Revista Facultad de Ingeniería No. 27. pp. 151-163. Diciembre, 2002

Óptimo económico de máquinas y equipos Parte I. Delimitación del problema

*Gabriel Poveda Ramos**

(Recibido el 30 de mayo de 2002)

Resumen

Este artículo presenta un estudio desde el punto de vista matemático (algebraico y del análisis) de cierta clase de problema de la economía y la tecnología industrial, que se refieren a la compra o construcción y, operación de máquinas e instalaciones (bienes de capital, en general), que exigen una inversión financiera inicial, que se van a operar por algunos meses o años, en forma continuada, y que luego, finalmente, van a ser retirados para revenderlos como bienes usados o para desecharlos como materiales sin valor. Uno de los asuntos clave en la ingeniería industrial es determinar desde el principio, con alguna certidumbre, cuanto tiempo se va a mantener la máquina o instalación en uso. Esta determinación es necesaria para adoptar de manera racional y óptima varias decisiones importantes, como por ejemplo: a qué oficios se les asigna, qué productos o servicios va a entregar, qué régimen de mantenimiento se le va a aplicar, cómo se va a depreciar y otras diversas que son importantes y muy relevantes en la empresa industrial. Entre otras novedades estamos introduciendo la noción de "dimensión física" de magnitudes financieras y económicas.

---------- *Palabras clave*: ingeniería económica, bienes de capital, inversión, vida útil, depreciación, valor de salvamento.

Economic optimum for machinery and equipment. Part I. Problem definition

Abstract

This paper presents a study made from the standpoint of Mathematics (both algebraically and of the analysis) of a certain class of problems in the field of industrial economics and technology, referring to the project of purchasing —or building— and operating machines or facilities which require an initial investment and intended to be operated in a continued way during several

* Profesor Escuela de Formación Avanzada. Universidad Pontificia Bolivariana. mgt@logos.upb.edu.co.

months or years, to be finally retired and sold as used goods or discarded as worthless materials. One of the key issues in industrial engineering is to determine (or estimate) in advance from the beginning, with reasonable certainty, how long is the asset to be active and working. This figuring - out is necessary in order to adopt, in a rational and optimal manner, some important decisions as for example: which jobs to be assigned to the machine, which products or services will it render, how is it going to be maintained, how fast to depreciate it and several other questions which are quite relevant in the industrial life. Among other new ideas we introduce here the concept of "physical dimension" for financial and economic magnitudes.

---------- *Key words*: economic engineering, capital goods, investment, useful life, depreciation, surrender value.

Introducción

Este es un tema que los libros sobre economía industrial, de economía para ingenieros, de ingeniería industrial y de matemáticas financieras no tratan. Para comprobarlo pueden consultarse las referencias dadas en la bibliografía, como ejemplos muy representativos. Tampoco el autor lo ha visto tratado en las revistas técnicas o científicas referentes a estas materias (ver algunas de las más importantes en la bibliografía).

Los matemáticos colombianos no se ocupan de temas de esta naturaleza, a pesar de que éstos son importantes y útiles. Nos estamos refiriendo al tema de estudiar y decidir la compra o la construcción de equipos, máquinas, instalaciones o, en general, de bienes de capital y de establecer, ex-ante, un programa de operaciones para ellos. Esta es una situación frecuente en países en desarrollo como Colombia, que pone en juego inversiones en dinero importantes y en la cual es muy necesario tomar decisiones óptimas en sentido técnico y en sentido económico. El caso se da muy especialmente en sectores modernos de la economía como son la industria fabril, el sector eléctrico, la gran minería, la construcción de obras públicas y el transporte ferroviario, según la experiencia del autor. Este último ha elaborado el trabajo que aquí se presenta con base en esa experiencia, y ha tenido la oportunidad de aplicar los métodos que aquí se muestran a varios casos de la realidad industrial y tecnológica de Colombia.

En Colombia y en muchos otros países los temas mencionados se resuelven, en la práctica y por lo común, mediante conjeturas intuitivas o basadas en los antecedentes rutinarios o la experiencia de años, o en *guesses* más o menos fundados en consideraciones puramente cualitativas e intuitivas.

Este artículo tiene cuatro propósitos:

1. Presentar estos resultados que son novedosos y útiles.

2. Demostrar que las matemáticas son útiles también para propósitos mundanos.

3. Avanzar el conocimiento en la disciplina de la microeconomía matemática (que es aún muy incipiente).

4. Invitar a ingenieros y matemáticos a obtener nuevos resultados en este terreno.

El problema y su modelo matemático

En el mundo industrial es muy frecuente la situación crucial en que se trata de comprar o construir una máquina, o una instalación (o en general, un bien de capital) que implica una inversión considerable y que ha de utilizarse en propósitos predeterminados. Y se trata de esclarecer de antemano varios aspectos de su operación, de tipo cuantitativo, que puedan expresarse en datos numéricos y en funciones algebraicas o trascendentes de variables reales. Uno de estos aspectos es el referente a la duración de vida útil en que se puede operar la máquina en condiciones que optimicen su rendimiento real. El otro, aún más importante es el de calcular antes de realizar el proyecto, cuánto será el máximo beneficio económico que puede esperarse del mismo, en términos de utilidad promedio anual, que le interesa mucho al inversionista.

El asunto invertir en un bien de capital, nuevo, al que designaremos con la letra B, para producir un bien material o para rendir un servicio que es cuantificable en unidades físicas de medida (como toneladas, litros, metros cuadrados, millares de unidades) y que se va a vender a precio conocido o que es estimable a futuro. Dicho bien o servicio se denominará P. La inversión va a costar una suma de dinero que designaremos con $W(0)$ y que aquí mediremos en dólares. Ejemplo de esta situación es comprar un telar para producir telas; o construir un ferrocarril que transporte carga por toneladas-kilómetros; o adquirir un torno automático para tornear piezas por millares de unidades; o instalar un alternador para producir kilovatios-horas de energía.

En el mismo momento de hacer la inversión se pone en funcionamiento el activo B para producir a P en un régimen uniforme o variable pero continuo.

En ese momento, para tomar la decisión, debe determinarse cuánto tiempo vamos a operar a B, con el fin específico de que nos optimice la rentabilidad promedio anual, porque de esto dependen otras decisiones que es necesario aplicar de inmediato, como el grado de utilización de su capacidad, el régimen de mantenimiento y de reparaciones que se aplicarán, las fórmulas que se usen para depreciación contable, y otros.

Por eso lo esencial de este documento se refiere a la predeterminación de la vida útil y la rentabilidad óptima que se programen para B en el futuro, pero con ayuda de rigurosos métodos del álgebra y de análisis matemático.

La tabla 1 muestra unos pocos (veinte) ejemplos de máquinas o equipos B y sus productos P.

Ejemplos de equipos y productos. La experiencia del autor le permite señalar algunos tipos de bienes de capital y de productos a los que puede aplicarse estas ideas y estos métodos.

Tabla 1 Ejemplos de máquinas o equipos *B* y sus productos *P* y el tiempo *(t)*

Bienes de capital (B)	***Producto (P)***		***Tiempo (edad) de operación (t)***
	Nombre	***Unidad de cantidad***	
Telar sin lanzadera	Tela plana	m^2	Días completos de tiempo trabajo
Tractocamión	Transporte de carga	tons-km	Kilómetros recorridos
Pequeña fundición de cubilote	Piezas fundidas	Kilos	Número de coladas
Avioneta	Transporte pasajeros	Número de pasajeros	Horas voladas
Edificio oficinas	Espacio para arrendar	m^2-mes	Años de vida
Alternador	Energía eléctrica	kilovatios-hora	Horas de trabajo
Horno eléctrico de arco	Acero de chatarra	Toneladas	Meses de vida
Reactor - autoclave	Resinas poliméricas	Toneladas	Meses o años de trabajo
Torno paralelo para metales	Piezas torneadas	Toneladas de metal	Días o meses de trabajos
Impresora rotativa	Impresos en papel	Toneladas de papel	Meses o años de trabajo
Caldera eléctrica	Vapor de agua alta presión	Toneladas de vapor	Horas o días completos
Horno panadería	Pan y galletas	Toneladas de producto	Toneladas de harina
Torre de destilación	Alcohol etílico	Metros cúbicos de alcohol	Días trabajados completos
Tanque fermentador	Cerveza	Hectolitros cerveza	Número de tandas

Tabla 1 (continuación)

Bienes de capital (B)	***Producto (P)***		***Tiempo (edad) de operación (t)***
	Nombre	***Unidad de cantidad***	
Horno rotatorio	Cemento calcinado	Toneladas de cemento	Meses o años de trabajo
Cargador de minería	Cargue de mineral	Toneladas de mineral	Horas o días completos
Soldadora tubos de acero	Tubería con costura	Toneladas de tubería	Horas o días completos
Sierra mecánica circular	Madera aserrada	Piezas o toneladas	Días trabajados completos
Máquina Fourdrinier	Papel	Toneladas de papel	Años de trabajo
Computador *mainframe*	Servicio computación	Horas-máquina	Meses o años de trabajo

Podrían señalarse muchos más ejemplos relevantes.

Al enfrentar el problema de la vida útil óptima de B y de su correspondiente rentabilidad máxima hay que tener en cuenta varios aspectos: el volumen de producción que va a dar; el precio unitario de P; el costo de las materias primas que necesita; la vulnerabilidad de B a daños que puedan destruirla; el costo de mantenimiento y su comportamiento con la edad; el rendimiento en producto por día, y su eventual merma o aumento en el futuro.

Observemos primero que el transcurso de la vida de producción de B puede medirse en horas, días u otra unidad de tiempo físico trabajada o trabajable. Pero puede medirse también en alguna otra variable diacrónica o evolutiva que crezca con el tiempo de operación. Puede ser, por ejemplo, en kilómetros recorridos si se trata de un camión; o número de revoluciones que ejecute un mecanismos rotativo; o kilovatios-horas que consuma un aparato eléctrico; o yardas cúbicas que excave una retroexcavadora. En la tabla 1 se muestran varios ejemplos de B que son bien conocidos en Colombia y otros países, y las correspondientes unidades no cronométricas pero que se usan en la práctica para medir la edad "t" de B. Pero en este artículo hablaremos solamente de medidas de tiempo físico de trabajo productivo de B, y este será medido en unidades como horas, días o meses, que son los más comunes en la práctica industrial y financiera. Indicaremos con "t" la variable "tiempo"; y con "dt" un diferencial de tiempo, y cuando sea necesario lo identificaremos físicamente como un segundo (1/60 de minuto) de trabajo de B. Un segundo es suficientemente pequeño frente a los meses o años que puede adoptar t, como para poder admitir en el mundo real que 1 segundo = 1 diferencial de tiempo = dt. En la vida real de la tecnología y de la industria, la variable "tiempo" nunca se puede considerar más que en un lapso finito (de años o de días); y por eso aquí consideramos que en este sentido el tiempo "t" asume valores que son todos positivos ($t \geq 0$); que es variable solo en incrementos positivos (el curso del tiempo es irreversible: $\Delta t \geq 0$); y que en todo problema de estos hay una cota superior Ω para t. En la teoría esta cota puede ser finita o infinita; a la variable t la llamamos la "edad" de la máquina B, en los distintos momentos de su historia en servicio.

Algunas informaciones previas necesarias

Valor económico y edad

El valor en dinero de una máquina *B* en el comercio varía, en la realidad, con varios factores: según su calidad, según sus materiales, según su edad, según su rendimiento, etc. Pero una vez que se compra nueva, en perfecto estado y se pone en uso, su valor como equipo usado dependerá más que todo de su edad t. Así pues, llamaremos *W(0)* el valor que cueste la máquina nueva ($t = 0$); y *W(t)* será el valor que tenga como equipo usado, a la edad t. Los valores de *W(0)* los dan los constructores de las máquinas; y los de *W(t)* los da el mercado de equipos usados, que es un mercado muy activo en el mundo. En todos los casos $W(t \geq 0)$ se expresa en moneda dura. En nuestro caso lo expresamos en dólares constantes puesto que en todo este trabajo admitimos valores en moneda constante, sin inflación. Para el usuario de *B* es la suma en que, si lo decide, puede venderla a edad "*t*" y recuperar así el dinero que invirtió en comprarla, o una parte de él (si se ha desvalorizado), o recuperar algo más (si se ha valorizado).

La función *W(t)* puede asumir, según el bien específico *B* de que se trate, formas varias, de las cuales se sugieren algunas en la figura 1. Un ejemplo en Colombia, hoy de un activo que se valoriza en el tiempo ($V'(t) > 0$) es la tierra urbana. Un ejemplo de otro bien que poco se valoriza ni se desvaloriza es un transformador eléctrico de potencia. Y ejemplo de *B* que se desvaloriza rápidamente es un torno para metales ($V'(t) < 0$). La realidad de los mercados de máquinas y equipos permite atribuirle a esta función, cualquiera que sea su forma específica las siguientes propiedades:

- El dominio de *W(t)* es el intervalo de *t* durante el cual la máquina siga existiendo y sea usable. Se llama la vida técnica útil máxima posible de *B* y la indicamos por ω. Más abajo nos referiremos de nuevo a ella.
- *W(t)* es positiva para todo t excepto para los valores de t que sean iguales o mayores que ω. Además, es acotada superior e inferiormente, como es obvio por su definición.
- *W(t)* es continua y derivable en todo su dominio (0, ω), salvo quizás, en $t = 0$ o en $t = \omega$.
- *W(t)* puede ser creciente ($W'(t) > 0$) en algunos tramos de su vida técnica útil máxima posible, pero solo en muy pocos casos lo es durante toda ella.
- Cuando *t* tiende a ω, *W(t)* es definitivamente decreciente (se dice que *B* se desvaloriza cuando $W'(t) < 0$; y se valoriza cuando $W'(t) > 0$).
- La dimensión física de *W(t),* y sus unidades son las de "dinero", que llamaremos *K.*

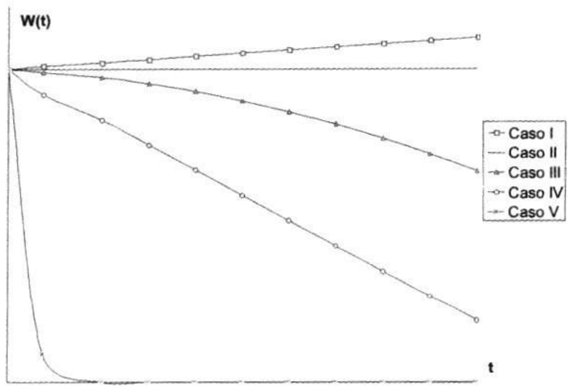

Figura 1 Algunos tipos de funciones de valor según edad

La función de supervivencia

La experiencia técnica universal ha mostrado que cada tipo específico de máquinas (y muchas veces, cada marca de un mismo tipo de máquinas), a medida que se usa en el transcurso del tiempo (*t*) presenta un fenómeno de "mortalidad", consistente en que sus unidades se van dañando definitivamente, de modo determinista o aleatorio. Así pues, una misma cohorte de muchas unidades coetáneas (o como se dice "de un mismo modelo", por ejemplo camiones marca X "modelo 1997") va registrando "bajas" en su número a medida que trabajan, desde el momento cuando se ponen en servicio, o sea, desde $t = 0$. Si se consideran cohortes numerosas (que es lo común en el mercado de bienes de capital, como lo es *B*), entonces la experiencia técnica y los métodos estadísticos permiten construir una función que designamos $R(t)$, donde t es la vida ya transcurrida en operación, función que expresa el porcentaje o fracción numérica de unidades del tipo y marca *B* que siguen trabajando a la edad t (común a todas ellas), medida desde cuando comenzaron a trabajar, o sea de $t = 0$, figura 2.

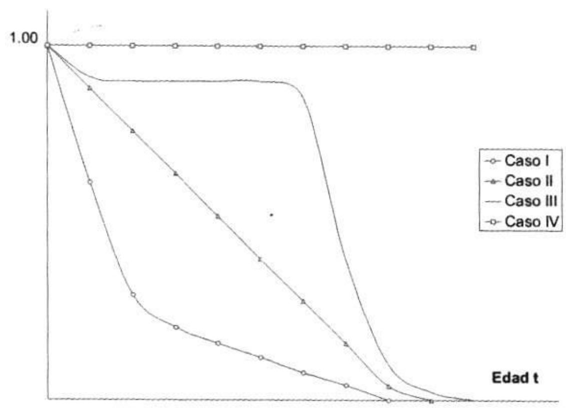

Figura 2 Algunas funciones de supervivencia

Los libros sobre teoría de confiabilidad de sistemas llaman a $R(t)$ "función de supervivencia". Recordando la estadística elemental, esta función se puede interpretar como la probabilidad a priori de que al comenzar a trabajar la máquina *B,* en el momento $t = 0$, ella llegue eventualmente a alcanzar la edad t en operación [9].

De acuerdo con su definición conceptual, es visible de inmediato que la función $R(t)$ tiene las siguientes características:

- $R(0) = 100\% = 1{,}00$: a la edad $t = 0$ de las máquinas, es seguro que todas echan a trabajar.
- $R(t) > 0$: o sea que $R(t)$ es positiva en todo su dominio de t, excepto en un punto $t = \omega$, donde $R(\omega) = 0$. Este dato ω se llama la "vida útil máxima posible" de *B* y lo debe suministrar el fabricante o constructor de la máquina; o lo debe investigar quien la va comprar para usarla. Se expresa, por supuesto, en meses, años u otra unidad de la edad t. Usualmente, y en la práctica industrial, es del orden de varios meses o varios años de trabajo, o su equivalente en otras unidades de medida no cronométricas (como ya se explicó).
- El dominio de definición de la función $R(t)$ es el intervalo continuo y conexo que está comprendido entre $t = 0$ y $t = \omega$. Si fuese necesario considerar momentos cuando $t > \omega$, complementaremos el dominio poniendo por definición que $R(t > \omega) = 0$. En algunos casos de máquinas y equipos muy duraderos, el valor de ω puede tomarse teóricamente como $\omega = \infty$. Y, de todas maneras siempre se estará cumpliendo que $\omega \leq \Omega \leq +\infty$.
- $R(t)$ es monotónicamente decreciente (o mejor, no creciente) en todo su dominio.
- El recorrido de los valores posibles de $R(t)$ es el intervalo cerrado $[0, +1]$. O sea, que es acotada superior e inferiormente.
- La función $R(t)$ se construye mediante la observación y el registro estadístico empírico de muchas máquinas del tipo y marca de *B*. Se expresan estas funciones mediante tablas numéricas, o mediante funciones algebraicas o trascendentes que son "ajustadas" con las observaciones estadísticas sobre "mortalidad" y supervivencia de equipos del mismo tipo de *B*.
- Admitiremos que la función $R(t)$ es continua y derivable, o sea que $dR/dt = R'(t)$ existe en todo el dominio. Según lo ya dicho, $R'(t) \leq 0$ porque $R(t)$ es no creciente.
- La dimensión física y las unidades de $R(t)$ son K^0Z^0, donde K = [Dinero], y Z = [Tiempo].

La figura 2 muestra esquemáticamente las gráficas de algunas funciones de supervivencia de sendos tipos de máquinas, que son imaginables, y que se encuentran en la práctica industrial.

En una situación práctica y concreta la función $R(t)$ la debe suministrar el constructor de B; o la debe establecer el comprador por observaciones directas empíricas, con la ayuda de personas experimentadas y de los métodos estadísticos convencionales. En la literatura se encuentran funciones de supervivencia para máquinas muy conocidas, como motores de automóvil, alternadores eléctricos de potencia, reactores químicos, tracto-camiones, etc.

Valor recuperable ex-ante

En el momento de comprar y arrancar B su dueño o usuario puede y debe al menos estimar o proyectar $R(t)$ y $W(t)$ para su vida futura ($t > 0$ hasta $t = \omega$). Según la teoría de probabilidades (Feller, 1950), el valor que el usuario puede estimar en $t = 0$ que quizá recupere en el futuro ($t > 0$ hasta $t = \omega$) si vende B, es $R(t)\ W(t) = V(t)$. Este se llamará valor recuperable de la máquina ex-ante. Obviamente $V(0) = W(0)$ es el mismo valor que ha costado aquella, nueva, al instalarla. Este valor $V(t)$ es uno de los datos fundamentales de todo el cálculo económico de este problema y en este trabajo nos referiremos al mismo, más bien que a $W(t)$. En algunos casos específicos en que B es muy duradera, robusta y confiable, puede ponerse para nuestros cálculos que $R(t) = 1$ y en ese caso tendremos que $V(t)$ ° $W(t)$. Así ocurre, por ejemplo si B es una locomotora diesel, o una máquina Fourdrinier para hacer papel, o un transformador de potencia eléctrica.

Teniendo presente las propiedades ya mencionadas de $R(t)$ y de $W(t)$ es fácil deducir las siguientes propiedades de $V(t) = R(t)\ W(t)$:

a. $V(t)$ es una función definida positiva y acotada en su dominio, excepto en el punto donde primero se anule $W(t)$ o $R(t)$ (Esta última se hace cero en $t = \omega$). De ese momento en adelante $V(t)$ se anula.

b. $V(t)$ puede ser creciente, o constante, o decreciente, según el bien de capital B de que se trate, según su edad, según su estado físico y según las circunstancias económicas y tecnológicas al momento de construir o estimar sus valores futuros.

c. Las dimensiones físicas de $V(t)$ y sus unidades son K^1.

Rendimiento y edad

En la realidad del mundo de las máquinas y los equipos ocurre que, en general, con el paso del tiempo, ellos van mermando su rendimiento físico, medido en unidades de P por hora-máquina o por mes-máquina, salvo quizá, en algunos equipos (como los motores de automóvil y los diesel, por ejemplo) que mejoran su rendimiento en los primeros días o primeros meses de actividad. El estudio sistemático de máquinas o bienes como B, con información de fabricantes y de varios usuarios, permite conocer o calcular desde el momento $t = 0$, dos datos a saber:

- El rendimiento físico o productividad de la máquina en sus primeros momentos de vida activa, que llamaremos P_0. Se mide en unidades físicas de P por hora o por mes de trabajo de B. Es frecuente que el proveedor de B suministre este dato y aun que lo garantice al comprador.
- Una función $g(t)$ que expresa la productividad o rendimiento físico de B cuando tenga la edad t, como porcentaje o fracción numérica de P_0. Esto significa que a cualquier edad $t \geq 0$, el valor de la productividad se expresa como $P_0\ g(t)$. Es generalmente el usuario quien tiene que averiguar y construir $g(t)$ con base en la experiencia propia o de otros usuarios. Se le llama la productividad programada de B. Para construirla también debe consultarse a fondo el mercado del producto P por-

que el producto aritmético $P_0\, g(t)$ no debe exceder a lo que el mercado pueda absorber de nuestro proyecto.

En la tecnología industrial, y en la realidad industrial actual, la función *g(t)* tiene algunas propiedades que es necesario señalar:

- La función *g(t)* es definida positiva, y acotada en su dominio, como es obvio.
- Su dominio yace a la derecha del origen $t = 0$.
- Técnicamente el dominio no puede sobrepasar el punto $t = \omega$.
- $g(+\infty) = 0$: ninguna máquina a edad $+\infty$ puede producir ya nada.
- Puede ser creciente en parte de su dominio (o en todo él) o decreciente en otra parte (o en todo él). Muchos bienes de capital tienen la función *g(t)* = constante, durante su vida útil, o en buena parte de ella.
- Es función continua y derivable en todo su dominio.

La figura 3 muestra algunas formas usuales en la práctica industrial, de la productividad *g(t)* que se pueda programar para la máquina o instalación que hemos llamado *B,* en ciertos casos específicos.

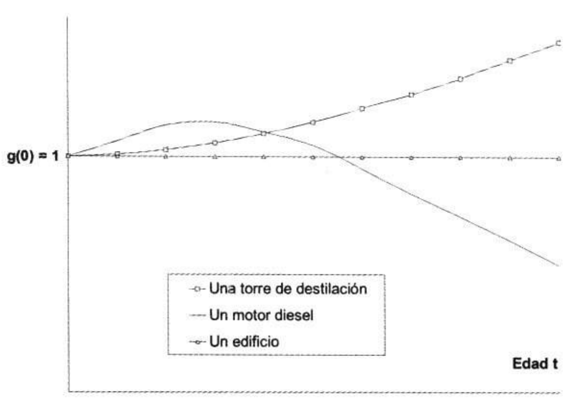

Figura 3 Algunas formas posibles de *g(t)*

Por su definición es evidente que la variable g es cero-dimensional: su dimensión física es $[g] = K^0\, Z^0$.

Insumos y productos

El precio en dinero de una unidad física de *P* lo llamamos *p.* Se mide en dólares constantes (o su equivalente) por unidad de cantidad física: por ejemplo en dólares/kilo, yenes/mil unidades, etc. Generalmente está dado por el mercado. En la realidad puede variar a través del tiempo, pero en nuestro caso lo consideraremos como un dato fijo por cuatro razones:

a. Porque al ser medido en moneda constante sus fluctuaciones por lo general no serán muy fuertes ni bruscas.

b. Para no introducir a nuestro modelo complicaciones innecesarias.

c. Porque en la vida real de la industria, las más de las veces el valor numérico de *p* se toma por su valor en $t = 0$ para los cálculos y las proyecciones económicas.

d. Para que algún lector de esta nota adopte el caso de *p(t)* como variable que sea dependiente de t y haga otro modelo más refinado.

Ahora bien: para producir una unidad física de *P* (por ejemplo una tonelada, un millón de piezas, un megavatio-hora, etc.) la tecnología del caso exige varios insumos $Q_1, Q_2, \ldots Q_M$ en cantidades físicas determinadas, conocidas y no dependientes de *t.* A estas cantidades se les llama coeficientes técnicos de insumo/producto y las indicaremos con $s_1, s_2, \ldots s_M$. Sus valores los da la experiencia del fabricante de *B* o la de otros usuarios de *B.* Los costos por unidad física de estos insumos son $q_1, q_2, \ldots q_M$ respectivamente y se expresan en dinero por unidad de cantidad (por ejemplo dólares/kilo, o yenes/litro, etc.). Sus valores numéricos están dados por los mercados de $Q_1, \ldots Q_H$.

El mayor valor de cada unidad de *P* comparado con sus insumos, que se obtiene en el proceso de usar B, se llama valor agregado unitario, y vale, como es obvio

$$u(t) = p(t) - \sum_{j=1}^{M} s_j q_j(t) \qquad (1)$$

En el lenguaje de los ingenieros industriales y contadores de costos, en las fábricas, se le dice a veces "margen de contribución por unidad". En nuestro modelo supondremos que $dp/dt = 0$ y que $dq_j/dt = 0$, luego: $du/dt = 0$, y consideramos u como constante respecto de t. Anotemos de paso que los economistas llaman coeficiente económico de insumo/producto a cada uno de los coeficientes $s_1\, q_1/p_1, \ldots s_M\, q_M/p_M$ y que éstos son números sin dimensión física que se miden como porcentajes o fracciones decimales (que son menores que 1,00 desde luego).

Otros costos de operación

Mantener a B funcionando y produciendo requiere al menos dos tipos más de costos:

a. Los de la mano de obra que opera y sirve la máquina.

b. Los costos de mantenimiento.

Por lo general estos dos son los más importantes; y otros que puedan ocurrir (por ejemplo los seguros del equipo) son menores. A la reunión de todos ellos la denotaremos $M(t)$ porque en la realidad industrial suelen crecer con la edad t y se llaman costos de operación y servicio. No incluyen la depreciación contable de la máquina. Se miden en dinero por hora de trabajo de B (o por día o por mes) a cada edad t. El usuario que usa la máquina es quien puede determinar esta función ex-ante, o medirla por su experiencia ex-post o a partir de la experiencia de otros usuarios.

Costo del dinero, capitalización y descuento

En textos conocidos sobre microeconomía, sobre cálculo financiero y sobre economía para ingeniería se demuestran tres hechos sobre la realidad del dinero.

- Que un valor en dinero del futuro, x $(t > 0)$, representa un valor en el día de hoy, en moneda dura, $t = 0$, que es menor que aquél:

$$x(0) < x(t > 0) \qquad (2)$$

  valor al cual se le llama el valor presente de $x(t)$ de contado en el día de hoy $t = 0$.

- Que la relación entre $x(t)$ y $x(0)$ está dada por la ecuación

  $x(t) = x(0) \times e^{rt}$ o sea $x(0) = x(t) \times e^{-rt}$

  cuando los procesos de capitalización y descuentos se hacen efectivos a intervalos infinitesimales (digamos segundo a segundo, en lenguaje bancario, y no mes a mes o año a año). El número e = 2,71828182845 ... es, desde luego, la base de los logaritmos neperianos.

- Que financieramente r representa el costo de oportunidad de cada unidad de dinero por cada unidad de tiempo, como por ejemplo, un porcentaje por día, o por mes, etc., pero capitalizado de manera continua (segundo a segundo). En unidades físicas tiene dimensiones de inverso de tiempo, como día^{-1}, o mes^{-1}, etc. es una constante, y se determina con los banqueros y con asesores financieros.

- La dimensión física de r es K^0Z^{-1}.

Horizonte de tiempo del proyecto

Al instalar una máquina o construir un equipo y ponerlo a funcionar, en el mundo industrial y financiero, es usual y es conveniente, prever la duración de tiempo que se espera hoy (en $t = 0$) que vaya a durar en servicio antes de retirarla, o venderla o dejar de usarla.

Ese plazo de tiempo se llama el horizonte del proyecto, lo designamos con T, y en la práctica suele señalarse en varios meses o varios años. Por ejemplo, si B es en sí una fábrica completa del producto P, en Colombia hoy, es usual prescribir que $T = 10$ años; si es un alternador suele prescribirse $T = 20$ años; si es un camión suele prescribirse $T = 5$ años; etc. Pero para nosotros ese dato, T, no es recomendable que se fije de modo convencional o intuitivo. En numerosas ocasiones y casos reales, ese plazo que constituirá la vida útil de B se ha de fijar por consideraciones económicas, ya sea que su decisión se tome al principio (en $t = 0$) o en un momento posterior del trabajo del equipo. Ese es el objeto del modelo que aquí proponemos. A la vida útil prescrita desde hoy ($t = 0$) para el futuro ($t > 0$) la llamamos vida útil programada (T).

En el lapso que dura cualquier segundo de tiempo (diferencial de $t = dt$) de trabajo a una edad t cualquiera, la máquina admite una contabilidad económica como la siguiente:

Número de unidades producidas de P:

$P_0 \cdot g(t) \cdot dt$

Valor agregado por B:

$P_0 \cdot g(t) \cdot u \cdot dt$

Costos de servicio, en dinero: $M(t) \cdot dt$ (No incluye depreciación contable)

Utilidad durante dt, a edad t: $P_0 \cdot g(t) \cdot u - M(t)$

Valor presente, descontado al día de hoy, de esa utilidad.

$$\left[P_0 \cdot g(t) \cdot u - M(t)\right] \times e^{-rt} \cdot dt \qquad (3)$$

Esto se llama flujo operativo de fondos, neto, de la fecha t, puesto en valor presente.

Probabilidad de que B esté trabajando a la edad t, que estimamos hoy: $R(t)$

Valor presente esperable de la utilidad en dt, en el día de hoy

$$R(t) \cdot \left[P_0 \cdot g(t) \cdot u - M(t)\right] \times e^{-rt} \cdot dt \qquad (4)$$

Así que la utilidad futura, en dinero, descontada al día de hoy ($t = 0$), que se puede esperar del trabajo de B desde hoy ($t = 0$) hasta su retiro ($t = T$) es

$$\int_{t=0}^{T} R(t) \cdot \left[P_0 \cdot g(t) \cdot u - M(t)\right] \times e^{-rt} \cdot dt \qquad (5)$$

en donde cada símbolo representa las variables y constantes que ya explicamos.

Valor de salvamento

Es el valor en dinero, $W(t)$, que se puede recibir por la venta futura de B cuando tenga la edad $t = T$ en que se vaya a retirar. Pero esto ocurrirá eventualmente, con probabilidad

$R(T)$, de modo que el valor esperable de esa venta en esa fecha futura, al que llamaremos $V(T)$, es

$$R(T) \cdot W(T) = V(T) \qquad (6)$$

y, puesto en valor presente descontado hoy ($t = 0$), ese valor es

$$R(T) \cdot W(T) \cdot e^{-rt} = V(T) \cdot e^{-rt} \qquad (7)$$

Existen en el mundo real algunos tipos de máquinas o equipos que pierden valor por el solo hecho de comprarlos. O sea que su valor de salvamento a solo un segundo de comprarlo ($V(0+)$) ya es menor que el valor $V(0)$ de la primera compra:

$$W(0+) < W(0) \quad \text{o bien} \quad V(0+) < V(0)$$

Ejemplo de esta realidad práctica es, entre otros, un tractor agrícola. La utilidad que esperamos en $t = 0$ que vamos a obtener durante $(t, t + dt)$ la llamaremos $H(t)$ y vale

$H(t) = R(t)[P_0 \cdot g(t) - M(t)]$

Una condición necesaria de viabilidad financiera

A esta altura del análisis es necesario cerciorarse de que el problema de la vida óptima admita una solución. Para ello es necesario que la función $H(t)$ que ya hemos construido admita un intervalo de valores, finito o infinito, que llamamos I_+ que le dé un valor positivo a la función

$$\int_0^{\tau} H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(t)\cdot e^{-rt} - V(0) \qquad (8)$$

en donde τ (tau) es cualquier punto de I_+ y en donde

$H(t) = R(t)[P_0 \cdot g(t) - M(t)]$

expresa lo que en la industria se llama utilidad operativa de B. Las dimensiones físicas de H son $[H]$ = [Dinero] , [Tiempo], que escribimos también $[H] = KZ^{-1}$.

El valor más pequeño de τ que cumpla la condición (8) de más arriba se llama el periodo de reembolso (b) del equipo o máquina B y satisface la igualdad

$$\int_0^{b} H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(t)\cdot e^{-rb} - V(0) = 0$$

Si no fuera así, eso significaría que los beneficios acumulados y actualizados de B nunca reembolsarían la inversión inicial $V(0)$ que exige el proyecto. Más abajo se señalarán otras condiciones para que el proyecto sea financieramente viable.

La figura 4 muestra algunas formas posibles de la función $H(t)$, la cual admitiremos que es continua y derivable en todo su dominio. En esta figura estamos suponiendo que ω es finita, pero en algunas otras situaciones ω puede ser infinita.

Nótese que $H(0)$ puede eventualmente ser negativa. Pero aún así H(t) debe cumplir la condición ya dicha más arriba en (8). En el mundo real, las funciones $H(t)$ con que se trabaja son (como se dice en cálculo integral) de orden exponencial lo que significa que el integral

$$\int_0^{\infty} H(t)e^{-rt}dt < +\infty$$

es convergente o finito, para la función H(t) en la vida real de la industria.

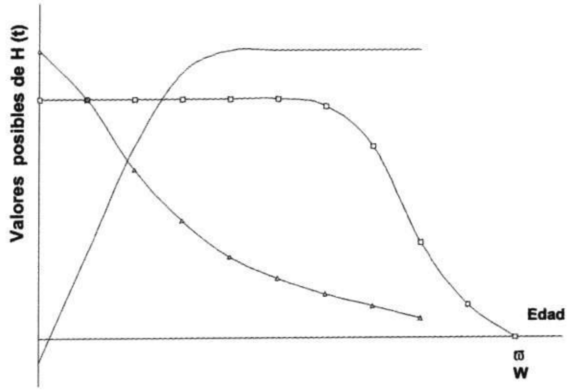

Figura 4 Algunas formas posibles de H(t)

flujo de fondos proyectado, en valor presente

Si el horizonte de tiempo que se está programando para el proyecto es T, se puede calcular desde hoy ($t = 0$), el valor del flujo neto de fondos puestos en valor presente por la expresión

$$\int_{t=0}^{T} R(t)\cdot\left[P_0\cdot g(t)\cdot u - M(t)\right]\times \qquad (9)$$

$$e^{-rt}\cdot dt - V(0) + V(T)\cdot e^{-rT}$$

o sea

$$\int_0^{T} H(t)\cdot e^{-rt}dt + V(T)\cdot e^{-rT} - V(0) \qquad (10)$$

según explicaciones que ya se dieron más arriba. A la expresión anterior la llaman los inversionistas con el nombre de valor presente neto del proyecto. Es condición necesaria para la viabilidad económica del proyecto que se tenga

$$\int_0^{T} H(t)\cdot e^{-rt}dt + V(T)\cdot e^{-rT} - V(0) > 0$$

por lo menos para algún intervalo I de valores de T en el semieje positivo: $0 < T \in$ I.

Agradecimientos

El autor agradece la colaboración de la Universidad Pontificia Bolivariana que le ha proporcionado el tiempo para redactar este artículo; del ingeniero Germán Poveda Jaramillo por el uso de su computador y de su *software;* a la ingeniera Gladys Rincón por su ayuda computacional; y al ingeniero David Poveda Jaramillo por sus útiles comentarios.

Referencias

1. Arboleda, Benjamín. *Ingeniería económica: Métodos para el análisis de alternativas de inversión.* Medellín. Asociación de Ingenieros Industriales de la Universidad de Antioquia. 1980. 502 p.
2. Behrens, W. Y P.M. Hawranek. *Manual para la preparación de estudios de viabilidad industrial.* Viena. Organización de la Naciones Unidas para el desarrollo industrial. 1994. 400 p.
3. Blank, Leland T. y Anthony J. Jacquin. *Ingeniería económica.* México. McGraw-Hill. 1996. 546 p.
4. Chouleur, Jacques. *Las técnicas matemáticas en la empresa.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1968.
5. Corrons Prieto, Luis. *Técnicas de Ingeniería y Tecnología de la producción.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1979. 435 p.
6. Creues Solé, Antonio. *Fiabilidad y seguridad de procesos industriales.* Barcelona. Boixereu Editores. 1991. 124 p.
7. Feller, William. *An introduction to probability theory and its applications.* Volumen Uno. London. John Wiley and Sons. 1950. 419 p.
8. Grant, Eugene L; Grant, Ireson; y Leavenworth, Richard L. *Principios de ingeniería económica.* México. Editorial CECSA. 1984. 710 p.
9. Kapur, K. C. y Lamberson, L. R. *Reliability in engineering design.* New York. John Wiley and Sons. 1977. 586 p.
10. King, Charles. *Quantitative Analysis for managerial decisions.* Reading, Massachusets. Addison Wesley. 1976.
11. Park, Chan J.; Sahrp-Bette Gunther P. Advanced *Engineering economics.* New York. John Wiley and Sons. 1990. 740 p.
12. Riggs, James L. *Sistemas de producción.* México. Editorial Limusa. 1980. 682 p.
13. Riggs, James L. *Modelos de decisión económica para ingenieros y gerentes de empresa.* Madrid. Alianza Editorial. 1973. 508 p.
14. Romero, C. *Modelos económicos en la empresa.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1977.
15. Selivanov, A. T. *Fundamentos de la teoría de envejecimiento de máquinas.* Moscú. Editorial Mir. 1972. 392 p.
16. Taylor, George A. *Ingeniería económica.* México. Limusa. 1978. 556 p.
17. Thuesen, H. G. Fabricky, W.J. , y Thuesen, G. J. *Ingeniería económica: Edición revisada de economía del proyecto de ingeniería.* Bogotá. Prentice Hall. 1981. 592 p.
18. Tyler, Chaplin. *Chemical Engineering Economics.* McGraw-Hill Co. 1948. 321 p.
19. Valencia, Eduardo. *Decisiones económicas en la ingeniería.* Medellín. Universidad Nacional. 1988. 474 p.
20. Varela, Rodrigo. *Evaluación económica de Inversiones.* Cali. Editorial Norma. 1993. 512 p.
21. Villalobos, José Luis. *Matemáticas Financieras.* México. Grupo Editorial Iberoamericana. 1993. 776 p.
22. Siam Review. *Society of Industrial and applied Mathematics.* New York.
23. *Scientific Managent.* American Management Association.
24. *Accounting Review. (s.f., s.c.)*
25. Industrial Engineering. McGraw-Hill. New York.