Revista Facultad de Ingeniería No. 28. pp. 115-131. Abril, 2003

Óptimo económico de máquinas y equipos Parte II. El modelo matemático

*Gabriel Poveda Ramos**

(Recibido el 30 de mayo de 2002)

Resumen

Este artículo presenta un estudio desde el punto de vista matemático (algebraico y del análisis) de cierta clase de problema de la economía y la tecnología industrial, que se refieren a la compra o construcción, y operación de máquinas e instalaciones (bienes de capital, en general), que exigen una inversión financiera inicial, que se van a operar por algunos meses o años, en forma continuada, y que luego, finalmente, van a ser retirados para revenderlos como bienes usados o para desecharlos como materiales sin valor. Uno de los asuntos clave en la ingeniería industrial es determinar desde el principio, con alguna certidumbre, cuánto tiempo se va a mantener la máquina o instalación en uso. Esta determinación es necesaria para adoptar de manera racional y óptima varias decisiones importantes, como por ejemplo: a qué oficios se le asigna, qué productos o servicios va a entregar, qué régimen de mantenimiento se le va a aplicar, cómo se va a depreciar y otras diversas que son importantes y muy relevantes en la de empresa industrial. Entre otras novedades estamos introduciendo la noción de "dimensión física" de magnitudes financieras y económicas.

---------- *Palabras clave*: ingeniería económica, bienes de capital, inversión, vida útil, depreciación, valor de salvamento.

Economic optimum for machinery and equipment. Part II. Mathematical model

Abstract

This paper presents a study made from the standpoint of Mathematics (both algebraically and of the analysis) of a certain class of problems in the field of industrial economics and technology, referring to the project of purchasing —or building— and operating machines or facilities which require an initial investment and intended to be operated in a continued way during several months of years, to be finally retired and sold as used goods or discarded as

* Profesor Escuela de Formación Avanzada. Universidad Pontificia Bolivariana. mgt@logos.upb.edu.co.

worthless materials. One of the key issues in industrial engineering is to determine (or estimate) in advance from the beginning, with reasonable certainty, how long is the asset to be active and working. This figuring - out is necessary in order to adopt, in a rational and optimal manner, some important decisions as for example: which jobs to be assigned to the machine, which products or services will it render, how is it going to be maintained, how fast to depreciate it and several other questions which are quite relevant in the industrial life. Among other new ideas we introduce here the concept of "physical dimension" for financial and economic magnitudes.

---------- *Key words*: economic engineering, capital goods, investment, useful life, depreciation, surrender value.

Introducción

Este es un tema que los libros sobre economía industrial, de economía para ingenieros, de ingeniería industrial y de matemáticas financieras no tratan. Para comprobarlo pueden consultarse las referencias dadas en la bibliografía, como ejemplos muy representativos. Tampoco el autor los ha visto tratados en las revistas técnicas o científicas referentes a estas materias (ver algunas de las más importantes en la bibliografía).

Los matemáticos colombianos no se ocupan de temas de esta naturaleza, a pesar de que éstos son importantes y útiles. Nos estamos refiriendo al tema de estudiar y decidir la compra o la construcción de equipos, máquinas, instalaciones o, en general, de bienes de capital y de establecer, ex-ante, un programa de operaciones para ellos. Esta es una situación que se presenta con frecuencia en países en desarrollo como Colombia, que pone en juego inversiones importantes en dinero, y en la cual es muy necesario tomar decisiones óptimas en los sentidos técnico y económico. El caso se da muy especialmente en sectores modernos de la economía como son la industria fabril, el sector eléctrico, la gran minería, la construcción de obras públicas y el transporte ferroviario, según la experiencia del autor. Este último ha elaborado el trabajo que aquí se presenta con base en esa experiencia, y ha tenido la oportunidad de aplicar los métodos que aquí se muestran a varios casos de la realidad industrial y tecnológica de Colombia.

En Colombia y en muchos otros países los temas mencionados se resuelven, en la práctica y por lo común, mediante conjeturas intuitivas o basadas en los antecedentes rutinarios o la experiencia de años, o en *guesses* más o menos fundados en consideraciones puramente cualitativas e intuitivas.

Este artículo tiene cuatro propósitos:

1. Presentar estos resultados que son novedosos y útiles.
2. Demostrar que las matemáticas son útiles también para propósitos mundanos.
3. Avanzar el conocimiento en la disciplina de la microeconomía matemática (que es aún incipiente).
4. Invitar a ingenieros y matemáticos a obtener nuevos resultados en este terreno.

El autor agradece la colaboración de la Universidad Pontificia Bolivariana que le ha proporcionado el tiempo para redactar este artículo; del ingeniero Germán Poveda Jaramillo por el uso de su computador y de su *software*; a la ingeniera Gladys Rincón por su ayuda computacional; y al ingeniero David Poveda Jaramillo por sus útiles comentarios.

Rentabilidad anual descontada del proyecto

Es una de las medidas más recomendadas para juzgar la rentabilidad esperada del proyecto. Se define por el cociente

$$U(T) = \frac{\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}dt + V(T)\cdot e^{-rT} - V(0)}{V(0)\cdot T} \tag{11}$$

que expresa el valor, por cada año promedio de la vida T del proyecto, del flujo neto proyectado que se espera, por cada dólar de la suma V(0) que hoy se invierte. La dimensión física de U es $[U] = K^0Z^{-1}$.

Para que financieramente sea viable la inversión, los banqueros y expertos financieros requieren también la condición de que, al calcular a U(t), en el momento de hacer la inversión, se pronostique que vamos a tener que $U(t) > r$ (siendo siempre $r > 0$), al menos dentro de un intervalo no degenerado de valores de T que son positivos.

La función U(T) se llamará *la rentabilidad promedio anual y descontada proyecto* para el horizonte de tiempo de t = T (en años, o meses, etc.).

Nota: en la práctica industrial y financiera, es más usual usar la "tasa interna de retorno" como medida de la bondad financiera del proyecto. Aquí proponemos y destacamos a U(T) porque es un indicador más sólido y más apropiado.

Por una simple derivación se encuentra que la derivada de U(T) es:

$$dU(T)/dT = \tag{12}$$

$$e^{-rT}\cdot T[H(T)-r\cdot V(T)+V'(T)]-$$

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}dt - V(T)\cdot e^{-rT} + V(0) \Big/ V(0)\cdot T^2$$

Financieramente esta derivada significa la aceleración (y no el valor instantáneo) que en el momento t = T esté registrando la utilidad por segundo (o por hora, o por mes, etc.), dividida aquella por la inversión inicial y por el cuadrado de T. La dimensión física de dU/dT es [dU/dT] = K^0Z^{-2}.

La segunda derivada se calcula también directamente, y resulta que vale:

$$d^2U(T)/dT^2 = \tag{13}$$

$$e^{-rT} / V(0)\cdot T^3 \begin{Bmatrix} T^2[H'(T)-2r\cdot V'(T)+V''(T)- \\ r\cdot H(T)+r^2\cdot V(T)]+ \\ T[r\cdot V(T)-V'(T)- \\ 2H]-2V(0)\cdot e^{-rT}+ \\ \int_0^T H(t)\cdot e^{-r(T-t)}\cdot dt \end{Bmatrix}$$

$$= e^{-rT} / V(0)\cdot T_3 \begin{Bmatrix} T^2([D-r]H(T)+ \\ [D-r]^2V(T))-T(2H(T)+ \\ [D-r]V(T))+ \\ 2\cdot V(0)\cdot e^{rT}+ \\ 2\int_0^T H(t)\cdot e^{r(T-t)}\cdot dt \end{Bmatrix}$$

en donde el operador "D" significa "d/dT". La dimensión física es $[d^2U/dT^2] = K^0Z^{-3}$.

Para esquematizar las varias formas que puede asumir U(T) en los muchos casos reales imaginables, vamos a considerar algunas situaciones determinadas.

Caso V(0+) > V(0)

El bien o la máquina B se valoriza, ipso facto, por el solo hecho de comprarla. Resulta aquí que:

U(0+) = +∞, U'(0+) = -∞

En términos prácticos esto significa que B se puede revender inmediatamente después de comprarla, haciendo una utilidad igual a V(0+) - V(0) (que es positivo), con edad t = 0, lo cual da una rentabilidad por mes (por año o por día) que es infinita. Financieramente, sería la decisión óptima, pero en general un industrial productor (y no especulador) no procede así. En la práctica, además, es rarísimo que el mercado de B se comporte así.

La gráfica de U(t) tendría, probablemente la forma de la curva I en la figura 5.

Caso V(0+) < V(0)

Ocurre con mayor frecuencia que el anterior, pero tampoco es muy usual. Resulta aquí que:

U(0+) = -∞, U'(0+) = +∞

Es lo lógico: si se vende a B a edad T = 0+, se pierde un valor igual a V(0) - V(0+) en un lapso de tiempo T = 0. El comportamiento de U(T) para T > 0 lo muestran las curvas probables números II y III de la figura 5. La curva III identifica un proyecto totalmente contraindicado, por ser U(T) < 0 negativa en todo su dominio.

Caso V (0+) = V(0), con H(0) > r V(0) - V'(0)

B es altamente productivo en estado nuevo y cubre con sus beneficios *H(0)* su costo de capi-

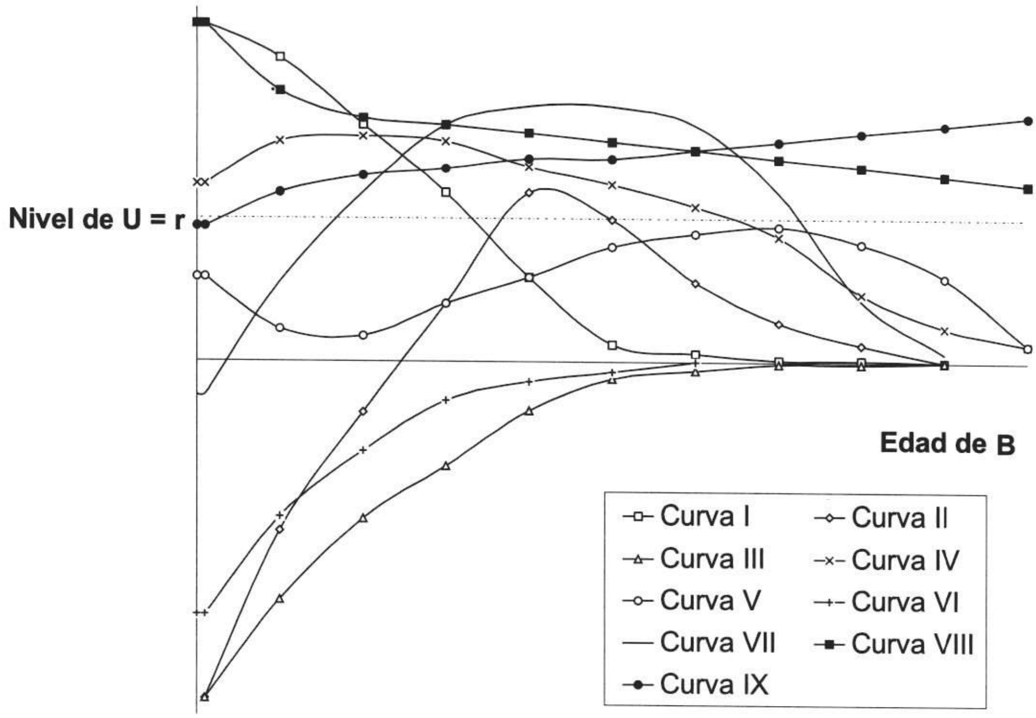

Figura 5 Distintas formas verosímiles para la función U(t) en varios casos de la realidad

tal (r V(0)) y una eventual desvalorización que pueda sufrir *(- V(0))*.

En este caso, U(0) y U'(0) toman la forma "0 ÷ 0". Aplicamos pues la Regla de L'Hopital:

$$U(0) = \frac{\left\{D\left[\int_0^T H(t)\cdot e^{-rT}\cdot dt + V(T)\cdot e^{-rT} - V(0)\right]\right\}_{T=0}}{D[V(0)\cdot T]}$$

$$= \frac{\left\{(e^{-rT}/T)[H(T) - r\cdot V(T) + V'(T)]\right\}_{T=0}}{V(0)} =$$

$$H(0) - r\cdot V(0) + V'(0) > 0$$

$$U'(0) = \frac{\left\{\begin{array}{l}(e^{-rT}/T)[H(T) - r\cdot V(T) + V'(T)] - \\ (1/T^2)\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt - \\ [V(T) - V(0)] \div T^2\end{array}\right\}_{T=0}}{V(0)} = \infty$$

(Esto último se puede calcular usando la regla de L'Hopital y también por consideraciones algebraicas más sencillas).

Las curvas IV y V de la figura 5 son ejemplos de este caso. Ambas son tangentes al eje de ordenadas en el punto de abscisa T = 0. La curva IV indica un proyecto que financieramente nunca va a ser rentable.

Caso V(0+) = V(0) con H(0) < r V(0) - V'(0)

Obtenemos aquí que U(0) = H(0) - r V(0) + V'(0) < 0.

(El proyecto no es rentable en sus edades jóvenes).

U'(0) = +∞

Las curvas VI y VII de la figura 5 son ejemplos de esta situación. La curva VI hablaría de un proyecto totalmente contraindicado financieramente.

Otros casos

Las curvas VIII y IX de la figura 5 muestran dos casos más que podrían ser posibles en la vida real.

Notas:

1. Estas curvas deben construirse al comenzar el estudio del proyecto quizá como simulación de computador, como tabla numérica, como función analítica o como curva "a mano alzada".
2. En la figura 5 se traza la recta horizontal U(T) = r. *Si el proyecto no excede a esa recta en ningún punto, debe descartarse*: nunca dará una rentabilidad satisfactoria. Es el caso de nuestras curvas III, V y VI de la figura 5.

Las curvas I, II, IV, y VII de la figura 5 son estudiables como inversión satisfactoria y a ellas se les puede aplicar nuestro criterio.

$U'(T) = 0,\ U''(T) < 0$

Para identificar la vida óptima de B. Pero si la curva U(T) es como la curva VIII (monotónicamente decreciente) o como la curva IX (monotónicamente creciente), el proyecto es viable y nuestro problema es resoluble (aunque de manera trivial) por simple inspección del gráfico. En tal caso el óptimo valor de U(T) para la curva VIII es T = 0, y desde T = 0+ comienza a mermar. Es un caso poco común en la tecnología industrial, pero sí puede suceder. En el caso de la curva IX, el proyecto ofrece dar en sus primeros momentos una rentabilidad menor que r (lo cual no es muy atrayente para los banqueros), pero luego excede ese nivel y sigue dando rentabilidad creciente. El estudio concreto en este caso también se puede hacer como lo presentamos en este documento, a condición de tener suficiente información para la función *H(T)* para edades (t) adultas y "viejas" de B.

Valores de u (+∞)

Observemos que en la vida real de la industria se tienen que cumplir algunas condiciones de viabilidad financiera como realidades prácticas. Por ejemplo:

$$\int_0^\infty H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt < 0$$

Es decir que no hay máquina que genere beneficios infinitos, ni aun en toda su vida, y menos aún si se expresan en valores presentes.

$V(+\infty) = 0 = V'(\infty)$

O sea que ninguna máquina de edad infinita vale nada, ni se valoriza, ni se desvaloriza.

$$\int_0^\infty H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt > V(0)$$

Esta es también una exigencia indispensable para que el proyecto sea económicamente viable.

Con estas observaciones el cálculo con la función U(T) permite deducir que:

$U(+\infty) = 0$

y que:

$U'(+\infty) = 0$

es decir que el gráfico de la función *U(T)* tiende asintóticamente (cualquiera que sea el proyecto) al eje de la variable independiente *T*.

En resumen: el proyecto solamente se ejecuta, y nuestro problema no es trivial, si el pronóstico de las funciones H(t), V(t) y V'(t) produce un gráfico como el de las curvas II, IV o VII. En tal caso es evidente que hay (al menos) un punto máximo para U(t) en el cual:

$U'(T) = 0$ y $U''(T) = 0$

Esta observación obvia se puede corroborar matemáticamente aplicando el teorema de Rolle a las funciones U'(T) y U''(T) en el intervalo (0, +∞) de la variable T.

Procede pues preguntarse cuál es el valor θ de la vida útil T que le va a dar el máximo valor a la rentabilidad U(T). Como bien se sabe esto ocurre cuando:

U'(θ) = 0 y también U''(θ) < 0

condiciones éstas que vamos a calcular más abajo.

Esta situación suele ser frecuente en la vida real de muchas industrias en Colombia y América Latina, según la experiencia de muchos años de este autor como consultor industrial.

La condición U'(T) para el óptimo

Partiendo de las ecuaciones (11) y (12) ya deducidas para U(T), esta condición de U'(T) equivale a:

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt = e^{-rT}\left[T\cdot H(T) - r\cdot T\cdot V(T) + T\cdot V'(T)\right] + V(0) \qquad (14)$$

o sea, multiplicando por e^{rT}:

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{r(T-T)}\cdot dt = T\left[H(T) - r\cdot V(T) + V'(T)\right] - V(T) + V(0)\cdot e^{rT} \qquad (15)$$

La primera condición necesaria para el óptimo

Volviendo a la ecuación (12) que expresa la primera derivada de U(T), se deduce de inmediato que la condición U'(T) = 0 equivale a la condición:

$$T\left[H(T)+V'(T)\right] - (Tr+1)\cdot V(T) + V(0)\cdot e^{rT} = \int_0^T H(t)\cdot e^{r(T-t)}\cdot dt \qquad (16)$$

El lado izquierdo es una función de T que llamaremos:

$$\phi(T) = T\left[H(T)+V'(T)\right] - (Tr+1)\cdot V(T) + V(0)\cdot e^{rT} \qquad (17)$$

y el lado derecho lo llamaremos:

$$\psi(T) = \int_0^T H(t)\cdot e^{r(T-t)}\cdot dt \qquad (18)$$

Recordemos que estas funciones poseen, por consideraciones prácticas, las siguientes propiedades:

- Puede ser que H(0) = 0; pero después de cierta edad ε, tiene que ocurrir que H(T > ε) > 0.
- V(0) = V(0+): No se compra a B para que, desde nueva, se valorice o se desvalorice. Si V(0) ≠ V(0+) se está operando como especulador y no como productor. Excluimos pues ésta última posibilidad.
- V(∞) y V'(+∞) son nulos por la razón que ya se dio.
- $\int_0^\infty H(t)\cdot dt = \int_0^\omega H(t)\cdot dt < 0$ porque H (t) es positiva pero acotada en todo su dominio (0, ω), y ω ≤ +∞. Por tanto:

$\int_0^\infty H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt < \infty$ ninguna máquina puede generar beneficio operativo acumulado que sea infinito en su vida útil, ni aunque ésta fuera de duración infinita (que en la realidad práctica nunca ocurre).

De estas consideraciones se deduce que:

- f (0) = - V(0) + V(0) = 0 (19)
- $\phi'(0) = T\left[H'(T) + V''(T) - r\cdot V'(T)\right] + H(T) - r\cdot V(T) + V(0)\cdot re^{rT}$ Su dimensión física es "Dinero ÷ Tiempo", es decir K ÷ Z.

(20)

- $\phi'(0) = H(0)$ que es positivo. (21)
- $\phi''(T) = T[H''(T) + V'''(T) - r \cdot V''(T)] +$

  $2 \cdot H'(T) - 2r \cdot V'(T) + V''(T) + r^2 \cdot V(T) \cdot e^{rT}$

  Su dimensión física es Z^{-2} (22)
- $\phi''(0) = H'(0) + V''(0) - 2 \cdot r \cdot V'(0) + r^2 \cdot V(0)$ (23)

Y por otra parte se deduce que

- $\psi(0) = 0$ (24)
- $\psi'(T) = \int_0^T H(t) \cdot r \cdot e^{r(T-t)} \cdot dt + H(t)$ (25)

  (Aplicando la regla de Leibniz). Es obvio que $\Psi'(T) > 0$ para todo valor de T
- $\psi'(0) = H(0) > 0$ (26)
- $\psi''(T) = r^2 \int_0^T H(t) \cdot e^{r(T-t)} \cdot dt + H(T) \cdot r + H'(T)$

  aplicando de nuevo dicha regla (27)
- $\psi''(0) = r \cdot H(0) + H'(0)$ que debe ser positivo porque *H(t)* debe ser no decreciente en la máquina nueva: $H'(0) \geq 0$. (28)

Significado económico y financiero de ϕ (t) y de ψ (t)

Observemos las ecuaciones (16), (17) y (18), e interpretemos el significado económico de cada uno de sus términos, que son los siguientes:

T: la edad que posee la máquina en un momento dado del futuro (T > 0). Su dimensión física es $[Tiempo] = Z$.

H(T): la utilidad operativa, por unidad de tiempo (por ejemplo en dólares por segundo) que esté produciendo B a edad T. Su dimensión física es $[H(T)] = [Dinero] \div [Tiempo] = K \cdot Z^{-1}$; siendo *K* = *[Dinero]*, *P = [Tiempo].*

r: el costo de oportunidad del dinero, por unidad de tiempo (por ejemplo en centavos de dólar/dólar-día, o en porcentaje/día). Su dimensión física es Z^{-1}.

V'(T): la valorización por día, o por hora, de B frente al mercado de maquinaria usada. Su dimensión es $[V'(T)] = K \cdot P^{-1}$. Si se tratase de una desvalorización, se tendría $V'(T) < 0$.

H(T) + V'(T): el beneficio neto de la utilidad operativa más la desvalorización (o menos desvalorización si es que $V'(T) < 0$), por hora, en edad T. Su dimensión física es KZ^{-1}.

$T[H(T) + V'(T)]$: el dinero total que se hubiera ganado desde t = 0 hasta la fecha T, si el ritmo de beneficio neto hubiera sido uniforme e igual al de T: H(T) + V'(T). Su dimensión física es K.

- *V(T):* el costo de oportunidad de no vender a B al llegar su edad T.

- *T.r.V(T):* el costo acumulado del dinero, durante el tiempo desde t = 0 hasta T, liquidado a la tasa simple r, constante, sobre el valor remanente V(T) de la máquina B a edad T. Su dimensión física, evidentemente es K.

$V(T)e^{rT}$: el valor que se hubiera acumulado capitalizando a V (0), si en vez de invertir esta suma en B en el momento t = 0, se hubiera puesto a capitalizar en forma continua, a la tasa de 100r%, hasta el momento t = T. Su dimensión física es K.

$\phi(T)$: el acumulado algebraico de los valores $T[H(T) + V'(T)]$, más $V(0)e^{rT}$, menos $(Tr + 1) \cdot V(T)$ en fecha T. Su dimensión física es K.

$\psi(T) = \int_0^T H(T) \cdot e^{r(T-t)} \cdot dt$: el valor acumulado de las utilidades operativas generadas por B hasta la edad T. Su dimensión física es *K*.

La condición de óptimo $\phi(T) = \psi(T)$ significa que en la edad óptima T los valores positivos (o créditos contables) deben ser iguales a los valores negativos (o débitos contables) imputables a la máquina.

Para estudiar y resolver la ecuación

$$\phi(T) = \psi(T) \qquad (29)$$

la vamos a escribir como:

$$\phi(T)\cdot e^{-rT} = \psi(T)\cdot e^{-rT} \qquad (30)$$

Calculemos y escribamos las siguientes derivadas (escribiendo $D = d/dT$):

- $D\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right] = \left[-r\cdot\phi(T)+\phi'(T)\right]\cdot e^{-rT}$
- $D\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=0} = H(0) > 0$
- $D^2\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right] = e^{-rT}\left[\phi''(T) - 2r\cdot\phi'(T) + r^2\right]$
- $D^2\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=0} = 2H'(0) + V''(0) -$ $2r\cdot V'(0) + r^2 V(0) - 2rH(0) + r^2$ $= [D-r]^2\cdot V(0) - 2[D-r]\cdot H(0)$
- $D\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right] = e^{-rT}\left[-r\cdot\psi(T) + \psi'(T)\right]$
- $D\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=0} = H(0) > 0$
- $D^2\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right] = e^{-rT}\left[\psi''(T) - 2r\cdot\psi'(T) + r^2\right]$
- $D^2\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right] = H'(0) + rH(0) -$ $2r\cdot H(0) + r^2 = H'(0) - r\cdot H(0) + r^2$
- y cuando hacemos a T tender a $+\infty$; obtenemos:
- $\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=+\infty} = 0 = D\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=0} =$ $0 = D^2\left[\phi(T)\cdot e^{-rT}\right]$
- $\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=\infty} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T H(t)\cdot e^{-rT}\cdot$ $dt < +\infty$ (por lo que ya se explicó).
- $D\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=\infty} = 0 = D^2\left[\psi(T)\cdot e^{-rT}\right]_{T=\infty}$

Por lo anteriormente expuesto se aprecia que en casos de la realidad que sean verosímiles y no triviales, las gráficas de las funciones $\phi(x)\cdot e^{-rx}$ y $\psi(x)\cdot e^{-rx}$ tienen la apariencia general de la figura 6 si es que:

$$D^2\left[\phi(x)\cdot e^{-rx}\right]_{x=0}$$

es mayor que:

$$D^2\left[\psi(x)\cdot e^{-rx}\right]_{x=0}$$

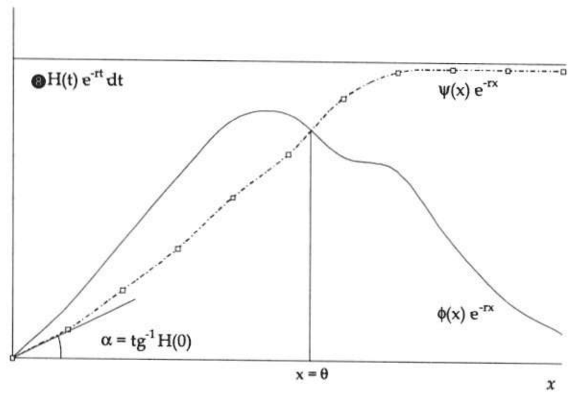

Figura 6 Formas usuales de las funciones $\phi(x)$, $\psi(x)$

En este caso, como es obvio, la ecuación (30) tiene una solución (por lo menos), que es la misma solución de la ecuación (29) y que según, la figura 6, es $x = \theta$. Este es pues el punto óptimo de T, a condición de que en ese punto se tenga, además, que:

$$D^2 U(\phi) < 0$$

como se vio.

Aún en el caso de que fuera $D^2\left[\phi(x)\cdot e^{-rx}\right]_{x=0}$ menor que, $D^2\left[\psi(x)\cdot e^{-rx}\right]_{x=0}$ también entonces la ecuación (30) tendría solución (e inclusive tendría dos soluciones) si la gráfica de las funciones fuera como la figura 7 que está vecina.

El cálculo de las soluciones de las condiciones (29) o (30) se realiza, en cada caso específico, por métodos gráficos y numéricos bien conocidos. Más abajo se dará un ejemplo.

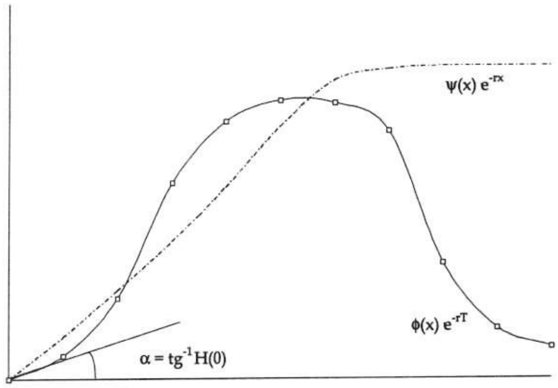

Figura 7 Algunas formas de las funciones $\phi(x)$, $\psi(x)$ con dos valores comunes

La segunda condición de optimalidad para T = θ

Consiste en que, en el óptimo $T = \theta$, se deberá tener $d^2U/dT^2 < 0$ (es negativa).

Combinando la expresión (13) de la segunda derivada con la condición (16) del mínimo se encuentra, después de varias operaciones y simplificaciones la desigualdad necesaria:

$$\theta^2\left([D-r]\cdot H(\theta)+[D-r]^2\cdot V(\theta)-\right. \quad (31)$$

$$\left.\theta[D-r]\cdot V(\theta)+2\cdot V(0)\cdot e^{r\theta}\right)<0$$

en donde el operador "D" significa, como de costumbre, "d/dT".

Observemos que:

$$(D-r)H(T)=D\left(H(T)\cdot e^{-rT}\right)$$

y que:

$$(D-r)^2H(T)=(D-r)\left[D\left(H(T)e^{-rT}\right)\right]=$$

$$D^2\left(H(T)\cdot e^{-2rT}\right)$$

En esta forma la desigualdad (31) se puede también escribir en forma alternativa:

$$\theta^2\left[D\left(H(T)e^{-r\theta}\right)+D^2\left(V(\theta)\cdot e^{-2r\theta}\right)\right]-$$

$$\theta\cdot D\left(V(\theta)e^{-r\theta}\right)+2V(0)\cdot e^{r\theta}<0$$

en el punto óptimo $T = \theta$; y siendo D, en cualquier punto, el operador de derivación $D = d/dT$.

La utilidad programada máxima

Llevando la condición (16) del óptimo, a la función (11) que define a U(T), en el momento óptimo $T = \theta$, se encuentra, después de varias operaciones y simplificaciones, que:

$$U_m=U(\theta)=\frac{e^{-r\theta}\left[H(\theta)-r\cdot V(\theta)+V'(\theta)\right]}{V(0)} \quad (32)$$

Esta fórmula da la máxima utilidad por año promedio programada que pueda esperarse del proyecto en el momento t = 0 de arrancarlo. Es la máxima expectativa de rentabilidad que el proyecto B le ofrece al que lo pretende ejecutar, en el momento de tomar la decisión de hacerlo o no hacerlo. Encontrar esta fórmula es uno de los propósitos de este trabajo. El autor la ha aplicado en varias ocasiones durante sus trabajos como ingeniero consultor de proyectos industriales.

Los asesores financieros requieren que la U óptima sea:

$$U_m=U(\theta)>>r \quad (33)$$

o sea que se cumpla:

$$H(\theta)-r\cdot V(\theta)+V'(\theta)>>e^{-r\theta}\cdot rV(0)>0$$

es decir que:

$U_m > 0$

y la utilidad óptima esperada (32) debe ser un número positivo con un valor numérico sensiblemente alto para satisfacer la exigencia financiera de la desigualdad (33).

El caso V(T) = 0 para T > 0

Hay situaciones en que, una vez adquirido el equipo B, deja ipso facto de tener valor económico como bien vendible. Este es, en la vida práctica, un caso frecuente para máquinas que tienen una vida técnica útil muy corta; o cuando por alguna razón la máquina B no se desea revenderla usada, ni nueva ni vieja. En Colombia, tradicionalmente, este ha sido el caso de los telares (con lanzadera o sin ella) en la industria textil, de los hornos de acería en la industria siderúrgica, y otros varios. En este caso se tiene también V'(T) = 0.

En esta situación la función que hay que optimizar (ver ecuación (11)) es:

$$U(T) = \frac{\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt - V(0)}{V(0)T} \qquad (34)$$

La primera condición de optimalidad U'(θ) = 0 se reduce en este caso a la condición:

$$T\cdot H(\theta) - V(0)\cdot e^{r\theta} = \int_0^\theta H(t)\cdot e^{r(\theta-t)}\cdot dt \qquad (35)$$

Ver condición (22.01 a). Y la segunda condición de optimalidad U''(q) < 0 se expresa como

$$\theta^2[D-r]H(\theta) + 2V(0)\cdot e^{r\theta} < 0 \qquad (36)$$

En consecuencia la utilidad promedia programada que puede aspirarse a tener, es, al máximo:

$$U(\theta) = \frac{e^{-r\theta}H(\theta)}{V(0)} \qquad (37)$$

Un criterio de rentabilidad menos severo

Hay a veces situaciones cuando se puede esperar, con una gran certeza, que las utilidades operativas, puestas en valor presente y acumuladas van a superar holgadamente el monto de la inversión inicial. O sea que:

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt >> V(0) \qquad (38)$$

Aún desde una corta edad t = T. Esto ocurre cuando B es una máquina muy productiva que fabrica, casi sola, un solo producto muy rentable, como es un telar sin lanzadera, un reactor químico para producir un ácido orgánico, un horno eléctrico de arco para producir acero de chatarra, un horno eletrotérmico para producir ferroaleciones, etc. Entonces se puede tomar como medida de la utilidad esperada a la función:

$$U(T) = \int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt \,/\, (V(0)\cdot T) \qquad (39)$$

Entonces la condición U'(T) = 0 se expresa:

$$e^{-rT}\cdot T\cdot H(T) = \int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt \qquad (40)$$

Según lo ya dicho. La utilidad promedia anual óptima es:

$$U(\theta) = \frac{e^{-r\theta}\cdot H(\theta)}{V(0)} \qquad (41)$$

Como en todos los casos, debe resultar numéricamente bastante mayor que r, como la piden los banqueros.

Veremos más abajo un ejemplo numérico de esta situación, en un caso real y muy conocido por los ingenieros civiles en todo el mundo.

Período de reembolso (pay-back) del proyecto

Esta noción es por definición, el plazo inicial en la vida del proyecto durante el cual sus *utilidades de operación,* puestos en valor presente, equivalen (o pagan) al monto de la inversión inicial. O sea que, designando con b, el período de reembolso, es el valor t = *b* que satisface la condición:

$$\int_0^b H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt = V(0) \qquad (42)$$

Ya sea que V(t) se tome como nula o que tenga algún valor positivo. Escribiéndola de otra manera, en valores presentes en t = 0:

$$e^{-rb}\cdot\psi(b) = V(0) \qquad (43)$$

y en valores futuros de t = T:

$$\psi(b) = e^{rb}\cdot V(0) \qquad (44)$$

o, aún mejor:

$$\int_0^b H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt - V(0) = 0 \qquad (45)$$

Esta ecuación se resuelve por conocidos métodos gráficos y numéricos que están sugeridos en la figura 8.

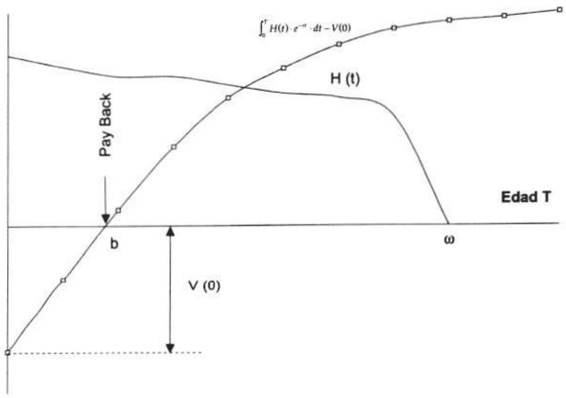

Figura 8 Gráfico para resolver la ecuación (45)

Relación de beneficio-costo

Otra medida para juzgar el mérito financiero de una inversión es el cociente llamado de beneficio/costo, el cual se define como:

$$B(r,T) = \qquad (46)$$

$$\frac{\int_0^T R(t)\cdot P_o\cdot g(t)\cdot u\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(0)\cdot e^{-rT} + E(T)}{\int_0^T R(t)\cdot M(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(0)}$$

en donde E(T) expresa (como es usual en obras públicas y otros proyectos públicos) las "externalidades" que genera el proyecto para otros beneficiarios que no son los que aportan a su riesgo la inversión V(0) y la gestión de aquél.

Requisitos financieros y técnicos de viabilidad

Una vez hechos estos pronósticos y estos cálculos, los inversionistas y los asesores financieros exigen como condiciones indispensables (que no suficientes) para hacer la inversión, que se satisfagan varias condiciones que se llaman requisitos de factibilidad (o de viabilidad) financiera de la inversión en el bien B. Por lo común, las más exigidas son las siguientes:

- Es indispensable que el período de reembolso o pay-back (b) sea bastante más corto que la vida útil óptima (q), para que se justifique el esfuerzo empresarial:

  $$b \ll \theta \qquad (47)$$

- Es también indispensable que la vida útil óptima (q) sea sensiblemente menor que la vida técnica máxima posible:

  $$q \ll \omega \qquad (48)$$

- Es indispensable que la utilidad óptima (U′) sea sensiblemente mayor que el costo real, de sombra, del dinero:

  $U' = U(r, \theta) \gg r$ (siendo $r > 0$, ya predeterminado) (49)

  es decir que resulte ser:

  $$\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(T)\cdot e^{-rT} - V(0) \gg r\cdot T\cdot V(o) \qquad (50)$$

  para T = q y para un intervalo de tiempo vecino ($T\ ^{3}\ q$).

- Es necesario que el valor presente neto del proyecto sea sensiblemente mayor que la suma de dinero (V(0)) que se va a arriesgar y a invertir:

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt + V(T)\cdot e^{-rt} -$$
$$V(0) >> V(0) \qquad (51)$$

para T = θ y para un intervalo de tiempo vecino a q: T ∈ (θ - α, θ + β).

- Especialmente en proyectos de tipo público se requiere también que la relación beneficio/costo sea sensiblemente mayor que uno (1):

  B (r,t) >> 1

En algunos casos específicos se plantean algunos requerimientos concretos particulares que hacen más severas las condiciones de viabilidad financiera o técnica del proyecto, pero aquí solo vienen al caso los anteriores, que son casi universales, cualesquiera que sea B.

Tasa interna de retorno

En el caso general de que hemos venido ocupándonos (cuando V(t) y V'(t) no son idénticamente nulos), los banqueros y los industriales usan hoy en día, más que los criterios ya dados, la medida de una tasa de interés hipotética que se llama la tasa interna de retorno (TIR), la cual designaremos con la letra griega "ro" (ρ) y que está definida de modo implícito, y en los términos de este modelo matemático, por la ecuación:

$$\int_0^T H(t)\cdot e^{-\rho t} - V(0) + V(T)\cdot e^{-\rho T} = 0 \qquad (52)$$

o sea:

$$\psi(T) - V(0)\cdot e^{\rho T} + V(T) = 0 \qquad (53)$$

Esto significa, en términos financieros, que la TIR es aquella que, entendida como rentabilidad capitalizable del dinero, hace nulo el flujo neto descontado de fondos.

Un ejemplo ilustrativo

Un ejemplo ilustrativo del modelo que se describe es el proyecto de comprar un *bulldozer* (B) para movimiento de tierras, con las siguientes características:

- Valor comercial para comprarlo: V(0) = V_o = 400.000 dólares; V(t > 0) = 0.
- Rendimiento inicial: P_o = 4 millones de m^3 de tierra/año.
- Costo de oportunidad del dinero: r = 20% = 0,20 por año en capitalización continua.
- Utilidad operativa unitaria: valor agregado unitario: u(t) = u (constante) = 0,12 US$/$m^3$ de tierra que mueva.
- Función de supervivencia de este tipo y esa marca de *bulldozer*: extinción exponencial o poissoniana, tal que a los seis años de trabajo sobreviven el 80% de los *bulldozers* que se ponen en servicio nuevo: R(t) = e^{-at}, donde $e^{-a \times 6\,\text{años}}$ = 0,80. por lo tanto a = 0,0372/año: 3,72% de los *bulldozers* que estén operando en un momento dado salen de servicio en el curso de un año, según la experiencia de los usuarios con esa marca B.
- Costos de mantenimiento y operación de la máquina en su primer año de vida activa: M_o = M(0) = 10.000 US$/año. La experiencia ha mostrado que con la edad estos costos van aumentando exponencialmente, de manera que a los seis años de edad se van a duplicar: M(t) = M(0)$e^{c \times 6\,\text{años}}$ = 2,00 = 200%. Por lo tanto c = 0,1155/año.
- Deterioro de rendimiento físico con la edad: g(t) = e^{-bt}, de tal manera que a los diez años de edad el rendimiento ha mermado en una tercera parte del rendimiento nuevo: $e^{-b \times 10\,\text{años}}$ = 0,6667, en metros cúbicos por años. Por tanto b = 0,0405 por año.

La función H(t) vale en este caso:

$$H(t)=R(t)[P_o \cdot g(t) \cdot u - M(t)]= \quad (1)$$

$$e^{-at}\left[P_o \cdot e^{-bt} \cdot u - M(0) \cdot e^{-ct}\right]$$

$$= 480000 \cdot e^{-0.0777t/año} - 10000 e^{0.783t/año}$$

y el integral que hay que estudiar es:

$$\int_0^T H(t) \cdot e^{-rt} dt = \int_0^T \left[u \cdot P_0 \cdot e^{-(a+b+r)t} - \right.$$

$$\left. M_0 \cdot e^{-(a+r-c)t}\right] \cdot dt = \frac{u \cdot P_o}{a+b+r}\left[e^{-(a+b+r)t}\right]_T^0 -$$

$$\frac{M_0}{a+r-c}\left[e^{-(a+b+r)t}\right]_T^0 = \left(u \cdot P_o / \delta\right)\left[1-e^{-(a+b+r)T}\right] -$$

$$\left(M_0 / \varepsilon\right)\left[1-e^{-(a-c+r)T}\right] \quad (2)$$

En donde $\delta = a + b + r = 0{,}2777/\text{año}$, y $\varepsilon = a - c + r = 0{,}1217/\text{año}$.

Sustituyendo valores numéricos, reorganizando términos, queda que esa integral, en nuestro caso particular es la función:

$$\int_0^T H(t) \cdot e^{-rt} \cdot dt - V_0 = \left(u \cdot P_0 / \delta - M_0 / \varepsilon\right) +$$

$$\left(M_0 / \varepsilon\right) e^{-\varepsilon T} - \left(u \cdot P_0 / \delta\right) e^{-\delta T} - V_0$$

$$= \left(1.246.315 + 82.169 \cdot e^{-0{,}1217T/año}\right.$$

$$\left. - 1.728.484 \cdot e^{-0{,}2777T/año}\right) \text{ US\$}$$

A esta función la llamaremos G(T), en este ejercicio.

La función que aparece al lado izquierdo de la ecuación (31.03) es

$$T \cdot H(T) \cdot e^{-rT} =$$

$$T\left[480.000 \cdot e^{-0{,}0777T/año} - 10.000 \cdot e^{0{,}783T/año}\right]$$

A esta función la llamaremos F(T), en este ejercicio.

La vida óptima se obtiene resolviendo la ecuación:

F(T) = G(T)

sea en forma numérica, sea en forma gráfica. Para lo primero construimos los valores numéricos de F(T) y G(T) para varios valores de T a partir de T = 0 (véase tabla 1):

Tabla 1 Valores numéricos de F(T) y G(T)

T (en años)	*F(T) (en US$)*	*G(T) (en US$)*
0	-400.000	0
1	9.700	354.757
2	256.668	535.209
2,1	345.240	546.327
2,5	443.639	598.145
3	551.979	605.143
4	727.633	607.143

estos valores están corroborados por la figura 9, la cual presenta las funciones F(T) y G(T). La solución del problema es la abscisa del punto de intersección de las dos curvas, de tal manera que la vida útil óptima es θ = 3,4 años = 3 años y 5 meses. En ese lapso de tiempo, se espera hoy, al adquirir el *bulldozer*, que genere un valor presente neto de:

$$\theta \cdot H(\theta) \cdot e^{-r\theta} = F(\theta) =$$

$$3{,}4 años\left[480.000 \cdot e^{-0{,}077x3{,}4} - \right.$$

$$\left. 10.000 \cdot e^{0{,}783x3{,}4}\right] e^{-0{,}20x3.4} (US\$/año)$$

$$= 3{,}4\left[480.000 \cdot e^{-0{,}2777x3{,}4} - \right.$$

$$\left. 10.000 \cdot e^{-0{,}1217x3{,}4}\right] \; US\$ = 612.258$$

dólares en moneda constante, después reembolsar la inversión, y antes de impuestos, a lo largo de 2,1 años. La rentabilidad anual es:

$$\frac{\theta \cdot H(\theta) \cdot e^{-rt}}{\theta \cdot V_0} = \frac{612.258 US\$}{3,4 años x 400.000 US\$} =$$

$$\frac{0,45}{año} = 45\% \text{ por año}$$

el cual es notoriamente mayor que el 20% anual, que es el valor del dinero (r).

En este ejemplo estamos considerando que V(t > 0) = 0 y que V'(t > 0) = 0. Entonces la segunda condición del óptimo T = θ, la que está expresada por la ecuación (13), se convierte en la desigualdad:

$$\theta^2[H'(\theta) - r \cdot H(\theta)] + 2 \cdot V_0 \cdot e^{r\theta} < 0 \qquad (3)$$

Calculemos cada término, en el punto T = θ = 3,4 años:

$$H'(\theta) = [480.000(-0,0777)e^{-0,0777x3,4} -$$

$$10.000 \cdot 0,783 \cdot e^{0,783x3,4}] (US\$/año^2) =$$

$$-140.813 (US\$/año^2)$$

$$H(\theta) = (480.000 \cdot e^{-0,0777x3,4} -$$

$$10.000 \cdot e^{0,783x3,4}) (US\$/año) = 225.284 (US\$/año)$$

$$2V_0 \cdot e^{r\theta} = 2 \cdot 400.000 e^{0,2x3,4} \; US\$ =$$

$$1.579.102 \; US\$$$

De tal manera que el lado izquierdo de la ecuación (56) vale, numéricamente:

$$[3,4^2(-140.813 - 0,2 \cdot 225.284) +$$

$$2 \cdot 400.000 \cdot e^{0,2x3,4}] \; US\$ = -2.101.483 \; US\$$$

que es evidentemente negativo y confirma que el punto T = θ = 3,4 años es el de la duración óptima económica que buscábamos.

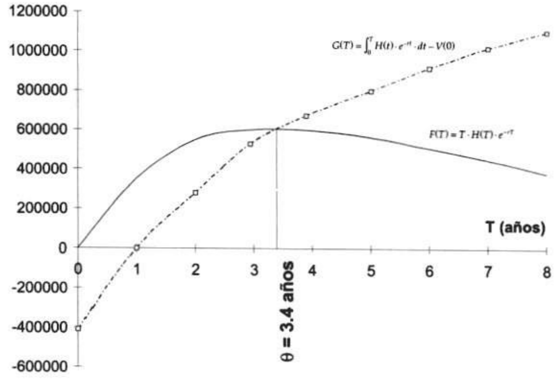

Figura 9 Punto de intersección de las curvas F(T) y G(T)

De acuerdo con su definición, la tasa interna de retorno que ofrece esta máquina en el tiempo óptimo θ = 3,4 años será el valor de ρ (letra ro griega) que cumpla la condición

$$\int_0^{\theta} H(t) \cdot e^{-\rho t} \cdot dt - V_0 = 0$$

la cual se escribe en nuestro caso, hablando en dólares, como: θ

$$\int_0^{3,4} [480.000 \cdot e^{(-0,0777-\rho)t} -$$

$$10.000 \cdot e^{(0,783-\rho)t}] \, dt = 400.000$$

esta integral la calculamos "a mano" por los métodos clásicos del análisis, o usando el programa de computador llamado Mathematica, y obtenemos:

$$\frac{470.000\rho - 376.617}{(-0,0777+\rho)(-0,783+\rho)} +$$

$$\frac{225.286(1,33037-\rho)}{e^{3,4\rho}(0,0777+\rho)(-0,783+\rho)} = 400.000$$

(Ambos lados de la ecuación anterior llevan como factor la unidad "dólares").

En la figura 10 se muestra el gráfico cartesiano de la función del lado izquierdo. En este gráfico se aprecia visualmente que la solución de la ecuación anterior está cerca del número 1; y por aproximaciones sucesivas encontramos que su valor con cuatro dígitos significativos es ρ = 1,0295/año o sea ρ = 102,95%/año. Esta sería la tasa interna de retorno que se obtendría por operar la máquina durante los 3,4 años que encontramos como duración óptima de su vida útil. Su valor numérico, que está medido en dólares constantes, sería para cualquier inversionista, muy satisfactorio.

La relación de costo/beneficio es el inverso de la relación β = beneficio/costo, y vale:

$$1/B(r) = \frac{V_0 + \int_0^{T^*} R(t)\cdot M(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt}{\int_0^{T^*} R(t)\cdot P_0 \cdot g(t)\cdot u \cdot e^{-rt}\cdot dt} =$$

$$\frac{400.000 + \int_0^{3,4} e^{-0,0372t}\cdot 10.000\cdot e^{0,1155t}\cdot e^{-0,20}\cdot dt}{\int_0^{T^*} e^{-0,0372t}\cdot 4\cdot 10^6\cdot e^{-0,040546t}\cdot 0,12\cdot e^{-0,20t}\cdot dt}$$

$$= \frac{427.843\ USD}{1.056.037\ USD} = 0,4051 = 40,51\%$$

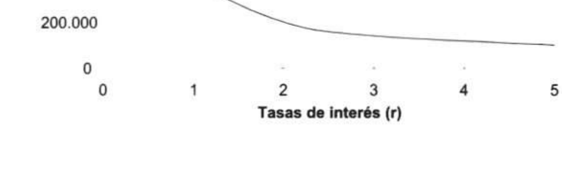

Figura 10 Inversión inicial contra tasa de interés

Observando el gráfico y recordando la definición de b:

$$\int_0^b H(t)\cdot e^{-rt}\cdot dt - V(0) = 0$$

se aprecia que en este problema el período de reembolso, o pay back, es b = un año casi exactamente. En la vida práctica este es un valor satisfactorio para inversiones de unidades o decenas de miles de dólares, y muy bueno para inversiones de centenares de miles de dólares; y especialmente alto (y muy poco frecuente) para inversiones que sean mas altos que estos niveles.

La máxima utilidad posible que esa inversión le ofrece al inversionista al momento de hacerla, es, según la ecuación (41):

$$U^* = U_{(3,4años)} =$$

$$\frac{e^{-0,20x3,4}\left[480.000\cdot e^{-0,0777x3,4} - 10.000\cdot e^{0,783x3,4}\right]\left(US\$/_{año}\right)}{400.000\ US\$}$$

$$= 28,53\%/año = 0,2853año^{-1}$$

Y último

Aparte de la función U(T) que está dada por la fórmula (11), y que hemos estudiado aquí con algún detalle (porque ningún libro lo hace), en la práctica financiera e industrial pueden usarse otras medidas de rentabilidad, como ya lo anotamos. Una de ellas es la relación de beneficio/ costo. Otro es el de la utilidad contable proyectada y descontada, dividido por la inversión inicial (V(0)) y por la duración T del horizonte del proyecto. En este caso es necesario considerar la depreciación contable y tributaria de B en el plazo que las leyes autorizan (y que no necesariamente es igual a T), y considerar también la tasa de impuesto sobre las ganancias.

Este caso se desarrolla de manera análoga al que hemos discutido aquí. Se deja como tema de estudio a algún lector que desee elaborarlo.

Agradecimientos

El autor agradece la colaboración de la Universidad Pontificia Bolivariana que le ha proporcionado el tiempo para redactar este artículo; del ingeniero Germán Poveda Jaramillo por el uso de su computador y de su software; a la ingeniera Gladys Rincón por su ayuda computacional; y al ingeniero David Poveda Jaramillo por sus útiles comentarios.

Referencias

1. Arboleda, Benjamín. *Ingeniería económica: Métodos para el análisis de alternativas de inversión.* Medellín. Asociación de Ingenieros Industriales de la Universidad de Antioquia. 1980. 502 p.
2. Behrens, W. y P.M. Hawranek. *Manual para la preparación de estudios de viabilidad industrial. Viena. Organización de la Naciones Unidas para el desarrollo industrial.* 1994. 400 p.
3. Blank, Leland T. y Anthony J. Jacquin. *Ingeniería económica.* México. McGraw-Hill. 1996. 546 p.
4. Chouleur, Jacques. *Las técnicas matemáticas en la empresa.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1968.
5. Corrons Prieto, Luis. *Técnicas de Ingeniería y Tecnología de la producción.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1979. 435 p.
6. Creues Solé, Antonio. *Fiabilidad y seguridad de procesos industriales.* Barcelona. Boixereu Editores. 1991. 124 p.
7. Feller, William. *An introduction to probability theory and its applications.* Volumen Uno. Londres. John Wiley and Sons. 1950. 419 p.
8. Grant, Eugene L; Grant, Ireson; y Leavenworth, Richard L. *Principios de Ingeniería económica.* México. Editorial CECSA. 1984. 710 p.
9. Kapur, K. C. y Lamberson, L. R. *Reliability in engineering design.* New York. John Wiley and Sons. 1977. 586 p.
10. King, Charles. *Quantitative Analysis for managerial decisions.* Reading, Massachusets. Addison Wesley. 1976.
11. Park, Chan J.; Sahrp-Bette. Gunther P. *Advanced Engineering economics.* New York. John Wiley and Sons. 1990. 740 p.
12. Riggs, James L. *Sistemas de producción.* México. Editorial Limusa. 1980. 682 p.
13. Riggs, James L. *Modelos de decisión económica para ingenieros y gerentes de empresa.* Madrid. Alianza Editorial. 1973. 508 p.
14. Romero, C. *Modelos económicos en la empresa.* Bilbao. Ediciones Deusto. 1977.
15. Selivanov, A. T. *Fundamentos de la teoría de envejecimiento de máquinas.* Moscú. Editorial Mir. 1972. 392 p.
16. Taylor, George A. *Ingeniería económica.* México. Limusa. 1978. 556 p.
17. Thuesen, H.G., W.J. Fabricky, , y G.J. Thuesen. *Ingeniería económica: Edición revisada de economía del proyecto de ingeniería.* Bogotá. Prentice Hall. 1981. 592 p.
18. Tyler, Chaplin. *Chemical Engineering Economics.* McGraw Hill Co. 1948. 321 p.
19. Valencia, Eduardo. *Decisiones económicas en la ingeniería.* Medellín. Universidad Nacional. 1988. 474 p.
20. Varela, Rodrigo. *Evaluación económica de Inversiones.* Cali. Editorial Norma. 1993. 512 p.
21. Villalobos, José Luis. *Matemáticas Financieras.* México. Grupo Editorial Iberoamericana. 1993. 776 p.
22. Siam Review. *Society of Industrial and applied Mathematics.* New York.
23. American Management Association. *Scientific Management.*
24. Accounting Review. *Industrial Engineering.* McGraw-Hill. New York.