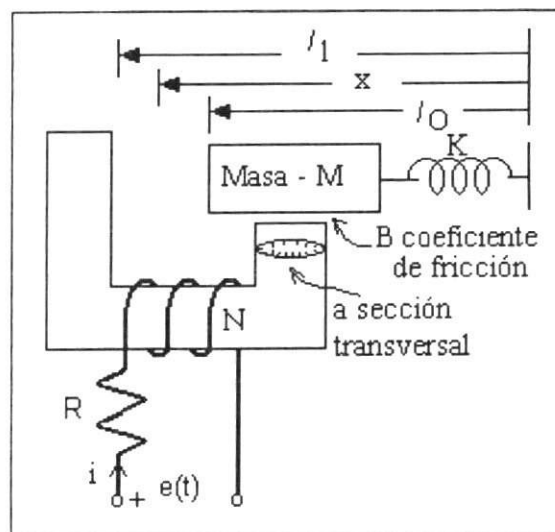


Figura 1. Sistema electromecánico

Las variables del sistema son:

x : Posición de la armadura móvil entre l_0 y l_1 [m]

i : Corriente por la bobina [A]

$\frac{dx}{dt}$: Velocidad de la armadura móvil [m/s]

$L(x)$: Inductancia de la bobina [H]

\mathfrak{R} : Reluctancia del circuito magnético [i/H]

e : Voltaje en la bobina [V]

Los parámetros del sistema son:

M : Masa de la armadura [kg]

K : Coeficiente de rigidez del resorte [N/m]

B : Coeficiente de fricción viscosa [N/(m/s)]

R : Resistencia eléctrica de la bobina [Ω]

a : Área de la sección transversal del núcleo de hierro [m²]

μ : Permeabilidad magnética [H/m]

μ_0 : Permeabilidad magnética del aire.

E : Valor máximo de la tensión suministrada por la fuente [V]

N : Número de espiras de la bobina.

Como se puede observar, la inductancia de la bobina depende de la posición de la armadura, esto es importante en el estudio de las máquinas de reluctancia y de las máquinas sincrónicas de polos salientes. La inductancia se define como el número de espiras al cuadrado sobre la reluctancia del circuito magnético.

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} [H] \quad (1)$$

La reluctancia depende de la permeabilidad del material magnético, el área de la sección transversal y la longitud del material. En el problema que se trata hay básicamente dos tipos de reluctancia. Una es debida a la oposición al paso del flujo magnético en el camino de aire, de longitud $(l_1 - x)$; la otra se debe a la oposición al flujo en el núcleo de hierro. Como la permeabilidad magnética del hierro es mayor que la del aire, la reluctancia total se debe casi completamente al espacio de aire y viene determinada por:

$$L(x) = \mu_0 * a * \frac{N^2}{(l_1 - x)} [H] \quad (2)$$

es decir, depende de la posición x como se había afirmado.

Elección del modelo y suposiciones simplificativas

En este problema se desprecia la saturación del circuito magnético y se supone que la permeabilidad magnética del hierro es infinita. Se desprecian los flujos dispersos y se considera que los tubos de flujo atraviesan el espacio de aire por un área igual a la sección transversal del material ferromagnético; así mismo, se supone que la fuerza de fricción es proporcional en forma lineal a la velocidad y que la fuerza del resorte es proporcional a su elongación.

Determinación de los parámetros del sistema

Los parámetros del sistema se determinan por pruebas o desde datos suministrados por los fabricantes. Normalmente las pruebas se realizan considerando el teorema de Thevenin, en el cual se mide la tensión en vacío y la corriente de cortocircuito.

La resistencia eléctrica se mide por el método de tensión-corriente y los parámetros mecánicos se miden experimentalmente.

De la referencia [1] se tienen los siguientes valores:

$$l_1 = 0.03 [m]$$

$$l_0 = 0.02 [m]$$

$$N = 200 \text{ espiras}$$

$$a = 0.0001 [m^2]$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} [H/m]$$

$$K = 0.01 [N/m]$$

$$B = 0.00000001 [N/(m/s)]$$

FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DINÁMICAS

Utilizando las leyes electromagnéticas de Lenz y Faraday, de voltajes de Kirchoff; y mecánicas de Newton, se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones:

Parte eléctrica:

$$e(t) = R * i + \frac{d}{dt} [L(x) * i] \quad (3)$$

donde los términos de la derecha denotan las fuerzas de restauración o caídas eléctricas de voltaje.

Parte mecánica:

$$F_e = \frac{1}{2} i^2 * \frac{dL(x)}{dx} = M * \frac{d^2 x}{dt^2} + B * \frac{dx}{dt} + K(x - l_0) \quad (4)$$

donde el lado derecho es la suma de las fuerzas de restauración y F_e es la fuerza eléctrica

Consideración especial

Se retoman algunos términos de las ecuaciones (3) y (4) por ser de gran interés para aplicaciones en ingeniería.

De la ecuación (3) se retoma el término que representa la variación en el tiempo del flujo ligado en la bobina:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [L(x) * i] &= L(x) * \frac{di}{dt} + i * \frac{d}{dt} [L(x)] \\ &= L(x) * \frac{di}{dt} + i * \frac{dL(x)}{dx} * \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

El primer miembro del lado derecho de la ecuación (5) corresponde a la tensión por inducción electromagnética, y el segundo corresponde a la tensión de velocidad que surge debido al movimiento relativo entre la armadura móvil y el material ferromagnético fijo. Aclaraciones adicionales de (2) – (5) se pueden encontrar en [1] y [2].

De la ecuación (4) se extrae el término que representa la fuerza eléctrica, dada por:

$$F_e = \frac{1}{2} i^2 * \frac{dL(x)}{dx} \quad (6)$$

En la cual la inductancia se puede representar con:

$$L(x) = \frac{A}{(C + x)} \quad (7)$$

Donde:

$$A = \mu_0 * a * N^2$$

$$C = -l_1$$

Entonces se tiene que:

$$F_e = -\frac{A}{2} * \frac{i^2}{(C + x)^2} \quad (8)$$

que es una expresión no lineal y hace que la ecuación (4) también sea no lineal. Se deduce adicionalmente que la fuerza F_e es positiva en el sentido positivo del eje x .

Solución de las ecuaciones

Por conveniencia se reescriben las ecuaciones (3) y (4) como sigue:

$$e(t) = R * i + \frac{d}{dt} [L(x) * i] \quad (9)$$

$$\frac{\mu_0 * a * N^2 * i^2}{(2 * (x - l_1)^2)} = M * \frac{d^2 x}{dt^2} + B * \frac{dx}{dt} + K(x - l_0) \quad (10)$$

Como se dijo anteriormente, las ecuaciones (9) y (10) son no lineales y las soluciones analíticas no son fáciles de encontrar; por lo tanto, en este trabajo se obtendrán soluciones numéricas. Adicionalmente, estas ecuaciones se pueden linealizar alrededor de un punto de operación o punto de trabajo del sistema, para esto es necesario que exista un punto de equilibrio estable. Las pequeñas señales o cambios en el movimiento serán desviaciones desde el punto de equilibrio, determinado por la tripleta (E, I_0, X_0) , tal que:

$$\begin{aligned} e &= E + e_1 \\ x &= X_0 + X_1 \\ I &= I_0 + i_1 \end{aligned} \quad (11)$$

en donde e, i, x son las variables originales y e_1, i_1 y x_1 son pequeñas desviaciones alrededor de (E, I_0, X_0) . La linealización del sistema es posible porque los términos tipo producto, como i^2 y $i * x$, son, despreciables;

es decir, el producto de dos valores que indican un pequeño cambio resulta ser muy pequeño. Con esta suposición se examinan los términos no lineales.

$$L(x) = i_0 * a * \frac{N^2}{l_1 - x} = i_0 * a * \frac{N^2}{l_1 - X_0 - x_1} \quad (12)$$

$$= \frac{L_0}{(1 - x_1 / (l_1 - X_0))}$$

$$L(x) = L_0 * (1 - x_1 / (l_1 - X_0))^{-1}$$

Donde:

$$L_0 = \mu_0 * a * \frac{N^2}{(l_1 - X_0)} \quad (13)$$

y es el valor de la inductancia en el punto de equilibrio.

La expresión (12) puede expandirse en una serie binomial:

$$L(x) = L_0 \left(1 + \frac{x_1}{l_1 - X_0} + \left(\frac{x_1}{l_1 - X_0} \right)^2 + \left(\frac{x_1}{l_1 - X_0} \right)^3 + \dots \right) \quad (14)$$

y la variación de $L(x)$ con respecto a x_1 es:

$$\frac{dL(x)}{dx_1} = \frac{L_0}{l_1 - X_0} \left(1 + 2 \frac{x_1}{l_1 - X_0} + 3 \left(\frac{x_1}{l_1 - X_0} \right)^2 + 4 \left(\frac{x_1}{l_1 - X_0} \right)^3 + \dots \right) \quad (15)$$

Las formas linealizadas de (14) y (15) son:

$$L(x_1) = L_0 \left(1 + \frac{x_1}{l_1 - X_0} \right) \quad (16)$$

$$\frac{dL(x_1)}{dx_1} = \left(\frac{L_0}{l_1 - X_0} \right) \left(1 + \frac{2x_1}{l_1 - X_0} \right) \quad (17)$$

donde $\frac{x_1}{l_1 - X_0} \ll 1$ y todos los términos de segundo grado y mayor se pueden despreciar.

El flujo ligado, λ , queda como:

$$\lambda = L(x_1) * i \quad (18)$$

$$\lambda = L_0 \left(1 + \frac{x_1}{l_1 - X_0} \right) (I_0 + i_1) \quad (19)$$

$$= L_0 I_0 + L_0 i_1 + \frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} x_1 \quad (20)$$

despreciando $x_1 * i_1$; la derivada con respecto al tiempo del flujo ligado queda:

$$\frac{d}{dt} [L * i] = L_0 \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} \right) \frac{dx_1}{dt} \quad (21)$$

y el termino $R * i$ queda como

$$R * i = R * I_0 + R * i_1 \quad (22)$$

al sustituir en la ecuación (9) se obtiene;

$$L_0 \frac{di_1}{dt} + R * i_1 + \left(\frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} \right) \frac{dx_1}{dt} + R * I_0 = e_1 + E \quad (23)$$

El punto de operación está dado por $R * I_0 = E$ y los términos restantes involucran la dinámica eléctrica alrededor del punto de operación, es decir:

$$R * I_0 = E \quad (24)$$

$$L_0 \frac{di_1}{dt} + R * i_1 + \left(\frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} \right) \frac{dx_1}{dt} = e_1 \quad (25)$$

y se obtiene la expresión eléctrica linealizada del movimiento.

Para obtener la ecuación mecánica linealizada de movimiento se tiene que:

$$i^2 = I_0^2 + 2I_0 i_1 + i_1^2 \quad (26)$$

$$i^2 = I_0^2 + 2I_0 i_1 \quad (27)$$

donde se desprecia i_1^2

Entonces la fuerza eléctrica puede expresarse como:

$$\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x_1)}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right) * (I_0^2 + 2I_0 i_1) * \frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} * \left(1 + \frac{2x_1}{l_1 - X_0}\right) \quad (28)$$

$$F_e = \frac{L_0 I_0^2}{2(l_1 - X_0)} + \frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} i_1 + \frac{L_0 I_0^2}{(l_1 - X_0)^2} x_1 \quad (29)$$

por lo tanto se tiene:

$$\frac{L_0 I_0^2}{2(l_1 - X_0)} + \frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0} i_1 + \frac{L_0 I_0^2}{(l_1 - X_0)^2} x_1 = \quad (30)$$

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + K(X_0 - l_0) + Kx_1$$

El equilibrio mecánico en estado estable está dado por:

$$\frac{L_0 I_0^2}{2(l_1 - X_0)} = K(X_0 - l_0) : \quad (31)$$

así mismo, la dinámica mecánica para el sistema linealizado se obtiene al eliminar los términos en estado estable:

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + \left(K - \frac{L_0 I_0}{l_1 - X_0}\right) x_1 = \frac{L_0 I_0}{(l_1 - X_0)} i_1 \quad (32)$$

Entonces la dinámica electromecánica del sistema se obtiene al solucionar las ecuaciones linealizadas (25) y (32), que pueden representarse por medio de las ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1}{dt} = v$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L_0} * i_1 - \left(\frac{I_0}{l_1 - X_0}\right) * v + \frac{I_0}{L_0}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B}{M} \frac{dx_1}{dt} - \left(K - \frac{L_0 I_0^2}{(l_1 - X_0)^2}\right) * \frac{x_1}{M} + \frac{L_0 I_0 * i_1}{M * (l_1 - X_0)}$$

que en forma matricial quedan:

$$\frac{dX}{dt} = A * X + B * U \quad (33)$$

En donde

X : Estado del sistema (3*1)

A : Matriz del sistema (3*3)

B : Matriz de entrada (3*1)

U : Vector de entrada (1*1)

Aclaraciones adicionales sobre (33) en la referencia [5].

Existencia del punto de equilibrio

Las ecuaciones (24) y (31) definen el punto de equilibrio en estado estable. La ecuación (24) define la ley de Ohm para un circuito resistivo; es decir, conocida R y E se puede determinar la corriente en estado estable. Ahora se retoma la ecuación en estado estable para el sistema mecánico, dada por (31), y se representa gráficamente, dibujando la fuerza del resorte y la fuerza eléctrica cuando se tiene una corriente I_0 constante y varía la posición inicial de la armadura. Esto se observa en la figura número 2.

Un punto de equilibrio se obtiene cuando la línea que describe la fuerza del resorte corta la curva que deno-

ta la fuerza eléctrica. Para una corriente inicial I_0 mayor de 3[A] no existirá punto de equilibrio, y la fuerza eléctrica será siempre mayor que la fuerza del resorte que halan la masa hacia la posición extrema $x=l_1$. Para la corriente $I_0 = 3$ [A], el valor de X_0 es 2.5 [cm] y la fuerza del resorte es igual a la fuerza eléctrica (Punto 1 de la figura). Entonces una ligera perturbación alrededor de este punto producirá un aumento de la fuerza eléctrica que supera la fuerza restauradora del resorte. Así mismo, para este punto de operación no se obtiene un punto estable.

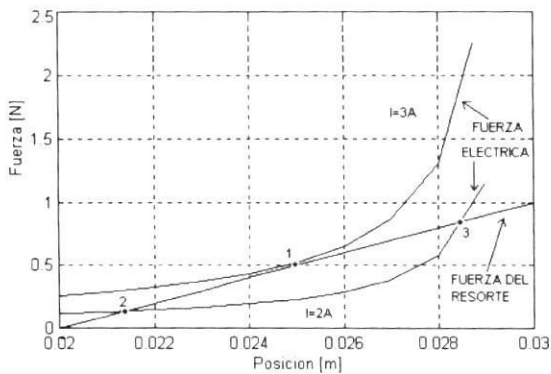


Figura 2. Representación del punto de equilibrio

Ahora, si la corriente se disminuye a $I_0 = 2$ [A] se obtienen los puntos 2 y 3 como dos puntos de equilibrio. En el punto 3, si la masa es movida a la izquierda (X_0 incrementada), la fuerza eléctrica será siempre mayor que la fuerza del resorte, resultando un movimiento continuo a la izquierda, hasta $x = l_1$. De otro lado, si la masa es movida a la derecha (X_0 disminuida), la fuerza del resorte será siempre mayor que la fuerza eléctrica y el movimiento continuará hacia el punto 2 ($x=2.13$ [cm]), que es el punto de operación estable. Una perturbación a la izquierda o a la derecha del punto 2 resultará en un movimiento de la masa de nuevo hacia este punto. Las condiciones para este punto son:

$$E = 2[V]$$

$$I_0 = 2[A]$$

$$X_0 = 2.13[cm]$$

y se tomará como condición inicial para las simulaciones.

Simulación

Se realizó la simulación del sistema lineal, dado por la ecuación de estado (33), utilizando el programa MATLAB. Para ello se utilizó el comando LSIM que resuelve numéricamente la ecuación de estado. La entrada al sistema es un escalón en la fuente de tensión, de 0.1[V]. Los resultados gráficos se ilustran en las figuras 3 a 5 para cada una de las variables de estado.

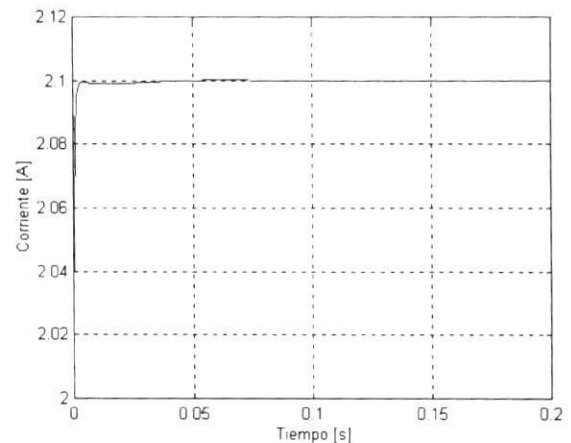


Figura 3. Corriente (A)

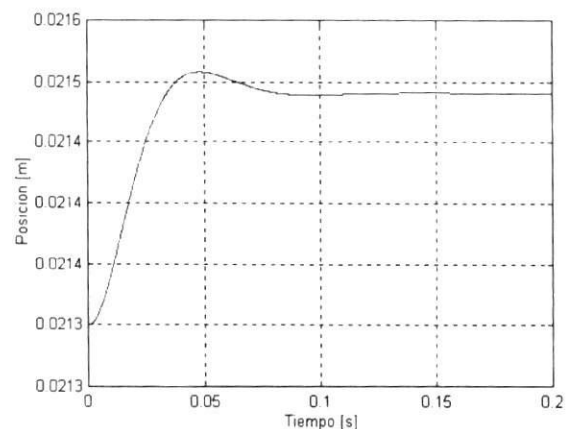


Figura 4. Posición de la armadura (m)

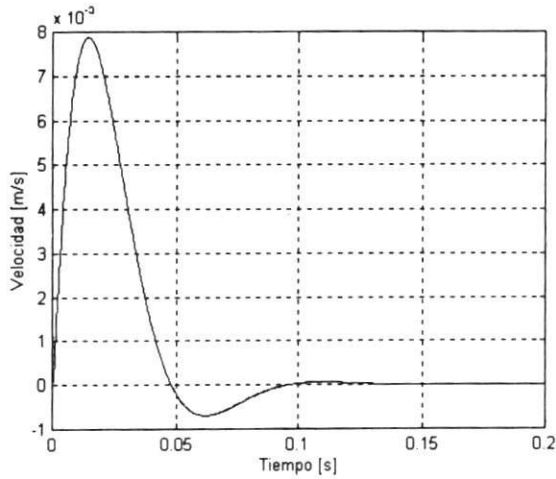


Figura 5. Velocidad de la armadura (m/s)

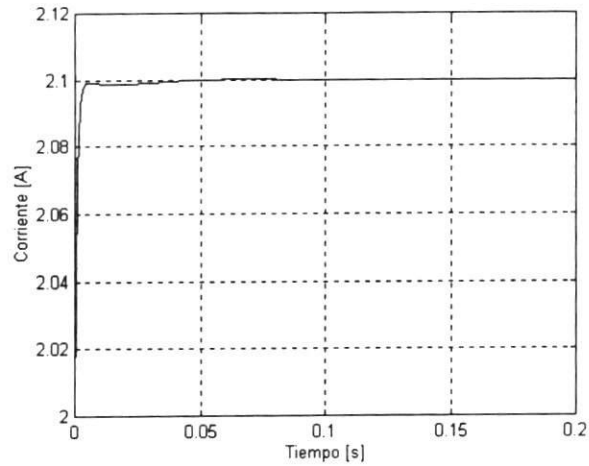


Figura 6. Corriente (A)

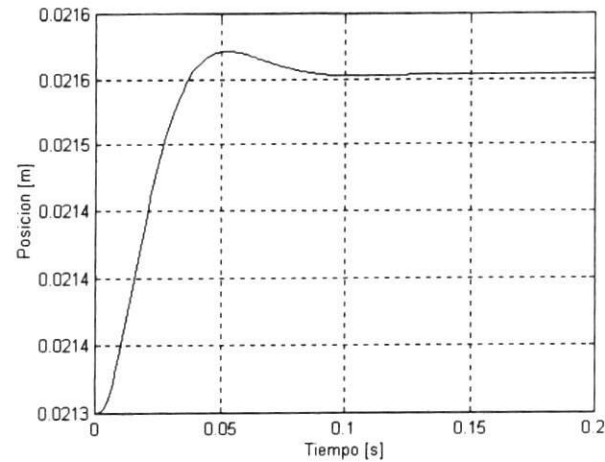


Figura 7. Posición de la armadura (m)

%PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA ELECTROMECAÁNICO DEL MODELO DINÁMICO DE UN RELÉ

%El programa contiene:

%-Graficación del punto de operación estable
 %-Simulación del modelo linealizado
 %-Simulación del modelo no lineal
 clear;clc

%Parámetros del sistema en MKS

l1=0.03; %[m]

l0=0.02; %[m]

N=200; %[espiras]

a=1/10000; %[m^2]

K=100; %[N/m]

U0=4*pi*10^(-7); %[H/m]

I0=2; %[A]

X0=.0213; %[m]

V0=2; %[V]

B=1; %[N-s/m]

M=10/1000; %[Kg]

r=1; %[Ohm]

clc

disp('Se grafica el punto de operacion')

disp('Presione enter para continuar')

pause

%-Graficación del punto de operacion en estado estable

L0=(U0*a*N^2)/(l1-X0);

vx0=[2/100:.1/100:2.7/100];

fresorte=(vx0-I0).*K;

felectrica=(L0*(I0^2))./(2*(l1-vx0));

plot(vx0,fresorte,'y')

pause

hold on

plot(vx0,felectrica,'b');grid;xlabel('Posicion[m]');

ylabel('Fuerza [N]')

pause;hold off;clc

disp('Se graficarán los resultados de la simulación para el modelo lineal')

disp('Presione enter para continuar')

pause

%-Simulación del sistema lineal mediante variables de estado

%Matrices del sistema

MA=[(-r/L0), 0, -(I0)/(l1-X0); 0, 0, 1;

((L0*I0)/(l1-X0))*(1/M),

-(K-(L0*I0^2)/(l1-X0)^2)*(1/M),-B/M];


```

MB=[1/L0;0;0];
MC=eye(3);
MD=zeros(3,1);
U=.1*ones(1001,1);
T=[0:.1/1000:.1];
CI=[2,.0213,0];
Y=lsim(MA,MB,MC,MD,U,T);
plot(T,(Y(:,1)+CI(1)));grid;xlabel('Tiempo[s]');
    ylabel('Corriente [A]')
pause
plot(T,(Y(:,2)+CI(2)));grid;xlabel('Tiempo[s]');
    ylabel('Posicion [m]')
pause
plot(T,(Y(:,3)+CI(3)));grid;xlabel('Tiempo[s]');
    ylabel('Velocidad [m/s]')
pause
clc
disp('Se graficarán los resultados de la simulación
para el modelo no lineal')
disp('Presione enter para continuar')
pause
%-Simulación del sistema no lineal
%Solución mediante un metodo de Runge-Kutta de
cuarto orden
h=.001;%Tamaño del paso de integración
N=.2/h;%Número de puntos en el intervalo
T=[0:h:.2];clc
cambio=input('Entre el cambio deseado en la fuente
de tension: ');
X(:,1)=[2;0.0213;0];
LX(1)=(U0*a*N^2)/(11-X0);
for i=2:N+1
    LX(i)=(U0*a*N^2)/(11-X(2,i-1));
    ANL=[-r/LX(i),0,0;
        0,0,1;
        0,-K/M,-B/M];
    BNL=[(-X(1,i-1)*X(3,i-1))/(11-X(2,i-1));
        0;
        (1/(2*M))*X(1,i-1)^2*LX(i)/(11-X(2,i-1))];
    CNL=[(2+cambio)/LX(i);0;K*10/M];
    %Termino K1
    K1=h*(ANL*X(:,i-1)+BNL+CNL);
    %Termino K2
    K2=h*(ANL*(X(:,i-1)+K1/2)+[
        -(X(1,i-1)+K1(1)/2)*(X(3,i-1)+K1(3)/2)/(11-
        (X(2,i-1)+K1(2)/2));
        0;
        (1/(2*M))*X(1,i-1)^2*LX(i)/(11-X(2,i-1)+K1
        (2)/2)]+CNL);
    X(:,i)=X(:,i-1)+(1/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
plot(T,X(1,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Corriente [A]')
pause;zoom
plot(T,X(2,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Posicion [m]')
pause;zoom
plot(T,X(3,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Velocidad [m/s]')
pause;zoom

```

```

(1/(2*M))*X(1,i-1)^2*LX(i)/(11-(X(2,i-1)+K1
(2)/2)]+CNL);
    %Termino K3
    K3=h*(ANL*(X(:,i-1)+K2/2)+[
        -(X(1,i-1)+K2(1)/2)*(X(3,i-1)+K2(3)/2)/(11-
        (X(2,i-1)+K2(2)/2));
        0;
        (1/(2*M))*X(1,i-1)^2*LX(i)/(11-(X(2,i-1)+K2
        (2)/2)]+CNL);
    %Termino K4
    K4=h*(ANL*(X(:,i-1)+K3)+[(-(X(1,i-1)+K3
    (1))*(X(3,i-1)+K3(3)))/(11-(X(2,i-1)+K3(2))));
    0;
    (1/(2*M))*X(1,i-1)^2*LX(i)/(11-(X(2,i-1)+K3
    (2)))]+CNL);
    X(:,i)=X(:,i-1)+(1/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
plot(T,X(1,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Corriente [A]')
pause;zoom
plot(T,X(2,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Posicion [m]')
pause;zoom
plot(T,X(3,:));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Velocidad [m/s]')
pause;zoom

```

La programación del método de Runge-Kutta se puede simplificar utilizando el comando ODE45 de MATLAB. Para utilizar este comando primero se genera una M-FUNCTION que contenga el conjunto de ecuaciones diferenciales, y luego se realiza la simulación y la graficación. Los resultados gráficos se ilustran en las figuras 9 a 11, y a continuación se muestran los programas implementados.

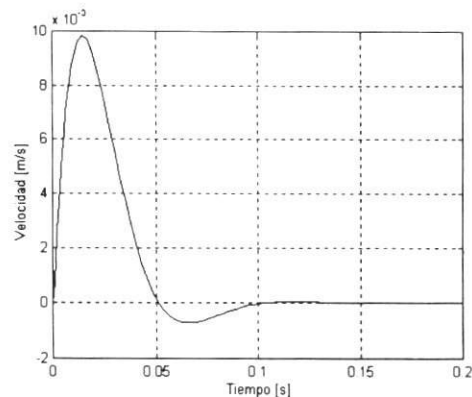


Figura 9. Corriente (A)

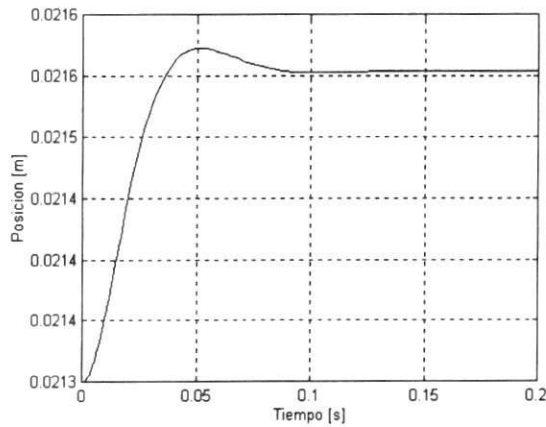


Figura 10. Posición de la armadura (m)

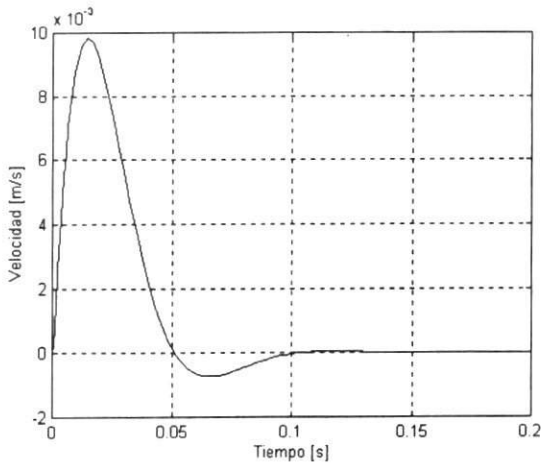


Figura 11. Velocidad de la armadura (m/s)

```
%Función que contiene las ecuaciones diferenciales
a=1/10000; %[m^2]
K=100; %[N/m]
U0=4*pi*10^(-7); %[H/m]
I0=2; %[A]
X0=.0213; %[m]
V0=6; %[V]
B=1; %[N-s/m]
M=10/1000; %[Kg]
r=1; %[Ohm]
clc
LX=(U0*a*N^2)/(11-X(2));%Inductancia
%Ecuaciones del sistema
pX(1)=(-r/LX)*X(1)-(X(1)*X(3))/(11-X(2))+
(2+incremento)/LX;
```

```
pX(2)=X(3);
pX(3)=(-K/M)*X(2)+(-B/M)*X(3)+(1/(2*M))*X
(1)^2*(LX/(11-X(2)))+K*I0/M;
%Utilización del comando ODE45 y graficación de
los resultados
X0=[2,.0213,0];%Estados iniciales
[t,X]=ode45('rele2',0,0.2,X0);%La M-FUNCTION
se guardó en %rele2.m
plot(t,X(:,1));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Corriente [A]')
pause
plot(t,X(:,2));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel
('Posicion [m]')
pause
plot(t,X(:,3));grid;xlabel('Tiempo [s]');ylabel('Ve-
locidad [m/s]')
```

Adicionalmente, el sistema no lineal se simuló utilizando la herramienta de simulación SIMULINK que trabaja conjuntamente con MATLAB. Con este tipo de programas se realizan diagramas en bloques que representan la dinámica de los sistemas y se ejecuta la simulación desde la ventana del menú. Los parámetros de la simulación pueden ajustarse.

El diagrama en bloque en SIMULINK y los resultados gráficos se ilustran en las figuras 12 a 15.

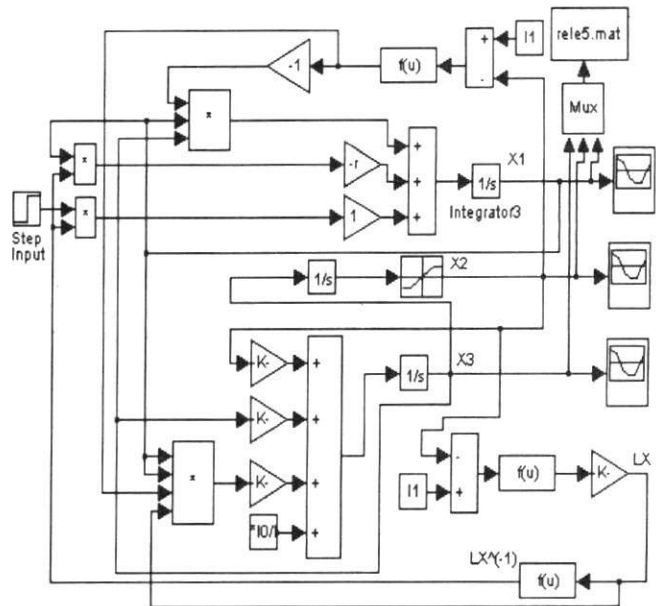


Figura 12. Diagrama de simulación en SIMULINK

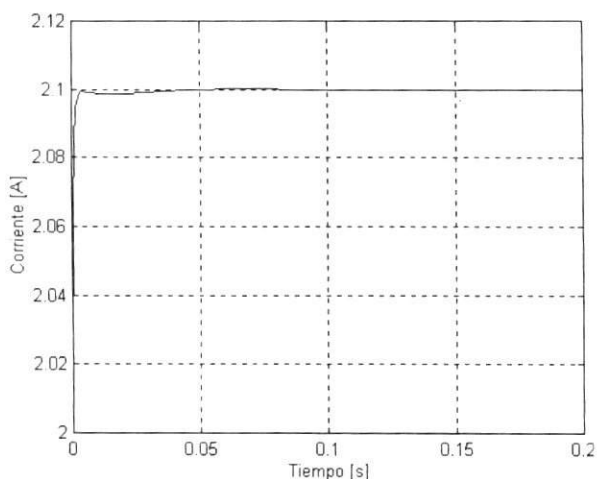


Figura 13. Corriente (A)

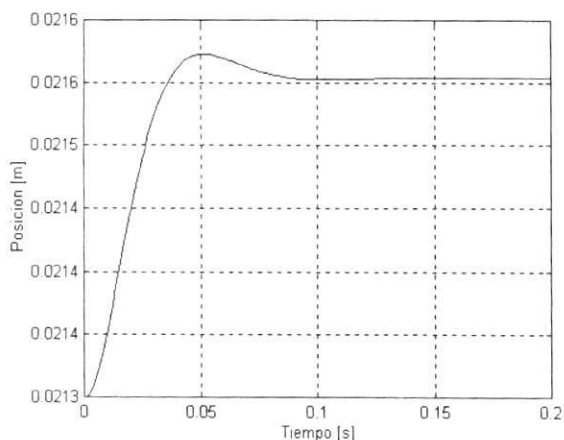


Figura 14. Posición de la armadura (m)

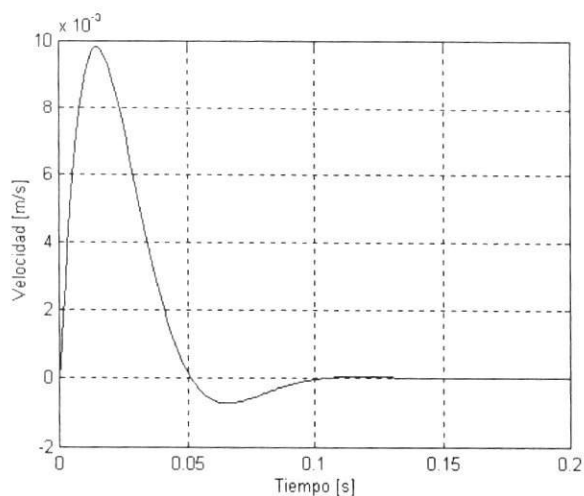


Figura 15. Velocidad de la armadura (m/s)

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados de la simulación para el sistema lineal se observan en las figuras 3 a 5. El tiempo de establecimiento de la corriente es de 0.1[s] y el de la posición de 0.15[s]. El sistema tiene un comportamiento estable para el punto de operación seleccionado.

En las figuras 6 a 15 se observan los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas al sistema no lineal, para lo cual se utilizaron diferentes métodos de solución. Los resultados son idénticos, en todos los casos. El tiempo de establecimiento de la corriente es de 0.1 [s]; para la posición y para la velocidad es de 0.15[s].

Al comparar los resultados del sistema lineal con el no lineal, se observa que el tipo de respuesta es idéntico; sin embargo, el valor en estado estable para la posición es menor en el caso lineal. Esta diferencia se debe a que la fuerza eléctrica representada por la ecuación (6), y que se utilizó para el sistema no lineal, es mayor que la fuerza eléctrica representada por la ecuación (29) para el sistema lineal, porque se despreciaron algunos términos en las ecuaciones (15) y (26). En consecuencia, la fuerza eléctrica total en el caso lineal es menor y la posición final de la armadura es menor.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de análisis de sistemas dinámicos, utilizando herramientas modernas que simplifican la manipulación matemática y que están disponibles en el medio universitario. Así mismo, se realizó la simulación tanto para el modelo lineal como para el no lineal y se mostró que los resultados son similares.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. NASAR, S.A. & UNNEWEHR L.E. Electromechanics and electric machines, John Wiley, 1979.
- [2]. FITZGERALD, A.E. & KINGSLEY, CHARLES. Electric Machinery, Mc Graw Hill, 1961.
- [3]. SHAIAN, B AND HASSUL, M. Control System Design Using Matlab, Prentice Hall, New jersey, 1993.
- [4]. The MATH WORKS Inc. "The Student Edition of SIMULINK", Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [5]. ROHRS, C. E., MELSA, J. L. Y SCHULTZ, D. G. Sistemas de control lineal, Mc Graw-Hill, México, 1994.
- [6]. BAIRD, D.C. Experimentación: Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Prentice Hall, México, 1991.