

El producto y el control de la contaminación: un análisis formal

Introducción. I. Estructura del modelo. II. Formulación de alternativas. III. El problema general: evaluación cualitativa y políticas. IV. Las reglas de costo-beneficio. Conclusion. Anexo. Referencias.

Introducción

El análisis convencional de los problemas de control de la contaminación en economía se ha restringido, frecuentemente, al daño causado por los procesos de producción y, principalmente, a la formulación de soluciones de tipo normativo. En este contexto la normatividad se concentra en instrumentos de política aplicados tradicionalmente en el campo de las finanzas públicas, tales como impuestos, tarifas y subsidios (Ekesland y Jimenez 1992).

Si bien la identificación de problemas de contaminación y la formulación de políticas es importante, también es cierto que, en muchos casos, el diseño de políticas no corresponde al punto óptimo de contaminación. Tales políticas deben ser el resultado de un análisis positivo de largo plazo. De este modo, por ejemplo, es probable que reducir el uso de cierto tipo de contaminante no sea un programa óptimo porque su efecto sobre el medio natural es altamente asimilable por éste. No obstante, la mayoría de las veces el problema no es tan simple.

La contaminación es precisamente un problema porque la capacidad de asimilación del ambiente se va agotando a medida que las emisiones

aumentan; es, además, un problema importante porque la emisión trae consecuencias sobre el bienestar social y los beneficios sociales de la producción; más aún, estas consecuencias dependen, potencialmente de las recomendaciones de política, pues pueden generar un *trade-off* entre los objetivos sociales.

El objetivo de artículo es presentar un modelo teórico que relaciona la contaminación ambiental con el nivel de actividad económica y los costos y beneficios de controlarla en el largo plazo. Esta relación se muestra a través de la maximización de una función de beneficio social, que se obtiene de la producción agregada, de la concentración de la emisión, de la tecnología y de los gastos en métodos artificiales de control de la contaminación.

El modelo planteado aquí, por ser dinámico, tiene la estructura de la teoría del control óptimo, basado en Dasguta (1982); sin embargo, es desarrollado como si fuera estático, a través de un teorema para funciones no cóncavas.

El artículo está dividido en cinco secciones. La primera es una exposición de las variables y características del modelo presentado, además, se agrega un par de supuestos que no se hacen explícitos en el modelo original. La segunda es la formulación de dos alternativas para el control de la emisión; la primera propuesta es el problema general de control y la segunda es una derivación particular de éste. La tercera sección es la evaluación cualitativa de políticas posibles de control, a la luz de la propuesta general. En la cuarta se derivan y analizan las reglas de costo-beneficio usando un teorema para funciones no cóncavas. La quinta sección corresponde a las conclusiones que se derivan del análisis al modelo.

I. Estructura del modelo

La contaminación es considerada por Dasgupta (1982) como un mal económico y sugiere que es conceptualmente útil tener en cuenta que la

emisión de contaminantes se traduce en una reducción de la cantidad de recursos positivamente valorados y potencialmente disponibles en la sociedad². Supone, además, que la contaminación es un subproducto de la producción social y es un producto intermedio que se usa en la producción. Este supuesto es común en la literatura sobre el medio ambiente. Siebert (1987), por ejemplo, asume que una economía se caracteriza porque la contaminación es un producto conjunto de la producción de bienes y es emitido en el ambiente (efecto vertedero).

Deben considerarse dos supuestos que el modelo de Dasgupta no hace explícitos. Primero, debe asumirse que los contaminadores y las víctimas son lo suficientemente numerosas como para que no haya lugar a negociaciones que puedan internalizar³ las externalidades y por lo tanto el teorema de Coase no sea válido⁴. Segundo, escasez significa la existencia de competencia por el uso de los factores, y esto implica el surgimiento de costos de oportunidad. El principio de los costos de oportunidad sugiere que el uso específico del ambiente tiene que traer un costo de oportunidad en forma de beneficio. Si el ambiente es usado como receptor de desperdicios, el costo de oportunidad consiste en la pérdida de calidad ambiental. En este caso el uso del medio natural para propósitos de asimilación de contaminación no se puede mantener si el costo de oportunidad es mayor que su beneficio. Para las empresas el beneficio es la facilidad de producir bienes privados (Siebert 1987). Se asume entonces que el costo de oportunidad siempre es menor que el beneficio.

En concordancia con lo que se dijo, considérese un índice agregado del producto denotado por Y_t , sea P_t la tasa de descarga de contaminación asociado con este nivel de producción, se puede suponer que $P_t = \alpha Y_t$,

2 La contaminación se puede entender como un *stock* o flujo de sustancias físicas, las cuales impiden la capacidad del hombre de disfrutar la vida. (Keeler, Spence y Zeckhauser 1991).

3 Una internalización de externalidades es consecuencia de una reasignación de los derechos de propiedad. Véase Varian 1994.

4 Esta proposición es aplicable si los costos de negociación y acuerdos legales son insignificantes (Eskeland y Jimenez 1994).

(1) donde $\alpha > 0$ y se denomina la relación emisión-producto. Esta relación es afectada por la tecnología, por lo que Dasgupta supone que para cada técnica de producción existe un valor asociado α , siempre que el interés del análisis recaiga sobre el flujo de contaminantes dentro del medio circundante.

Si las empresas no controlan la contaminación se asume que están usando la mejor tecnología a su alcance, que elegirán si no están restringidas por cobros a la emisión o por emisión estándar. Pero para reducir α se requiere un flujo adicional de costo, diferente al necesario para producir Y_t , éste se descuenta a una tasa de interés, la del consumo, o tasa social de descuento. Esta inversión adicional se denota por, I , de modo que $\alpha = h(I)$, con la propiedad de que $d\alpha/dI = h'(I) < 0$ y $d^2\alpha/dI^2 = h''(I) > 0$. Significa que α puede ser reducida por un incremento en la inversión en tecnología; α es la relación emisión producto neto, porque incluye la contaminación creada por emprender inversión en anticontaminación.

Es necesario establecer cómo cambia la concentración de la contaminación en el tiempo. Sea S_t el nivel de concentración en el momento t , su tasa de cambio con respecto al tiempo es \dot{S} , esta se puede tomar como una función de la tasa de descarga, P_t , y del propio nivel de concentración, S_t . De este modo $\dot{S} = H(P_t, S_t)$ (2). O en forma más apropiada $H(P_t, S_t) = G(P_t) + J(S_t)$ (3). Donde G y J son funciones conocidas. Por simplicidad se asume que $G(P_t) = P_t$, implica que será sólo función de la contaminación S_t . Aquí se están considerando contaminantes que no son en extremo dañinos para los procesos naturales con el paso del tiempo. Si los contaminantes son no degradables la tasa de depreciación o asimilación es tal que $J(S_t) = 0$, si son degradables por el medio en un plazo de meses entonces $J(S_t) < 0$ siempre que el nivel de concentración no sea demasiado grande. Si esto ocurre, es decir, un S_t muy grande, por ejemplo $\dot{S} > S_t$, entonces $J(\dot{S}) = 0$.

Se considera aquí que la contaminación una vez vertida no se multiplica y por tanto $J \leq 0$. Dasgupta proporciona una idea intuitiva. Si

el nivel de concentración es cero la tasa de asimilación es cero, dado que no hay nada en el medio que pueda ser asimilado. Si el nivel de concentración es muy alto la tasa de asimilación también es cero, es decir el ambiente esta tan cargado de contaminación que su asimilación es nula. Cuando el nivel de concentración aumenta, la tasa de asimilación decrece, de modo que $dJ(S_t)/dS_t < 0$. Supóngase que la contaminación se asimila a una tasa fija δ , tal que $\delta \in (0,1)$. Así $J(S_t) = -\delta S_t$ (4), por lo que $\dot{S} = P_t - \delta S_t$ (5).

Considérese otro instrumento de control de emisiones que Dasgupta denomina neutralización de afluentes de vertido. Este proceso tiene un costo denominado costo de limpieza (*clean-up*), denotado por ϵ_t . Este es el costo en que se incurre reduciendo la cantidad de contaminantes por medios artificiales. ϵ_t puede introducirse en (4), y escribirla como $\Phi(\epsilon_t, S_t)$, donde $\delta\Phi / \delta\epsilon_t = \Phi(\epsilon_t, S_t) < 0$ (4)'. Significa que la capacidad de asimilación de la contaminación disminuye incrementando el gasto; en otras palabras, cuando los gastos de limpieza son relativamente bajos, es más fácil que la degradación o depreciación de la contaminación aumente, de este modo (5) se expresa como:

$$\dot{S}_t = P_t + \Phi(\epsilon_t, S_t) \quad (6)$$

$$\dot{S} = h(I)Y_t + \Phi(\epsilon_t, S_t)$$

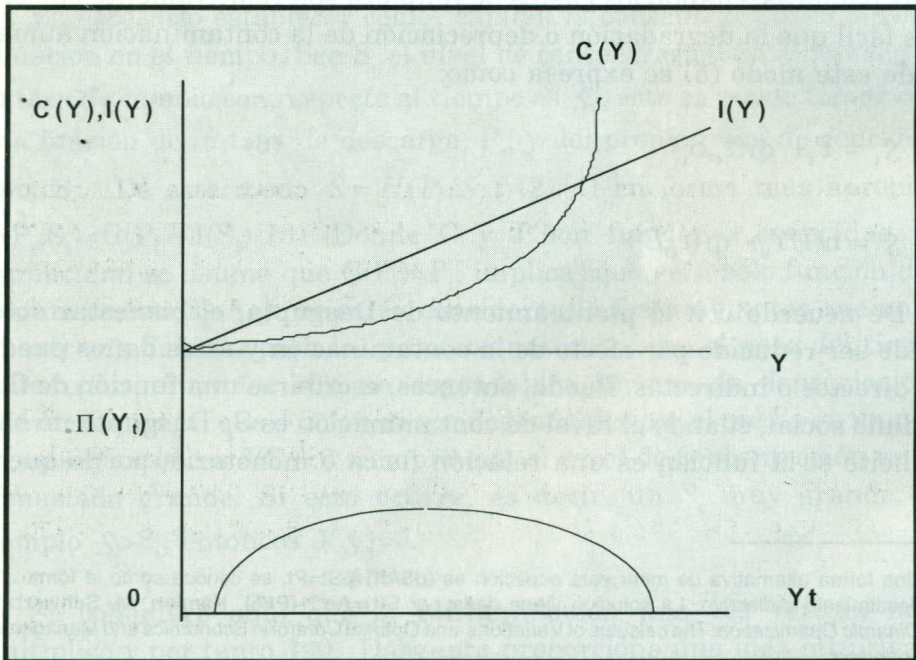
De acuerdo con el planteamiento de Dasgupta, el bienestar social puede ser reducido por efecto de la contaminación y estos daños pueden ser directos o indirectos. Puede, entonces, escribirse una función de flujo de daño social, cuando el nivel de contaminación es S_t . Dasgupta no hace explícito si la función es una relación física o monetaria, por lo que se

5 Una forma alternativa de mirar esta ecuación es $(dS/dt) + \delta S_t = P_t$, se conoce como la fórmula del decaimiento radiactivo. La solución viene dada por $S(t) = Ae^{-\delta t} + (P_t/\delta)$, Kamien, M. Schwartz, N. *Dynamic Optimization. The calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, apéndice.

asume una situación en la cual la función de daño social representa un índice de calidad ambiental en términos de contaminación (Siebert 1987). Entonces la función es una relación física y la calidad ambiental no se evalúa en términos monetarios.

En los casos más importantes, el daño social sólo depende de la cantidad de concentración S_t . Para fácil exposición el modelo se concentra en tales casos, por lo que se denota la función de daño así $\Psi = \Psi(S_t)$.

El último aspecto es el referente al beneficio social de la producción Y_t . Sea $\Pi(Y_t)$ el flujo de beneficio social neto al nivel de producción Y_t . Significa que el costo de producir ha sido incluido en el cálculo del beneficio neto social ; de este modo, el beneficio tiene el comportamiento típico, es decir éste es máximo cuando la pendiente de la función de ingreso sea igual a la pendiente de la función de coste. Por lo tanto $\Pi(Y_t)$ crecerá para valores bajos de Y_t y decrecerá para valores altos de Y_t , en la figura se muestra el caso particular de beneficios positivos:



II. Formulación de alternativas

Se presenta ahora el problema de planeación donde el control de la contaminación es sólo una parte. Sea ρ la tasa de descuento. Las variables que el planeador puede controlar son I , Y_t y ε_t , sobre un horizonte de planeación infinito. El flujo de beneficio social neto en un instante t es $(\Pi(Y_t) - \Psi(S_t) - \varepsilon_t)e^{-\rho t}$. El criterio de bienestar es la suma de los valores presentes de beneficio social neto. La primera alternativa, que es una formulación general del problema del planificador, debe elegir senderos óptimos para I , Y_t y ε_t .

De este modo, el problema es:

$$\text{Max} \int_0^{\infty} (\Pi(Y_t) - \Psi(S_t) - \varepsilon_t) e^{-\rho t} dt - I \quad (7)$$

$$\text{s a: } \dot{S} = h(I)Y_t + \Phi(\varepsilon_t, S_t)$$

$$I, Y_t, \varepsilon_t \geq 0, \quad \forall t \leq \infty$$

S_0 dado

Esta formulación debe reflejar los rasgos esenciales del problema asociado con el control de la contaminación. Según Dasgupta, lo importante es que sobre la base de éstas formulaciones las reglas para el análisis de costo beneficio social de diseños de control de contaminación deben ser desarrolladas.

Una segunda formulación consiste en colocar un límite superior para el nivel de concentración de la contaminación, que puede ser elegido sobre la base del umbral⁶ y si el nivel de contaminación heredado es menor que esta base, el análisis costo beneficio estará dirigido a

6 Se refiere al efecto umbral. Punto de agotamiento en el cual los recursos no pueden ser explotados más, o, en términos de contaminación es el punto en el cual más allá los seres no sobreviven (Dasgupta 1982).

maximizar el sobreproducto social sujeto a que el nivel de contaminación no sobrepase este límite. Por lo tanto el problema del planificador es:

$$\text{Max} \int_0^{\infty} (\Pi(Y_t) - \varepsilon_t) e^{-\rho t} dt - I \quad (8)$$

$$\text{s a : } \dot{S} = h(I)Y_t + \Phi(\varepsilon_t, S_t), \quad S_t \leq S^*$$

$$I, Y_t, \varepsilon_t \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$S_0 \text{ dado}$$

Nótese que ya no hay función de daño social, pues lo relevante es reducir el tamaño de la concentración de la contaminación por debajo el umbral.

III. El problema general: evaluación cualitativa y políticas

La función objetivo (7) plantea, maximizar la suma del valor presente del flujo de excedente social neto. Es importante destacar que la naturaleza de los diseños óptimos depende de las formas funcionales que aparecen en el problema (7) y del nivel inicial de concentración S_0 heredado. Sin una especificación precisa no puede decirse nada acerca de la solución. No obstante, se pueden discutir categorías de solución que emergen bajo diferentes especificaciones.

De acuerdo con Dasgupta se presentan cuatro políticas. La primera política se puede caracterizar por la búsqueda de una producción limitada con un modesto gasto para controlar la contaminación. Esto se traduce en un bajo nivel de emisión. Dado que esta política produce sólo niveles modestos de beneficio, $\Pi(Y_t)$, también significa que un moderado gasto para controlar contaminación es requerido para que haya un bajo daño social $\Psi(S_t)$ por contaminación.

La segunda clase de política consiste en una actividad económica amplia, por cuyos resultados una significativa cantidad es gastada en controlar la contaminación para limitar la concentración de afluentes ; el nivel de contaminación es parecido al de la política anterior. La diferencia es que una es claramente ambientalista, en tanto que la otra es economicista.

La tercera categoría, que ha sido muy cuestionada en las últimas décadas, consiste en un alto nivel de actividad económica simultáneamente con un escaso gasto para controlar la contaminación. Estos programas se implementaron hasta cuando los problemas ambientales adquirieron gran dimensión. Dasgupta sin embargo, señala que la sola forma funcional (7) no dice *apriori* si ésta política es óptima o no ; puesto que lo que la sociedad pierde vía daño social, puede ser compensado con ganancia en términos de producto y bajo gasto en control de contaminación.

La cuarta política propuesta se refiere a una actividad económica muy baja y gasto en control de la contaminación muy bajo. El punto a resaltar es que si el producto es muy bajo hay un excedente social muy pequeño disponible para financiar el diseño de programas de control de otras emisiones muy comunes, que generan grandes daños sociales . En este punto el autor deja abierto un interrogante referente al nivel de la contaminación, pues aunque un nivel de producción muy bajo puede sugerir un nivel insignificante de contaminación industrial, es posible que las sociedades padezcan de otras formas de contaminación que no necesariamente tienen que ser bajas.

IV. Las reglas de costo-beneficio

El problema de planeación (7) abordado por el método general, es decir por control óptimo, es de difícil solución analítica. Este problema es no convexo, de manera que el análisis costo-beneficio como medio de asignación de políticas óptimas puede no ser un procedimiento confiable.

No obstante, la administración de los recursos naturales es frecuentemente un problema de planeación no cóncavo, y por lo tanto se debe tener cuidado al usar el instrumental formal de programación. De acuerdo con lo anterior, se usa un teorema para funciones no cóncavas para caracterizar al problema (7)⁷, en términos de cobros por la emisión; puesto que el teorema de K-T no puede usarse para tal objetivo. Se supone información completa y la existencia de un estado estacionario.

La contaminación es un fenómeno no deseado por lo que es de esperarse que los precios sombra sean negativos (cobros o impuestos sobre la contaminación). Sea $\lambda > 0$ el cobro por emisión. El valor presente descontado del producto es $e^{-\rho t} \Pi(Y_t)$ y el valor presente neto del costo social imputado por este producto es $\lambda h(I) Y_t e^{-\rho t}$. Por lo que el nivel de producción debe ser elegido de modo que maximice $e^{-\rho t} (\Pi(Y_t) - \lambda h(I) Y_t)$. La regla de costo beneficio es:

$$d\Pi(Y_t)/dY_t = \lambda h(I) \quad (10)$$

Esto significa que el beneficio marginal de la producción debe ser igual, en el equilibrio, al costo marginal social imputado de este nivel de producción; específicamente, debe ser proporcional a la relación emisión producto.

La regla del costo de limpieza es simple. El valor descontado del costo es $e^{-\rho t} \epsilon_t$, y el beneficio social neto del gasto es $-e^{-\rho t} \lambda \Phi(\epsilon_t, S_t)$ el valor social de la concentración reducida. Así, el gasto de limpieza debe elegirse de modo que maximice $e^{-\rho t} (-\lambda \Phi(\epsilon_t, S_t) \epsilon_t)$. Esto produce la regla:

$$-\lambda (\partial \Phi(\epsilon_t, S_t) / \partial \epsilon_t) = 1. \quad (11)$$

$$(\partial \Phi(\epsilon_t, S_t) / \partial \epsilon_t) = -\lambda^{-1}$$

7 El teorema se presenta en el anexo al final del artículo.

Esto significa que la asimilación o depreciación, en el equilibrio, disminuye a medida que el gasto de limpieza aumenta, esto es compatible con (4)'; es decir, la depreciación marginal de la contaminación debe ser el inverso, menor que cero, del precio sombra del stock de contaminación S_t . Nótese que a medida que el precio sombra crece sin límite, el gasto de limpieza no tiene efecto sobre la depreciación de la contaminación; esto es:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\partial \Phi(\varepsilon_t, S_t) / \partial \varepsilon_t) = 0$$

Dado que λ es el precio sombra de la contaminación (o cobro por la emisión), es de esperar que cuando la concentración de la contaminación es alta, o se está acumulando indefinidamente, el precio sombra sea también alto, lo que implica que una variación del gasto de limpieza no influye en la tasa de depreciación de la contaminación.

Una inversión es un costo a perpetuidad de pI por período, si P_t es la tasa de emisión, el daño social debido a la producción se valora como $e^{-\rho t} \lambda h(I) Y_t$. El valor presente de la pérdida social debido a I es $e^{-\rho t} (\lambda h(I) Y_t + pI)$ por lo que el objetivo es minimizar ésta pérdida. La regla que determina la inversión óptima en control de la contaminación es:

$$-\lambda Y_t dh(I)/dI = \rho \quad (12)$$

$$dh(I)/dI = -\rho (\lambda Y_t)^{-1}$$

Es claro que las firmas no emprenderán medidas de control de contaminación a menos que se les imponga cobros. Dado que la descarga P_t es proporcional al nivel de producción, si Y_t es grande la descarga también lo es, por lo que en equilibrio si la producción creciera ilimitadamente, la inversión en tecnología I no tendría efecto sobre $h(I)$.

Dasgupta hace notar que la concentración de contaminación es un stock de capital negativo con valor social $-\lambda S_t$. Intuitivamente se observa que la tasa social de descuento de mantener este "activo"⁸ es la suma de

8 Con comillas en el original.

la tasa de cambio del daño social y la depreciación o asimilación de la contaminación. Es decir, el daño social marginal causado a las generaciones futuras (externalidad intergeneracional) más la tasa incrementada a la cual la contaminación desaparece, el diseño óptimo debe ser caracterizado por:

$$\rho = (\Psi_S(S_t)/\lambda) + \Phi_S(\varepsilon_t, S_t) \quad (13)$$

Aunque Dasgupta señala como característica del estado estacionario $\dot{S}=0$, es conveniente definirlo de una manera clara. El estado estacionario es una situación en la cual las variables crecen a una tasa constante (Barro y Sala-I-Martin, 1995), que en este modelo corresponde a una tasa cero. De este modo $\dot{S}=0$, lo que implica :

$$h(I)Y_t = -\Phi(\varepsilon_t, S_t) \quad (14)$$

Si una de las soluciones no existe esto significa que aún en el largo plazo una de las políticas no tiende a un estado estacionario. Pero para efectos de análisis en el modelo se asume que existe una solución. Aunque eventualmente podrían existir múltiples soluciones. Lo anterior implica que, en el largo plazo, las características de un diseño óptimo, estado estacionario al cual converge el diseño o nivel de contaminación, depende del nivel de contaminación con el cual inicia la economía. Se piensa a menudo que si las sociedades o países tienen objetivos y tecnologías similares, también tienen similares metas de largo plazo. La dependencia del nivel inicial de contaminación sugiere que esto no es necesariamente así.

Conclusión

De acuerdo con las formulaciones y alternativas, intuitivamente se observa que el control económico de la contaminación conlleva una inherente disminución del producto. Esto influye profundamente en el bienestar actual en términos de producto y en el del futuro en términos de contaminación. Es innegable que los programas de control deben

adoptarse cuanto antes para intentar disminuir el daño marginal futuro; puesto que no existe razón doctrinaria para dejarle en exclusiva a las fuerzas del mercado cualquier obligación que tenga con las generaciones futuras (Solow 1993).

La política que hasta ahora ha dominado (i.e. alto nivel de producción y bajo nivel de gasto en control) con seguridad ha causado daños. No obstante, es óptima en términos de producto, pero no lo es en términos de bienestar social. Nótese que un gasto proporcional al producto, genera niveles moderados de contaminación. Parece pues que los agentes se enfrentan en el largo plazo a un trade-off parcial entre deterioro ambiental y altas tasas de crecimiento. Esto significa que el crecimiento y la protección ambiental son mutuamente excluyentes. Sin embargo, puede objetarse que no lo son totalmente, pues la protección ambiental demanda inversión en nuevas tecnologías y gastos para disminuir la contaminación y el beneficio de esto se refleja en un mejoramiento del bienestar por vía disminución del daño marginal del ambiente.

Las políticas de bajo crecimiento son contraproducentes para los países, pero en especial para los pobres porque aunado a la industria deficiente está el hecho palpable de extrema pobreza. Para estas naciones crecimiento cero significa caos político y social. Además estos países sufren daño ambiental y contaminación adicional por factores diferentes a la producción, tales como condiciones sanitarias no deseadas, detrimento de la salud, miseria y lo más grave altas tasas de crecimiento de la población.

La idea de convergencia de diseños de planes de control de la contaminación no puede contemplarse de un modo absoluto, pues las sociedades ni tienen las mismas prioridades ni mucho menos la misma tecnología, por tanto no podrán tener las mismas metas de largo plazo. Lo que sucede con la convergencia absoluta entre países en términos de renta per capita es que se da bajo supuestos de idéntica tecnología, parámetros de población, depreciación y homogeneidad de funciones de producción, pero claramente esto no es cierto, por tanto en el largo plazo

los países pobres no tendrán la misma renta de los países ricos. Cuando se hacen éstos supuestos a un lado sólo se puede mirar cada país por separado y observar que su crecimiento depende claramente del stock de capital inicial y entonces cada uno converge a su propio estado estacionario. Igualmente sucede en términos de contaminación, las metas en planes de control serán diferentes porque cada sociedad tiene un stock de contaminación heredado diferente. Cada una busca pues su propio estado estacionario para los niveles de contaminación, determinados por las políticas de control de la contaminación.

Anexo

Teorema: sea $W(x)$ y $G_1(x), G_2(x), \dots, G_m(x)$ funciones definidas en R^n , entonces el problema del planificador es

$$\begin{aligned} & \text{Max. } W(x) \\ & \text{s.a. } \dots G_1(x) \geq 0, G_2(x) \geq 0, \dots, G_m(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

El teorema plantea que: si $\exists x^* \wedge \dots \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ tales que :

$$(i) \quad W(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* G_i(x^*) \geq W(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (G_i(x)) \quad \text{y}$$

(ii) $\lambda_i^* \geq 0 \wedge \lambda_i^* G_i(x^*) = 0, \forall i = 1, \dots, m$ entonces x^* es solución del problema (1); la prueba puede verse en Dasgupta (1982).

Usando el anterior teorema se obtienen las condiciones de optimalidad del problema (7); se puede entonces formular el lagrangiano:

sea

$$f(I, Y_t, \varepsilon_t, S_t) = \Pi(Y_t) - \Psi(S_t) - \varepsilon_t - \rho I - \rho \lambda S_t - \lambda (h(I)Y_t + \Phi(\varepsilon_t, S_t))$$

$$f_y = \Pi_y(Y) - \lambda h(I) = 0 \quad (\text{a})$$

$$f_\varepsilon = -1 - \lambda \Phi_\varepsilon(\varepsilon_t, S_t) = 0 \quad (\text{b})$$

$$f_I = -\rho \lambda Y h(I) = 0 \quad (\text{c})$$

$$f_s = -\Psi(S) - \lambda \rho - \Phi_s(\varepsilon_t, S_t) \quad (\text{d})$$

éstas ecuaciones producen las siguientes reglas:

de (a) $\frac{d\Pi(Y)}{dY} = \lambda h(I)$ que es la ecuación (10)

de (b) $-\lambda \left(\frac{d\Phi}{d\varepsilon}(\varepsilon, S) \right) = 1$ que es la ecuación (11)

de (c) $-\lambda Y \left(\frac{dh(I)}{dI} \right) = \rho$ que es la ecuación (12)

De (d) $\rho = \left(\frac{\Psi_s}{\lambda} \right) + \Phi_s(\varepsilon_t, S_t)$ que es la ecuación (13)

resuelto así el problema, de ningún modo pierde sus características dinámicas, pues lo que se desea es hallar puntos óptimos estacionarios del problema (7).

Referencias

- BARRO, R. y SALA-I-MARTIN, X. *Economic Growth*, Mac Graw Hill, 1995.
- CHIANG, A. *Elements of Dinamic Optimization*, Mac Graw Hill, 1992.
- COMMOM, Michael. *Sustainability and Policy. Limits Economics*, Cambridge University Press, 1995.
- DASGUPTA, P. *The Control of Resources*, Cambridge , Massachusetts, Harvard University Press, 1982.
- ESKELAND, G. y JIMENEZ, E. "Instrumentos de Política para el Control de la Contaminación en los Países en Desarrollo", *Lecturas de Economía*, No. 40, Junio-diciembre 1994.
- KAMIEN, M. y SCHWARTZ, N. *Dinamic Optimization. The calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Nort Holland, 1991.
- KEELER, E. y SPENCE, M. Zeckhauser. "The Optimal Control of Pollution", *Journal of Economic Theory*, Vol 4, 1971, pag 19-34.
- PINDYCK, R. y RUBINFELD, D. *Microeconomics*, Macmillan, 1992.
- SIEBERT, H. *Economics of the Environment, Theory and Policy*. Springer Verlang, 1987.
- SOLOW, R. *Sustainability : An Economist's Perspective*. Economics of the Environment, by Dorfman & Dorfman , 1993. Pag 179-187.
- TIETEMBERG, Tom. *Environmental and Natural Resource Economics*, Harper Collins Publishers, 1992.
- VARIAN, H. *Microeconomía Intermedia*, Antoni Bosch, 1994.