Sesgos en estimación, tamaño y potencia de una prueba sobre el parámetro de memoria larga en modelos ARFIMA

Elkin Castaño, Santiago Gallón y Karoll Gómez

Lecturas de Economía - No. 73. Medellín, julio-diciembre 2010

Lecturas de Economía, 73 (julio-diciembre 2010), pp. 131-148

Elkin Castaño, Santiago Gallón y Karoll Gómez

Sesgos en estimación, tamaño y potencia de una prueba sobre el parámetro de memoria larga en modelos ARFIMA

Resumen: *Castaño* et al. *(2008) proponen una prueba para investigar la existencia de memoria larga, basada en el parámetro de diferenciación fraccional de un modelo ARFIMA* (p, d, q); *se muestra que al usar una aproximación autorregresiva de orden igual al entero más próximo a* $p^* = T^{1/3}$ *para la componente de memoria corta, la prueba de la hipótesis nula de memoria corta contra la alternativa de memoria larga tiene, en general, mayor potencia que algunas otras pruebas conservando un tamaño adecuado. Este estudio muestra los sesgos generados en la estimación del parámetro* **d** *y su efecto sobre la potencia y tamaño de la prueba, cuando se ignora la componente de corto plazo y cuando se emplean modelos que no la aproximan adecuadamente. Adicionalmente, se analiza si los resultados obtenidos por Castaño* et al. *(2008) pueden mejorarse empleando una aproximación autorregresiva diferente.*

Palabras clave: *Prueba de hipótesis, modelos de series de tiempo. Clasificación JEL: C12, C22.*

Estimation Biases, Size and Power of a Test on the Long Memory Parameter in ARFIMA Models

Abstract: *Castaño* et al. *(2008) proposed a test to investigate the existence of long memory based on the fractional differencing parameter of an ARFIMA* (p, d, q) *model. They showed that using an autoregressive approximation with order equal to the nearest integer of* $p^* = T^{1/3}$ *for the short-term component of this model, the test for the short memory null hypothesis against the long memory alternative hypothesis has greater power than other long memory tests, and also has an adequate size. We studied the estimation bias generated on* **d***, and the effect on the power and size of the test when the short-term component is ignored and when the used models do not approximate it adequately. Additionally we analyze whether the obtained results by Castaño* et al. *(2008) can be improved employing a different autoregressive approximation.*

Keywords: *Hypothesis testing, time-series models. JEL Classification: C12, C22.*

Biais d'estimation, taille et puissance d'un test sur le paramètre à mémoire longue pour les modèles ARFIMA

Résumé : *Castaño* et al *(2008) proposent un test sur l'existence de mémoire longue sur la base d'un paramètre de différenciation fractionnel dans un modèle ARFIMA* (p, d, q). *Ils montrent que l'utilisation d'un rapprochement autorégressif d'ordre égal au chiffre plus proche à* $p^* = T^{1/3}$ *associé à la composante à mémoire courte, permet que le test concernant l'hypothèse nulle à mémoire courte par rapport à celle associée à mémoire longue ait une plus grande puissance par rapport à d'autre test, tout en conservant une taille adéquate. Cette étude montre les biais produites dans l'estimation du paramètre* **d** *et son effet sur la puissance et la taille du test lorsqu'on ignore la composante à court terme et lorsqu'on emploi des modèles où celle-ci n'est pas rapprochée de manière adéquate. Finalement, nous cherchons savoir si les résultats obtenus par Castaño* et al *(2008) peuvent-ils être améliorés par un rapprochement autorégressif différent.*

Mots clé : *Test d'hypothèse, modèles de séries temporelles. Classification JEL : C12, C22.*

Lecturas de Economía, 73 (julio-diciembre), pp. 131-148. © Universidad de Antioquia, 2010

Sesgos en estimación, tamaño y potencia de una prueba sobre el parámetro de memoria larga en modelos ARFIMA

Elkin Castaño, Santiago Gallón y Karoll Gómez*

–Introducción. –I. Estudio de los sesgos en la estimación de d, de la potencia y el tamaño de la prueba. –Conclusiones. –Referencias.

Primera versión recibida en marzo de 2010; versión final aceptada en septiembre de 2010

Introducción

En el análisis de las propiedades dinámicas de una serie de tiempo es común encontrar que su función de autocorrelación $\rho(k)$ muestra un patrón de decaimiento hiperbólico. Este comportamiento, hallado en datos económicos, financieros, hidrológicos y físicos entre otros, exhibe un patrón de decaimiento intermedio entre el decrecimiento exponencial, característico de los procesos ARMA estacionarios, y la persistencia extrema mostrada por los procesos ARIMA. Esta propiedad de dependencia entre observaciones distantes en el tiempo se conoce como memoria larga y se caracteriza porque su función de

* *Elkin Castaño Vélez:* Profesor asociado - Profesor titular, Escuela de Estadística de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia y Grupo de Econometría Aplicada de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Antioquia. Dirección postal: Universidad Nacional Sede Medellín, calle 59A No. 63-20, oficina 43-216. Dirección electrónica: elkincv@gmail.com. *Santiago Alejandro Gallón Gómez:* Profesor asistente, Departamento de Matemáticas y Estadística, y Grupo de Econometría Aplicada, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Antioqua, calle 67 No. 53-108, bloque 13. Medellín 050010, Colombia. Dirección electrónica: santiagog@udea.edu.co. *Karoll Gómez Portilla:* Profesor auxiliar, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Humanas y Económicas, Universidad Nacional de Colombia, y Grupo de Econometría Aplicada de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Antioqua. Dirección postal: Universidad Nacional Sede Medellín, calle 59A No. 63-20, bloque 46. Dirección electrónica: kgomezp@unal.edu.co

autocorrelación no es absolutamente sumable y decrece hiperbólicamente, es decir, $\rho(k) \approx Ck^{2d-1}$ cuando $k \to \infty$ donde $C \neq 0$ y $0 < d < 0.5$ (Hosking, 1981)[1].

Para capturar esta clase de dependencia asociada a un proceso estocástico $\{Z_t\}$, Granger (1980), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981), introducen la clase de procesos denominados Fraccionalmente Integrados Autorregresivos de Medias Móviles −ARFIMA (p,d,q) − los cuales son representados como:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B)a_t,\ t = 1,\ldots,T \tag{1}$$

donde $(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(-B)^k$ es llamado el operador de diferencia fraccional, con $\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$, $d \in \mathbb{R}$ y $\Gamma(z)$ denota la función gama; y $\theta_q(B) = 1-\theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$ son polinomios autorregresivos y de medias móviles de grados p y q en el operador rezago B, respectivamente, con todas sus raíces por fupel círculo de unidad y sin raíces comunes; y $\{a_t\}$ es un proceso ruido blanco con media cero y varianza finita σ_a^2. El proceso es estacionario si $d < 0{,}5$ e invertible si $d > -0{,}5$ (véase Hosking, 1981).

En el modelo ARFIMA d representa el parámetro de memoria del proceso, el cual determina el comportamiento de largo plazo de $\{Z_t\}$. Si $d > 0$ el proceso es de memoria larga, mientras si $d < 0$ el proceso es de memoria intermedia (Brockwell y Davis, 2006). Los polinomios $\phi_p(B)$ y $\theta_q(B)$ definen la estructura de la componente de memoria corta del proceso.

Desde la década de 1950 ha habido un interés por probar la existencia de larga memoria usando el enfoque del dominio de la frecuencia y aproximaciones paramétricas y semi-paramétricas[2]. Entre los métodos más populares en la literatura se encuentran: El estadístico de rango reescalado −R/S− de Hurst (1951), la prueba GPH de Geweke y Porter-Hudak (1983), el estadístico de rango reescalado modificado de Lo (1991), la prueba KPSS de Kwiatkowski *et al.* (1992), las pruebas de multiplicadores de lagrange −LM− de Robinson (1994), Lobato y Robinson (1998), Tanaka (1999), y la prueba HML de Harris *et al.* (2008).

1 Para otras definiciones alternativas de las propiedades de un proceso de larga memoria véase Beran (1994), Baillie (1996), and Brockwell and Davis (2006).

2 Las aproximaciones semi-paramétricas y no paramétricas pueden resultar ventajosas cuando se tienen modelos mal especificados, ya que a través de éstas se puede evitar la modelación del componente de corto plazo (Hauser, 1997).

Trabajos como los de Beran (1994), Baillie (1996), Hauser (1997), y Castaño *et al.* (2008) ofrecen una descripción de estas técnicas.

Castaño *et al.* (2008) proponen una prueba para investigar la existencia de larga memoria basada en una aproximación autorregresiva finita del componente de corto plazo de un modelo ARFIMA (p,d,q) estacionario e invertible. Especificando el modelo (1) alternativamente como:

$$(1-B)^d \pi(B) Z_t = a_t \tag{2}$$

donde $\pi(B) = \theta_q^{-1}(B)\phi_p(B) = 1-\pi_1 B-\pi_2 B^2 - \cdots$, es la componente dual autorregresiva infinita del modelo de corto plazo ARMA (p,q) del modelo ARFIMA (p,d,q), los autores proponen realizar la prueba de memoria corta ($d=0$) contra la alternativa de memoria larga ($d>0$) aproximando el polinonio infinito $\pi(B)$ por medio de un polinomio autorregresivo finito $\pi^*(B)$ donde $\pi^*(B)=1-\pi_1^* B-\pi_2^* B^2 - \cdots - \pi_{p^*}^* B^{p^*}$ para un orden adecuado de p^*. La prueba se lleva a cabo realizando estimación de máxima verosimilitud en el modelo aproximado ARFIMA $(p^*,d,0)$

$$(1-B)^d \pi^*(B) Z_t = a_t \tag{3}$$

Así, basados en esta aproximación, el estadístico para pobrar la hipótesis nula de corta memoria $H_0: d=0$, contra la alternativa de memoria larga, $H_1: d>0$, está dado por:

$$t_d = \frac{\hat{d}}{se(\hat{d})} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{4}$$

donde $\hat{d}$ es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro d (Sowell, 1992), y $se(\hat{d})$ corresponde a su error estandár, obtenidas de la estimación del modelo (3).

Castaño *et al.* (2008) mostraron que usando una aproximación autorregresiva dada por el entero más próximo a $p^* = T^{1/3}$ (véase Said y Dickey, 1984, para una aproximación autorregresiva en modelos ARIMA), la prueba mantiene en general un tamaño promedio adecuado y una potencia mayor que las pruebas anteriormente mencionadas. Sin embargo, algunos autores, como Hauser (1997), han señalado que cuando la componente de corto plazo es ignorada[3], o cuando el modelo usado no es aproximado adecuadamente, la estimación del parámetro de

3 Las aproximaciones semi-paramétricas y no paramétricas pueden resultar ventajosas cuando se tienen modelos mal especificados, ya que a través de éstas se puede evitar la modelación del componente de corto plazo (Hauser, 1997).

memoria larga, d, genera sesgos que afectan las propiedades en muestras finitas de las pruebas.

A través de un experimento de simulación Monte Carlo, en este documento se presentan los sesgos en la estimación de d, el tamaño y la potencia de la prueba considerando diferentes aproximaciones autorregresivas de p^*. De esta manera se analiza si los resultados obtenidos por Castaño *et al*. (2008) pueden ser mejorados empleando una aproximación diferente. Los resultados muestran que es posible mantener los sesgos bajos y mejorar la potencia de la prueba manteniendo un tamaño adecuado de la prueba, usando una aproximación autorregresiva de orden menor.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección se reportan los resultados del experimento de simulación Monte Carlo y se analizan el sesgo en la estimación del parametro d así como también el comportamiento de la prueba en términos de la potencia y el tamaño cuando se usan diferentes aproximaciones autorregresivas. Finalmente, se presentan las conclusiones.

I. Estudio de los sesgos en la estimación de d, de la potencia y el tamaño de la prueba

A. Simulación Monte Carlo

Las propiedades en muestras finitas fueron evaluadas a través de un experimento Monte Carlo. El proceso generador de los datos para las simulaciones está basado en la siguiente especificación de un modelo ARFIMA $(1,d,1)$

$$(1-\phi B)(1-B)^d Z_t = (1-\theta B)a_t \tag{5}$$

con $a_t \sim N(0,1)$. Los valores considerados para los parámetros autorregresivos y de medias móviles fueron: $\phi = 0; 0{,}5; 0{,}9; \theta = \pm\ 0{,}8; \pm 0{,}4; 0$, y para el parámetro de larga memoria se consideró $d = 0,\ 0.2,\ 0.4$. El experimento de simulación fue realizado empleando 5.000 repeticiones para cada modelo y usando el paquete TSM 4.24 bajo el lenguaje computacional Ox (Davidson, 2007). El nivel de significancia asumido en las pruebas fue de $\alpha = 0{,}05$.

Un modelo ARFIMA puede depender significativamente de la influencia de observaciones remotas. Si esta clase de procesos son simulados haciendo que los shocks pre-muestrales sean cero, las distibuciones de los estimadores y los estadísticos de prueba pueden cambiar aún en muestras grandes. Esto significa que los tamaños de las pre-muestras puedan ser excesivamente grandes. Para evitar este inconveniente, Davidson y Hashimzade (2009) proponen agregar un vector de números aleatorios Gaussianos con la correcta estructura de covarianza. Este método se encuentra implementado en el paquete TSM.

B. Resultados en muestras finitas

A continuación se presenta el análisis de los resultados obtenidos para el parámetro de diferenciación fraccional *d*, derivados del experimento de simulación de los modelos anteriores usando aproximaciones autorregresivas para la componente de corto plazo y usando realizaciones de tamaño 500 y 1.000; cuando $T = 500$ se usó un orden máximo autorregresivo de 8 y para $T = 1000$ se usó un orden máximo autorregresivo de 10. Para el análisis se distinguirán 4 casos: i) el verdadero modelo es ruido blanco ARFIMA, ii) el proceso es ARFIMA $(1, d, 0)$, iii) el proceso es ARFIMA $(0, d, 1)$, y *iv*) el proceso es ARFIMA $(1, d, 1)$.

1. El verdadero modelo es ruido blanco fraccional, ARFIMA(0, d, 0)

Las tablas 1 y 2 presentan, para diferentes aproximaciones autorregresivas (AR), los resultados del sesgo promedio (Sesgo), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), la potencia y el tamaño de la prueba cuando el modelo verdadero es un proceso de ruido blanco fraccional ARFIMA $(0, d, 0)$ para tamaños muestrales de 500 y 1000 observaciones, respectivamente.

Tabla 1. *Sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(0, d, 0) y T=5*

		$d=0{,}2$			$d=0{,}4$		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	-0,001	0,039	1,000	0,009	0,039	1,000	0,043
1	-0,015	0,733	0,916	0,007	0,087	0,996	0,042
2	-0,031	1,574	0,768	0,002	0,122	0,979	0,035
3	-0,043	2,146	0,644	0,002	0,134	0,958	0,038
4	-0,051	2,543	0,567	0,002	0,156	0,929	0,039
5	-0,072	3,603	0,504	-0,008	0,175	0,892	0,042
6	-0,085	4,243	0,466	-0,004	0,190	0,876	0,052
7	-0,097	4,853	0,418	-0,013	0,209	0,833	0,046
8	-0,105	5,250	0,396	-0,018	0,224	0,815	0,044

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. *Sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(0, d, 0) y T=1000*

		$d=0{,}2$			$d=0{,}4$		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	-0,001	0,059	1,000	0,006	0,027	1,000	0,038
1	-0,004	0,220	0,995	0,010	0,042	1,000	0,038
2	-0,013	0,634	0,943	0,010	0,058	0,998	0,037
3	-0,015	0,767	0,872	0,009	0,074	0,996	0,040
4	-0,022	1,087	0,806	0,010	0,085	0,990	0,040
5	-0,034	1,700	0,730	0,009	0,098	0,981	0,038
6	-0,041	2,050	0,659	0,013	0,105	0,973	0,042
7	-0,050	2,490	0,616	0,005	0,124	0,946	0,052
8	-0,054	2,691	0,562	-0,001	0,142	0,936	0,045
9	-0,060	3,023	0,538	-0,003	0,156	0,916	0,044
10	-0,068	3,420	0,500	0,000	0,155	0,913	0,045

Fuente: Elaboración propia.

De los resultados anteriores podemos concluir que cuando el modelo estimado es el verdadero, ARFIMA $(0,d,0)$, para todos los tamaños muestrales y valores de d analizados, la prueba obtiene máxima potencia de 1 y un tamaño adecuado (0,043 y 0,038, respectivamente). Sin embargo, este conocimiento no se tiene en las aplicaciones empíricas y en la prueba de memoria larga, se trata de aproximar la componente desconocida de memoria de corto plazo por medio de un proceso autorregresivo. De las tablas anteriores también se observa lo siguiente:

- A medida que se sobreparametriza el modelo, la potencia cae. Esta caída es más severa cuando d = 0,2. Sin embargo, comparada con las potencias de otras pruebas encontradas en la literatura (véase Castaño *et al*., 2008), la potencia generalmente es mayor, aún en el caso de una aproximación autorregresiva de orden alto.
- Cuando crece el tamaño muestral crece la potencia.
- El tamaño de la prueba siempre se conserva adecuado para cualquier aproximación AR usada y cualquiera de los tamaños muestrales.
- En todos los casos el sesgo promedio es bajo y no significativo. A medida que T aumenta el sesgo tiende a decrecer. A medida que el orden autorregresivo

aumenta, la magnitud del sesgo tiende a crecer al igual que la RECM. La magnitud del sesgo es mayor cuando d es pequeño al igual que la RECM.

Resumiendo, cuando el proceso es un ruido blanco fraccional, la aproximación de la componente de corto plazo por medio de un proceso autorregresivo proporciona potencias que en general son mejores que las obtenidas por otras pruebas encontradas en la literatura. En cuanto al tamaño de la prueba, éste se conserva adecuado para cualquier aproximación AR y tamaño muestral. Sin embargo, cuando d es pequeño para aproximaciones autorregresivas altas, la potencia de la prueba y el sesgo se ven más afectados que para el caso de valores grandes de d. La recomendación de un orden autorregresivo de $T^{1/3}$ parece ser demasiado alto, especialmente para valores pequeños de d.

2. El verdadero modelo es ARFIMA(1, d, 0)

Las tablas 3 y 4 presentan, para diferentes aproximaciones autorregresivas, los resultados sobre la magnitud del sesgo promedio (es decir, el promedio del valor absoluto del sesgo), la raíz cuadrada del error cuadrático medio, la potencia promedia y el tamaño promedio de la prueba cuando el modelo verdadero es un ARFIMA$(1,d,0)$, para tamaños muestrales de 500 y 1000 observaciones, respectivamente.

Tabla 3. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(1, d, 0), n=500*

		d = 0,2			d = 0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,643	32,132	1,000	0,285	0,298	0,995	1,000
1	0,078	3,886	**0,758**	0,071	0,149	0,920	0,106
2	0,062	3,082	0,485	0,055	0,171	0,923	0,097
3	0,038	1,888	0,409	0,038	0,169	0,908	0,074
4	0,071	3,560	0,362	0,030	0,179	0,891	0,072
5	0,094	4,644	0,323	0,044	0,189	0,876	0,070
6	0,098	4,829	0,327	0,050	0,214	0,864	0,068
7	0,094	4,646	0,308	0,070	0,238	0,834	0,061
8	0,099	4,868	0,295	0,077	0,254	0,818	0,069

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(1, d, 0), T=1000*

		d = 0,2			d = 0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,644	32,202	1,000	0,643	0,644	1,000	1,000
1	0,057	2,866	**0,885**	0,059	0,174	**0,987**	**0,113**
2	0,028	1,393	0,678	0,022	0,134	0,969	0,067
3	0,023	1,138	0,558	0,019	0,166	0,852	0,066
4	0,046	2,306	0,497	0,039	0,192	0,794	0,052
5	0,063	3,096	0,466	0,054	0,218	0,753	0,060
6	0,068	3,359	0,447	0,057	0,222	0,740	0,057
7	0,068	3,339	0,434	0,054	0,223	0,735	0,054
8	0,074	3,615	0,400	0,060	0,236	0,721	0,050
9	0,078	3,810	0,393	0,061	0,239	0,720	0,063
10	0,076	3,723	0,379	0,064	0,247	0,710	0,056

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que cuando el modelo estimado es el verdadero ARFIMA $(1, d, 0)$, se obtiene una gran potencia y un tamaño adecuado (ver números en negrilla en las tablas 3 y 4). Sin embargo, como se mencionó anteriormente este conocimiento no se tiene en las aplicaciones reales y en la prueba de memoria larga se trata de aproximar la desconocida componente de memoria de corto plazo por medio de un proceso autorregresivo. De las tablas se puede observar lo siguiente:

a. Cuando se ignora la componente de corto plazo (se usa un modelo sub-parametrizado)
   - Cuando se ignora la componente de corto plazo, si el proceso es de memoria larga, la prueba generalmente conduce al rechazo de H_0. La potencia es de 1 en todos los casos. Pero si en el proceso no hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo la prueba conduce a rechazar incorrectamente a H_0. Es decir, la prueba tiende a señalar la existencia de memoria larga cuando realmente no existe. El tamaño promedio de la prueba es de 1.
   - Además, si en el modelo hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo, se presenta la mayor magnitud del sesgo promedio en la estimación del parámetro d. Lo mismo ocurre con la RECM.

b. Cuando se usa un modelo sobreparametrizado

- A medida que se sobreparametriza el modelo, la potencia cae. Sin embargo, este efecto es más fuerte cuando d es pequeño. Para el caso de d grande, la potencia se mantiene alta aún con aproximaciones autorregresivas de orden alto.
- Cuando T aumenta, la potencia no necesariamente crece, lo cual es una consecuencia del uso de modelos sobreparametrizados. Sin embargo, las potencias se mantienen altas comparadas con otras pruebas encontradas en la literatura.
- A medida que aumenta T el sesgo tiende a decrecer. La magnitud del sesgo tiende a ser mayor cuando d es pequeño.
- Para órdenes autorregresivos entre 1 y 4, la magnitud del sesgo tiende a ser más baja. Lo mismo sucede con la RECM.
- El tamaño de la prueba siempre se conserva adecuado para cualquier aproximación AR usada.

En resumen, aunque el proceso ARFIMA posea una componente de corto plazo AR(1) la inclusión de una componente autorregresiva de orden mayor que 1 para realizar la prueba de memoria larga, proporciona pruebas con bajos sesgos cuando el orden de la componente autorregresiva se encuentra entre 1 y 4. En estos casos, las potencias son altas, al tiempo que el tamaño de la prueba es adecuado. Cuando se ignora la componente de corto plazo y el proceso no tiene memoria larga, la prueba tiende a reconocer una falsa memoria larga.

Se observa también que la potencia y el sesgo se deterioran más para órdenes autorregresivos altos cuando d es pequeño. Para este caso, la propuesta de usar un orden autorregresivo igual al entero más próximo a $T^{1/3}$ parece que puede ser mejorada con un orden menor.

3. El verdadero modelo es ARFIMA(0, d, 1)

En las tablas 5 y 6 se presentan, para diferentes aproximaciones AR, los resultados sobre la magnitud del sesgo promedio, la raíz cuadrada del error cuadrático medio, la potencia promedia y el tamaño promedio de la prueba cuando el modelo verdadero es un ARFIMA $(0, d, 1)$, para tamaños muestrales de 500 y 1000 observaciones, respectivamente.

Tabla 5. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(0, d, 1), T=500*

		d = 0,2			d = 0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,356	17,997	0,516	0,269	0,281	0,949	0,500
1	0,111	5,533	0,663	0,071	0,108	0,976	0,001
2	0,175	8,752	0,752	0,080	0,099	0,988	0,231
3	0,071	3,547	0,602	0,035	0,139	0,951	0,012
4	0,098	4,875	0,680	0,049	0,193	0,943	0,103
5	0,075	3,751	0,532	0,043	0,220	0,882	0,021
6	0,060	3,019	0,579	0,037	0,255	0,869	0,059
7	0,097	4,854	0,484	0,052	0,283	0,804	0,023
8	0,078	3,897	0,495	0,040	0,303	0,799	0,044

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(0, d, 1), T=1000*

		d = 0,2			d = 0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,351	17,554	0,503	0,275	0,283	0,953	0,500
1	0,153	7,656	0,669	0,079	0,102	0,983	0,001
2	0,164	8,208	0,730	0,090	0,126	0,995	0,287
3	0,098	4,894	0,637	0,030	0,090	0,994	0,010
4	0,106	5,310	0,659	0,044	0,131	0,990	0,172
5	0,088	4,417	0,535	0,028	0,141	0,970	0,020
6	0,091	4,569	0,591	0,037	0,168	0,964	0,071
7	0,093	4,660	0,507	0,035	0,193	0,923	0,022
8	0,087	4,352	0,543	0,024	0,211	0,920	0,050
9	0,111	5,530	0,469	0,040	0,236	0,873	0,028
10	0,107	5,369	0,487	0,037	0,247	0,870	0,042

Fuente: Elaboración propia.

Dada la naturaleza MA de la componente de corto plazo del proceso, la prueba propuesta nunca utilizará el modelo verdadero, pero la idea es tratar de aproximarlo por medio de un proceso AR de un orden adecuado. De los resultados anteriores se puede observar lo siguiente:

a. Cuando se ignora la componente de corto plazo:

- Si en el proceso hay memoria larga, la prueba generalmente conduce correctamente al rechazo de H_0. Pero si en el modelo no hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo la prueba conduce incorrectamente al rechazo de H_0 con más frecuencia de la esperada. Es decir, la prueba tiende a señalar frecuentemente la existencia de memoria larga cuando realmente no existe. El tamaño promedio de la prueba es 0,5.
- Si en el proceso hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo, la magnitud del sesgo promedio del estimador es máxima. Lo mismo sucede con la RECM.

b. Cuando se aproxima la componente de medias móviles por medio de un proceso autorregresivo:

- A medida que aumenta el orden de la aproximación autorregresiva la potencia cae y su efecto es mayor cuando *d* es pequeño. Cuando el tamaño muestral aumenta, la potencia crece.
- El tamaño promedio es adecuado para una aproximación de orden mayor que 2.
- Para una aproximación autorregresiva de alto orden, la magnitud del sesgo promedio puede llegar a ser relativamente grande para valores bajos de *d*, al igual que para la RECM.
- Para órdenes autorregresivos mayores que 4, la magnitud del sesgo promedio es baja y estable, al igual que para la RECM.

Resumiendo, si el proceso ARFIMA contiene una componente de corto plazo MA(1), su aproximación por medio de una aproximación autorregresiva de orden mayor que 4 proporciona pruebas con potencias que en general son más altas que las obtenidas por otras pruebas encontradas en la literatura, manteniendo un tamaño promedio adecuado. Además, la magnitud promedio del sesgo de estimación es baja y estable. Sin embargo, se observa que la potencia y el sesgo se deterioran más cuando *d* es pequeño.

Por otro lado, si se ignora la componente de corto plazo y el proceso no tiene memoria larga, la prueba tiende a reconocer una falsa memoria larga. De nuevo la propuesta de usar un orden autorregresivo igual a la parte entera de $T^{1/3}$ parece que puede ser mejorada con un orden menor.

4. El verdadero modelo es ARFIMA(1, d, 1)

En las tablas 7 y 8 se presentan, para diferentes órdenes AR, los resultados sobre la magnitud del sesgo promedio, la raíz cuadrada del error cuadrático medio, la potencia promedia y el tamaño promedio de la prueba cuando el modelo verdadero es un ARFIMA $(1, d, 1)$, para tamaños muestrales de 500 y 1000 observaciones, respectivamente.

Como en el caso anterior, dada la naturaleza mixta AR y MA de la componente de corto plazo del proceso, la prueba nunca utilizará el modelo verdadero, pero de nuevo la idea es tratar de aproximarlo con un proceso AR de orden adecuado. De los resultados se observa lo siguiente:

Cuando se ignora la componente de corto plazo

- Si en el proceso hay memoria larga, la prueba generalmente conduce al rechazo de H_0, con una potencia alta. Pero si en el modelo no hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo o al utilizar un modelo AR que la sub-especifique, la prueba conduce incorrectamente al rechazo de H_0 con más frecuencia de la esperada.
- Si en el modelo no hay memoria larga, al ignorar la componente de corto plazo, la magnitud del sesgo promedio del estimador es máxima y declina a medida que crece el orden de modelo autorregresivo con el cual se aproxima la verdadera componente de corto plazo.
- Si en el proceso hay memoria larga, la potencia promedio es alta, aunque cae a medida que el orden autorregresivo crece, sobre todo cuando d es pequeño.
- El tamaño promedio llega a ser aceptable a partir de una aproximación autorregresiva de orden mayor o igual que 5.
- A medida que el orden de la aproximación autorregresiva crece, la magnitud del sesgo promedio decrece. Cuando el valor de d es pequeño, los sesgos en su estimación tienden a ser mayores. Esto mismo sucede para la RECM.

En conclusión, si el proceso es ARFIMA con componente de corto plazo ARMA(1,1), su aproximación por medio de una componente autorregresiva de orden mayor o igual a 5, produce pruebas con potencias altas y el tamaño se

Tabla 7. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(1, d, 1), T=500*

		d=0,2			d=0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,641	32,039	0,882	0,631	0,636	0,999	0,759
1	0,321	16,027	0,847	0,325	0,365	0,970	0,697
2	0,263	13,141	0,708	0,267	0,357	0,941	0,511
3	0,128	6,406	0,607	0,123	0,234	0,895	0,257
4	0,122	6,100	0,524	0,110	0,279	0,819	0,243
5	0,086	4,267	0,451	0,074	0,253	0,763	0,121
6	0,094	4,686	0,420	0,076	0,286	0,730	0,131
7	0,083	4,123	0,378	0,064	0,286	0,681	0,078
8	0,081	4,031	0,364	0,052	0,306	0,674	0,095

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. *Magnitud del sesgo promedio, raíz cuadrada del error cuadrático medio, potencia y tamaño de la prueba para un ARFIMA(1, d, 1), T=1.000*

		d=0,2			d=0,4		
AR	Sesgo	RECM	Potencia	Sesgo	RECM	Potencia	Tamaño
0	0,642	32,097	0,882	0,621	0,624	1,000	0,868
1	0,327	16,341	0,855	0,311	0,338	0,977	0,638
2	0,268	13,390	0,789	0,237	0,318	0,948	0,522
3	0,126	6,278	0,714	0,114	0,199	0,936	0,292
4	0,122	6,122	0,667	0,122	0,223	0,900	0,263
5	0,074	3,708	0,596	0,075	0,193	0,874	0,167
6	0,076	3,799	0,585	0,080	0,210	0,847	0,144
7	0,058	2,857	0,503	0,057	0,201	0,810	0,082
8	0,058	3,500	0,511	0,054	0,214	0,797	0,091
9	0,062	3,088	0,453	0,056	0,222	0,769	0,053
10	0,055	2,704	0,469	0,048	0,235	0,764	0,057

Fuente: Elaboración propia.

conserva adecuado. Si se ignora la componente de corto plazo o la aproximación AR, es inadecuada y el proceso no tiene memoria larga. La prueba tiende a reconocer una falsa memoria larga. Sin embargo, a medida que el orden AR crece, la potencia se ve afectada, sobre todo cuando *d* es pequeño. De nuevo parece que un orden menor a $T^{1/3}$ propuesto, parece producir pruebas con mayores potencias, tamaños adecuados y sesgos bajos.

Conclusiones

Este documento presenta un estudio donde se muestran los sesgos que se generan en la estimación del parámetro *d* y su efecto sobre la potencia y tamaño de la prueba cuando se ignora la componente de corto plazo y cuando se emplean modelos que no la aproximen adecuadamente. Del análisis realizado y basados en los parámetros definidos en la simulación podemos concluir lo siguiente:

- Si se ignora la componente de corto plazo y en el proceso no hay memoria larga, la prueba conduce muy frecuentemente al rechazo de H_0. Es decir, tiende a señalar la existencia de memoria larga cuando no existe.
- Al aumentar el orden de la aproximación autorregresiva la potencia cae y este efecto es más fuerte cuando el parámetro *d* es pequeño. Cuando se eleva el tamaño de la muestra la potencia tiende a aumentar.
- En cuanto al sesgo, si el proceso es ruido blanco fraccional, a medida que aumenta el orden de la componente autorregresiva, el sesgo promedio tiende a crecer y su efecto es más fuerte para valores pequeños de *d.* Si el proceso de corto plazo es un AR(1), la magnitud del sesgo tiende a bajar para aproximaciones autorregresivas entre 1 y 4 aproximadamente. Para aproximaciones mayores, el sesgo tiende a crecer. Si el proceso de corto plazo es una MA(1), la magnitud del sesgo es baja y estable a partir de un orden autorregresivo 3. Si el proceso de corto plazo es un ARMA(1,1), la magnitud del sesgo es baja a partir de a partir de un orden autorregresivo de 3.
- Para el tamaño de la prueba, si el proceso es ruido blanco fraccional, bajo las aproximaciones autorregresivas examinadas, el tamaño de la prueba se preserva cercano al nivel de significancia asumido. Si el proceso de corto plazo es un AR(1), para aproximaciones autorregresivas de orden mayor o igual que 1, el tamaño de la prueba también se preserva. Cuando el proceso de corto plazo es una MA(1), a partir de un orden autorregresivo de 3, el tamaño es aceptable. Si el proceso de corto plazo es un ARMA(1,1), el tamaño de la prueba es aceptable para un orden autorregresivo mayor que 4.

- Los resultados muestran que la recomendación de usar un aproximación aurorregresiva de orden $p^* = T^{1/3}$ funciona bien, pero proporciona potencias que, aunque son altas comparadas con las potencias reportadas por otros métodos encontrados en la literatura, pueden ser mejoradas. Un compromiso con una aproximación AR de orden menor que $T^{1/3}$ parece mejorar la potencia de la prueba sin aumentar significativamente los sesgos ni deteriorar su tamaño. A la luz de los resultados obtenidos, una aproximación alternativa, dada por el entero más cercano a $T^{1/4}$ podría mejorar el comportamiento de la prueba.

Referencias

BAILLIE, Richard (1996). "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics," *Journal of Econometrics*, No. 73, pp. 5-59.

BERAN, Jan (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall/CRC, New York.

BROCKWELL, Peter y DAVIS, Richard (2006). *Time Series: Theory and Methods*. Second Edition, Springer-Verlag, New York.

CASTAÑO, Elkin; GÓMEZ, Karroll y GALLÓN, Santiago (2008). "Una nueva prueba para el parámetro de diferenciación fracional", *Revista Colombiana de Estadística*, No. 31, pp. 67-84.

DAVISON, James (2007). *Time Series Modelling,* Version 4.24, at http://www.timeseriesmodelling.com.

DAVIDSON, James y HASHIMZADE, Nigar (2009). "Type I and type II Fractional Brownian Motion: A Reconsideration", *Computational Statistics and Data Analysis*, No. 53, pp. 2089-2106.

GEWEKE, John y PORTER-HUDAK, Susan (1983). "The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models", *Journal of Time Series Analysis*, No. 4, pp. 221-238.

GRANGER, William (1980). "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models", *Journal of Econometrics*, No. 14, pp. 227-238.

GRANGER, William y JOYEUX, Roseline (1980). "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *Journal of Time Series Analysis*, No. 1, pp. 15-39.

HARRIS, David; MCCABE, Brendan y LEYBOURNE, Stephen (2008). "Testing for Long Memory," forthcoming in *Econometric Theory*, No. 24, pp. 143-175.

HAUSER, Michael (1997). "Semiparametric and Nonparametric Testing for Long Memory: A Monte Carlo Study," *Empirical Economics*, No. 22, pp. 247-271.

HOSKING, Jonathan (1981). "Fractional Differencing", *Biometrika*, No. 68, pp. 165-176.

HURST, Harold (1951). "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, No. 116, pp. 770-799.

KWIATKOWSKI, DENIS; PHILLIPS, Peter; SCHMIDT, Peter y SHIN, Yongcheol (1992). "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series Have a Unit Root?", *Journal of Econometrics*, No. 54, pp. 159-178.

LO, Andrew (1991). Long-term Memory in Stock Market Prices, *Econometrica*, No. 59, pp. 1279-1313.

LOBATO, Ignacio y ROBINSON, Peter (1998). "A Nonparametric Test for I(0)", *Review of Economic Studies*, No. 65, pp. 475-495.

ROBINSON, Peter (1994). "Semiparametric Analysis of Long-Memory Time Series", *Annals of Statistics*, No. 22, pp. 515-539.

SAID, Said y DICKEY, David (1984). "Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order", *Biometrika*, No. 71, pp. 599-607.

SOWELL, Fallaw (1992). "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models", *Journal of Econometrics*, No. 53, pp. 165-188.

TANAKA, Katsuto (1999). "The Nonstationary Fractional Unit Root", *Econometric Theory*, No. 15, pp. 549-582.