

SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA LA PREDICCIÓN DEL FLUJO DE FERROFLUIDO GENERADO POR UN CAMPO MAGNÉTICO ROTANDO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS

Victor A. Peña C^{1}, Arlex Chaves G², David Fuentes D²*

1: Estudiante de maestría, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia

2: Profesor, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia

* Contacto: victorpc72@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis realizado para obtener la solución asintótica para el flujo de un ferrofluido inducido por un Campo Magnético rotando y confinado entre dos placas paralelas infinitamente largas y que tiene en cuenta el efecto de difusión del momento angular interno de las partículas hacia el fluido. Los perfiles de velocidad traslacional y de velocidad angular de las partículas obtenidos, fueron comparados con los análisis hechos por Zahn y Greer, y Rinaldi y Zahn. Nuestros resultados concuerdan mayormente con los obtenidos por Zahn y Greer. Este análisis confirma que la teoría de Difusión de Momento Angular Interno predice que puede ser generado flujo del ferrofluido por el único efecto de un campo magnético rotando.

Palabras Clave: Ferrofluido, Fluidos Inteligentes, Ferrohodinámica, Perfiles de Velocidad, Nanopartículas Magnéticas

ABSTRACT

In this paper we present the asymptotic analysis for the ferrofluid flow between two infinite flat plates and generated by a rotating magnetic field. This analysis includes the effect of couple stresses. The translational and spin velocity profiles were compared with the obtained by Zahn and Greer and Rinaldi and Zahn. Our results were found in agreement with the obtained by Zahn and Greer. This analysis confirms that a ferrofluid flow can be generated by the only effect of a rotating magnetic field.

Keywords: Ferrofluid, Smart Fluids, Ferrohodinamic, Speed Profiles, Magnetic Nanoparticles.

1 INTRODUCCIÓN

Ferrofluidos (FF) son suspensiones coloidales de nano partículas magnéticas de diámetro entre 3 a 15 nm y suspendidas en agua o en un líquido orgánico. Típicamente, estas nanopartículas están recubiertas de una capa de surfactante que previene que se adhieran unas a otras. Estos fluidos son también conocidos como fluidos inteligentes o "*Smart Fluids*" ya que su viscosidad puede ser alterada por un Campo Magnético (CM) externo produciendo aumento y/o decrecimiento de la viscosidad [1], e incluso se ha demostrado experimentalmente que un CM que rota puede generar su flujo [2]. En la actualidad estos ferrofluidos son usados en: fabricación de sellos mecánicos para discos duros de computador, en sistemas para separación de materiales [3], en modelación y estudio de dinámica gravitacional en ambientes controlados [4], en la fabricación de generadores

electromecánicos, aplicaciones mecánicas en amortiguadores [5] y numerosas aplicaciones biomédicas [6]. El flujo de un ferrofluido generado por un CM rotando fue observado por primera vez en 1967 por Moskowitz y Rosensweig [2]. Posteriormente, Zaitsev y Shliomis [7] propusieron la teoría de Difusión del Momento Angular Interno (DMAI) como el mecanismo generador del flujo. Esta teoría propone que el momento angular interno de las partículas generado por el comportamiento superparamagnético de las mismas, es difundido hacia la matriz del líquido generando micro-vórtices y movimiento macroscópico del fluido. En este sentido en la literatura se han presentado varios análisis que tratan de verificar el flujo de ferrofluido generado por CM rotando. Uno de estos trabajos es el de Zahn y Greer [8] quienes estudiaron el efecto de un CM sobre el flujo de un FF entre dos placas paralelas infinitamente largas. Este análisis fue basado en la teoría de DMAI de Zaitsev y Shliomis [7] bajo las suposiciones que el producto de la velocidad angular (ω_y) y el tiempo de relajación efectivo (τ) de las partículas son mucho menor a uno; y que la magnetización de equilibrio y el vector de campo magnético están relacionados linealmente ($\mathbf{M} \approx \chi \mathbf{H}$). Posteriormente, Rinaldi y Zahn [9] resolvieron el mismo problema usando el método de perturbación regular con parámetro de perturbación: $\varepsilon = \Omega\tau$, donde Ω es la escala del velocidad angular de las partículas. Este trabajo tiene como objetivo desarrollar una solución asintótica del mismo problema pero sin la restricción $\omega_y\tau \ll 1$ usada por Zahn y Greer y con un parámetro de perturbación diferente al usado por Rinaldi y Zahn que nos permita determinar cuál aproximación es más apropiada. La solución asintótica se obtuvo aplicando el método de perturbación regular y como parámetro de perturbación el obtenido por Chaves *et al.* [10] [11].

2 CASO DE ESTUDIO

2.1 Descripción del problema de flujo de ferrofluido entre placas paralelas

Se asume un campo de velocidad lineal y angular dado por $\mathbf{v} = v_z(x) \mathbf{i}_z$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_y(x) \mathbf{i}_y$, como se muestra en la Figura 1. El análisis asume la existencia de “Couple Stresses” y magnetización de equilibrio proporcional al vector de campo magnético ($\mathbf{M}_{eq} \approx \chi \mathbf{H}$). Se asumió que las placas son infinitamente largas y construidas de un material no magnético.

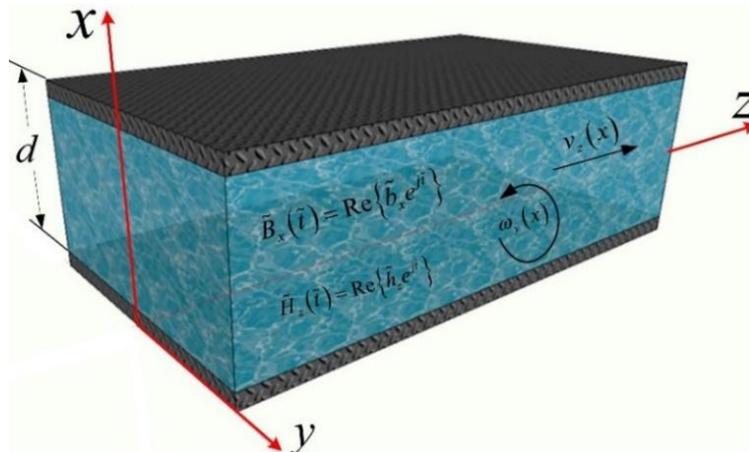


Figura 1. Esquematización para el flujo de un ferrofluido entre dos placas paralelas infinitamente largas generado por un campo magnético rotando. El CM es generado por un campo magnético H_z y una densidad de flux magnético B_x impuestos por fuentes externas.

3 DESCRIPCIÓN DE ECUACIONES FERROHIDRODINÁMICAS.

La derivación de las ecuaciones ferrohídrodinámicas es presentada de una manera detallada por Rosensweig [12] y Rinaldi [13]. Estas ecuaciones están compuestas por la ecuación de continuidad para un fluido incompresible (*Ec.* 1) y las ecuaciones de balance de momento lineal (*Ec.* 2) y momento angular interno (*Ec.* 3), la ecuación de magnetización (*Ec.* 4) y las ecuaciones de Maxwell (*Ec.* 5) en el límite magneto-cuasi-estático para fluidos no conductores de electricidad:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\zeta}{\eta \tilde{\Omega}_f} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\nabla} \tilde{p} + 2 \frac{\zeta}{\eta} \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\tilde{\Omega}_f} \tilde{\mathbf{M}} \times \tilde{\mathbf{H}} + 2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - 4 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{4\eta}{\eta_e K^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3)$$

$$\tilde{\Omega}_f \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega}_f \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}, \quad (4)$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\chi \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{H}}) = 0. \quad (5)$$

En estas ecuaciones $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector de velocidad angular de las partículas, χ es la susceptibilidad magnética inicial del ferrofluido, K es la amplitud del CM, $\tilde{\Omega}_f \equiv \Omega_f \tau$ es la frecuencia adimensional de rotación del campo y ζ es el coeficiente de "vortex viscosity" de la suspensión. El primer término de las *Ecs.* (2) y (3) representan la densidad de fuerza magnética generada por gradientes espaciales del CM y la densidad de torque magnético actuando sobre el momento dipolar de las partículas. En la *Ec.* (4), $\varepsilon \equiv \mu_o \chi K^2 \tau / \zeta$ es un parámetro de perturbación determinado a través de un análisis de escala. Las *Ecs.* (1) a (5) fueron adimensionalizadas usando las escalas para el problema hidrodinámico y magnético obtenidas por Chaves *et al.* [10].

4 MODELO MATEMÁTICO

4.1 Problema electro-magnético.

En esta sección se obtienen expresiones para el torque y fuerza magnética de la misma forma que la presentada por Zahn y Greer y Rinaldi y Zahn. Se asume que la película de fluido está sometido a un campo magnético rotativo generado por la superposición de dos campos externos: un campo magnético en la dirección z y un campo de inducción magnética en la dirección de x . Ambos campos son uniformes en espacio pero varían en el tiempo. Bajo estas condiciones los vectores de campo magnético ($\tilde{\mathbf{H}}$), inducción magnética ($\tilde{\mathbf{B}}$) y magnetización ($\tilde{\mathbf{M}}$) pueden ser escritos como:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{h}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \tilde{h}_z \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{b}_x \mathbf{i}_x + \tilde{b}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}, \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \left[\tilde{m}_x(\tilde{x}) \mathbf{i}_x + \tilde{m}_z(\tilde{x}) \mathbf{i}_z \right] e^{j\tilde{t}} \right\}. \quad (8)$$

Donde, \tilde{h}_x , \tilde{h}_z , \tilde{b}_x , \tilde{b}_z , \tilde{m}_x y \tilde{m}_z son las componentes complejas adimensionales de los vectores del campo magnético, inducción magnética y la magnetización, respectivamente; Re indica que la solución corresponde a la parte real de las funciones complejas, y j es el número imaginario. Usando las Ecs. (6) y (8) en la Ec. (4), se obtienen las siguientes expresiones para \tilde{m}_x y \tilde{m}_z :

$$\tilde{m}_x(\tilde{x}) = \frac{\tilde{h}_x(\tilde{x})}{1 + j\tilde{\Omega}_f}, \quad \tilde{m}_z = \frac{\tilde{h}_z}{1 + j\tilde{\Omega}_f}. \quad (9)$$

El campo magnético es uniforme ($\nabla\mathbf{H}=\mathbf{0}$) por lo que el vector de fuerza magnética \mathbf{f} , es cero. A diferencia de la fuerza magnética, si existe una componente en la dirección y para el torque magnético dada por la expresión $\tilde{l}_y = -\tilde{M}_x\tilde{H}_z + \tilde{M}_z\tilde{H}_x$, de donde se obtiene como expresión final para el torque magnético:

$$\tilde{l}_y = \frac{\tilde{\Omega}_f(1 + \chi + \tilde{\Omega}_f^2)}{(1 + \tilde{\Omega}_f^2)[(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}_f^2]}. \quad (10)$$

4.2 Modelo hidrodinámico

Debido a las suposiciones mencionadas en la Figura 1, para el caso de $\eta \neq 0$ las componentes z y y del momento lineal y momento angular interno son:

$$0 = \frac{\zeta}{\eta\tilde{\Omega}_f} f_z + 2\frac{\zeta}{\eta} \frac{d\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}} + \frac{\eta_e}{\eta} \frac{d^2\tilde{v}_z}{d\tilde{x}^2}, \quad (11)$$

$$0 = \frac{\tilde{l}_y}{\tilde{\Omega}_f} - 2\frac{d\tilde{v}_z}{d\tilde{x}} - 4\tilde{\omega}_y + \frac{4\eta}{\eta_e\kappa^2} \frac{d^2\tilde{\omega}_y}{d\tilde{x}^2}. \quad (12)$$

Con el objeto de obtener los campos de velocidad traslacional y rotacional de las partículas, nosotros integramos la Ec. (11) para obtener la primera derivada de la velocidad, la cual posteriormente remplazamos en la ecuación Ec. (12) para obtener una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes para $\tilde{\omega}_y$; posteriormente, se determinó el perfil de velocidad lineal; se usaron las condiciones de frontera de no deslizamiento, es decir: $\tilde{v}_z(0) = 0$, $\tilde{\omega}_y(0) = 0$ y $\tilde{v}_z(1) = 0$, $\tilde{\omega}_y(1) = 0$, por tanto los perfiles de velocidad lineal y angular son:

$$\tilde{\omega}_y(\tilde{x}) = \frac{(\zeta + \eta)\kappa(1 + \chi + \tilde{\Omega}_f^2)\sinh\left(\frac{\kappa\tilde{x}}{2}\right)\sinh\left[\frac{1}{2}(\kappa - \tilde{x}\chi)\right]}{2(1 + \tilde{\Omega}_f^2)[(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}_f^2][(\zeta + \eta)\kappa\cosh\left(\frac{\kappa}{2}\right) - 2\zeta\sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right)],} \quad (13)$$

$$\tilde{v}_z(\tilde{x}) = -\frac{\zeta(1 + \chi + \tilde{\Omega}_f^2)[(-1 + 2\tilde{x})\sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \sinh\left[\frac{1}{2}(\kappa - 2\tilde{x}\chi)\right]]}{2(1 + \tilde{\Omega}_f^2)[(1 + \chi)^2 + \tilde{\Omega}_f^2][(\zeta + \eta)\kappa\cosh\left(\frac{\kappa}{2}\right) - 2\zeta\sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right)]}. \quad (14)$$

5 RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la Figura 2 se presentan los perfiles adimensionales de velocidad lineal y angular de las partículas, para diferentes valores de κ , calculados a partir de las Ecs. (13) y (14) y usando las propiedades de un ferrofluido de cobalto ferrita en agua reportadas en Ref. [14]. Respecto al perfil de velocidad traslacional el comportamiento si difiere respecto al comportamiento de los análisis para flujo de ferrofluidos en contenedores cilíndricos donde la velocidad del flujo

incrementa conforme $\kappa \rightarrow 0$. En nuestro caso el flujo incrementa conforme el valor de κ incrementa pero hasta un valor límite, a partir del cual un incremento del valor de κ genera una disminución de la velocidad del ferrofluido en dirección de z . Esta última observación está de acuerdo con los resultados de Zahn y Greer. Por otro lado, nuestro análisis es limitado al cero orden por lo cual la ecuación de magnetización no incluye el término $\omega \times \mathbf{M}$ el cual es incluido por Zahn y Greer pero bajo la suposición que $\omega\tau < 1$. Una comparación de los perfiles de velocidad obtenidos aquí respecto a los presentados por Rinaldi y Zahn [9] muestra que nuestra solución analítica es diferente ya que involucra funciones hiperbólicas mientras las de Rinaldi y Zahn son obtenidas como funciones periódicas de senos y cosenos. Por otro lado, Rinaldi y Zahn no definen una escala concreta para el vector de velocidad angular de las partículas lo que hace su análisis más general.

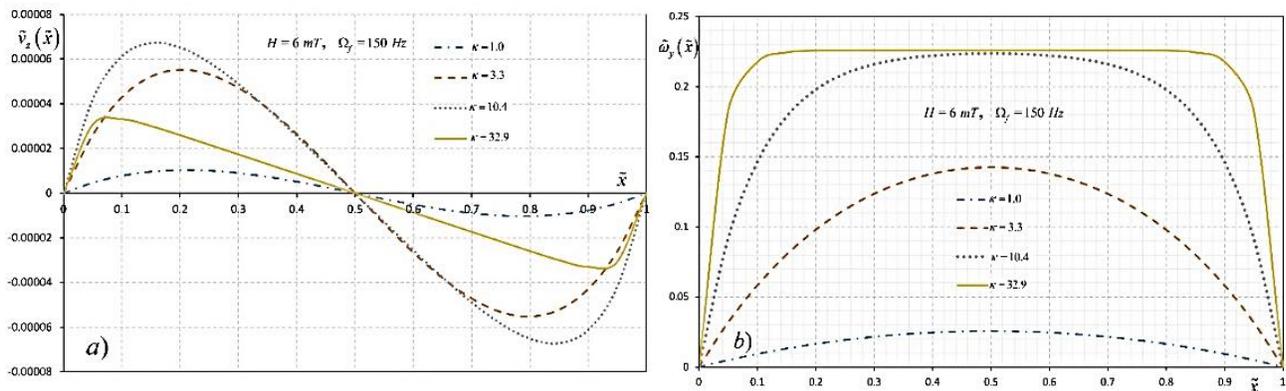


Figura 2. Perfiles de velocidad a) lineal y b) angular para el flujo de un ferrofluido entre dos placas paralelas versus κ . En ambos casos la amplitud del campo magnético permanece constante a 6 mT y frecuencia de rotación del campo de 150 Hz.

Por último en la Figura 3, se muestra perfiles de velocidad traslacional como una función de la amplitud del campo magnético y de la frecuencia de rotación. Como se puede ver de dichas figuras el perfil de velocidad tiene una dependencia cuadrática respecto a la amplitud del campo magnético y una dependencia lineal respecto a la frecuencia de rotación del campo. La primera es una consecuencia de la escala usada para la velocidad traslacional mientras que la dependencia del flujo respecto a la frecuencia se debe al torque magnético, el cual como se puede ver de la Ec. (10) es linealmente dependiente de la frecuencia en el límite de bajas frecuencias de rotación del campo.

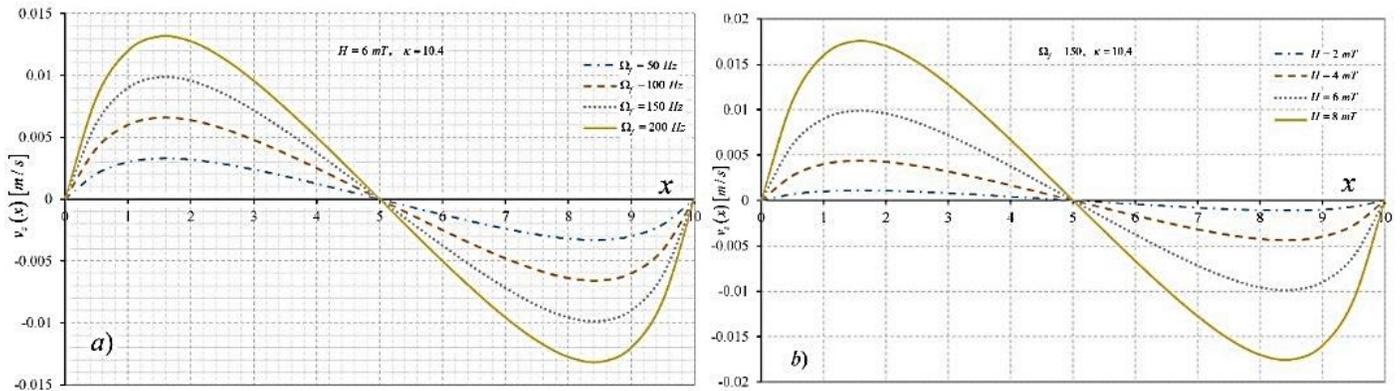


Figura 3. Perfiles de velocidad lineal para κ constante: *a)* para diferentes valores de frecuencia del CM (Ω_f), manteniendo constante la amplitud del CM (H) y *b)* para diferentes valores de la amplitud del CM (H), manteniendo constante la frecuencia del CM (Ω_f).

6 CONCLUSIONES

Se obtuvieron perfiles de velocidad traslacional y de velocidad angular de las partículas para el flujo de ferrofluido entre dos placas paralelas. Al comparar los resultados con los obtenidos por Zahn y Greer y Rinaldi Zahn se encontró un mejor acuerdo con los perfiles de velocidad obtenidos por los primeros autores aun cuando el análisis desarrollado aquí no tuvo en cuenta el producto cruz de la velocidad angular de las partículas y el vector de magnetización. No obstante, es necesario obtener la solución de primer orden para verificar el efecto de este término sobre el campo de flujo. Por otro lado, este análisis confirma que la teoría DMAI predice que puede ser generado flujo del ferrofluido por el único efecto de un campo magnético rotando.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. M. I. Shliomis y K. I. Morozov, "Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic-field" *Phys. Fluids*, vol. 6, p. 2855, 1994.
2. R. Moskowitz y R. E. Rosensweig, "Nonmechanical torque flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field" *Applied Physics Letters*, vol. 11, n° 10, pp. 301-303, 1967.
3. S. M. Elborai, "Ferrofluid Surface and Volume Flows in Uniform Rotating Magnetic Fields" de *Ph.d. thesis, Massachusetts Institute of Technology*, Cambridge, 2006.
4. R. E. Rosensweig, . J. Browaeys, C. J, B, A. Zebib y R. Perzynski, "Laboratory study of spherical convection in simulated gravity" *Phys. Rev. Lett*, vol. 83, pp. 4904-4909, 1999.
5. R. Krauss, B. Reimann, R. Richter y I. Rehberg, "Fluid pumped by magnetic stress"» *Appl. Phys. Lett*, vol. 86, 2005.
6. S. Odenbach, "Ferrofluids magnetically controlled suspensions" *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, vol. 217, pp. 171-178, 2003.

7. V. M. Zaitsev y M. I. Shliomis, "Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field" *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 10, pp. 696-700, 1969.
8. M. Zahn y D. R. Greer, "Ferrohydrodynamic pumping in spatially uniform sinusoidally time-varying magnetic fields" *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 149, p. 165–173, 1995.
9. C. Rinaldi y M. Zahn, "Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields" *Physics of Fluids*, vol. 14, n° 8, pp. 2847-2870, 2002.
10. A. Chaves, C. Rinaldi y M. Zahn, "Spin-up flow of ferrofluids: asymptotic theory and experimental measurements" *Physics of Fluids*, vol. 20, n° 053102, 2008.
11. A. Chaves, I. Torres-Díaz y C. Rinaldi, "Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field" *Physics of Fluids*, vol. 22, 2010.
12. R. E. Rosensweig, "Role of internal rotations in selected magnetic fluid applications" *Magn. Hidrodin*, vol. 36, 2000.
13. C. Rinaldi y M. Zahn, "Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields" *Physics of Fluids*, vol. 14, n° 8, pp. 2847-2870, 2002.
14. I. Torres-Díaz, A. Cortes, Y. Cedeno-Mattei, O. Perales-Perez y C. Rinaldi, "Spin-Up of a ferrofluid with Brownian Magnetic Relaxation" *Physics of Fluids*, p. En proceso de revisión, 2013.