

# REVISIONES



## Modelos matemáticos para curvas de lactancia en ganado lechero

**R**evista  
Colombiana de  
Ciencias  
Pecuarias

### *Mathematical models for lactation curves of dairy cattle*

Juan C Quintero<sup>1</sup>, Zoot; Jorge I Serna<sup>1</sup>, Zoot; Naudin A Hurtado<sup>2</sup>, Zoot; Ricardo Rosero Noguera<sup>1</sup>, Zoot, PhD;  
Mario F Cerón-Muñoz M<sup>2</sup>, Zoot, PhD.

<sup>1</sup> Grupo Grica. Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

<sup>2</sup> Grupo de genética y mejoramiento animal. Facultad de Ciencias Agrarias e Instituto de Biología, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.  
mceronm@agronica.udea.edu.co

(Recibido: 31 mayo, 2006; aceptado: 24 mayo, 2007).

#### **Resumen**

*La curva de lactancia es un proceso biológico que puede ser explicado por medio de una función matemática y la cual es útil en el pronóstico de la producción total a partir de muestras parciales, planificación del hato con la ayuda de la predicción confiable de la producción y la selección a partir del conocimiento de las relaciones entre las diferentes partes de la curva. Pero es importante encontrar en cada medio de producción, la función matemática que mejor describa la curva de lactancia de los animales. Para describir la producción de leche a través de la lactancia en animales domésticos, se han propuesto diversos modelos matemáticos, entre los cuales se encuentran los modelos de Papajcsik y Bordero 1988, Sikka 1950, Brody 1923, 1924, Wood 1967. En investigaciones recientes se ha sugerido la modelación de datos experimentales desde la metodología de modelos mixtos, la cual ha brindado la posibilidad de analizar datos con estructuras de dependencia, no balanceados y en ocasiones con falta de normalidad; esta metodología es una herramienta importante para la evaluación de la curva de lactancia. Dependiendo del método de estimación de curvas de lactancia por medio de modelos matemáticos, se da la validez de los resultados obtenidos en extensiones de lactancia. Además, permiten predecir la producción total de leche a partir de producciones parciales, característica de gran importancia para la evaluación genética en bovinos lecheros. El objetivo es presentar una revisión sobre las diferentes expresiones matemáticas empleadas en el área de las ciencias pecuarias, con el fin de interpretar los cambios que ocurren en la producción de leche de una hembra a lo largo de la lactancia.*

**Palabras clave:** *biodelación, bovinos, lactancia.*

#### **Summary**

*A lactation curve can be explained by a mathematical function of a biological process, that can be useful for prognosis of the total production starting from partial samples, planning of the herd with the help of a reliable prediction of production, and selection based in a previous knowledge of the relationships between the different parts of the curve, among others. Of key relevance is to find the mathematical function that*

\* Autor para el envío de la correspondencia y la solicitud de separatas. Carrera 75 N° 65-87, Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. E-mail: mceronm@agronica.udea.edu.co

*better describes the curve of lactation of the animals in a particular environment of production. In order to describe the production of milk throughout lactation in dairy, diverse mathematical models have been proposed, among which are the models of Papajcsik and Bordero in 1988, Sikka in 1950, Brody in 1923, Brody in 1924, and Wood in 1967. In recent reports the modeling of experimental data has been suggested by using of mixed models, which has offered the possibility to analyze data with dependence structures, not balanced data and data with lack of normality, a methodology that is an important tool for evaluating lactation curve. According to the method of estimation of lactation curves by means of mathematical models, will be the validity of the results on lactation extension. In addition, they permit the prediction of total milk production from partial productions, a characteristic of great importance for genetic evaluation in dairy cattle. The objective of this paper is to review the mathematical models commonly used in livestock for interpretation of changes that occurs in cow milk production throughout lactation.*

**Key Words:** *biodelation, bovine, lactation.*

## Introducción

La evolución de la producción lechera desde el parto hasta el secado puede ser representada gráficamente por una curva de lactancia, la cual a su vez puede ser descrita por medio de una función matemática de un proceso biológico extremadamente complejo y sujeto a influencias, tanto genéticas como ambientales. Esto implica que se deba tener cuidado al emplearla para evitar interpretaciones erróneas (13).

A menudo se usan descripciones algebraicas de la curva de lactancia para una variedad de propósitos, entre los cuales se pueden citar: pronóstico de la producción total a partir de muestras parciales, planificación del hato con la ayuda de la predicción confiable de la producción, selección a partir del conocimiento de las relaciones entre las diferentes partes de la curva, entre otros. Pero es importante encontrar en cada medio de producción la función matemática que mejor describa la curva de lactancia de los animales (13).

La curva de lactancia es un resumen conciso de los patrones de producción de leche, determinados por la eficiencia biológica de una vaca. Por otro lado, los modelos estimados a partir de los registros de producción podrían ser empleados para predecir la producción de leche futura de un individuo o de un hato con el propósito de descartar o mantener un pie de cría. La forma de la curva de la lactancia indica a los ganaderos y profesionales, la necesidad de hacer cambios en el manejo alimenticio, por ejemplo, la porción pendiente de la curva indica que la vaca necesita un aumento en el plan nutricional y el declive de la misma indicaría una restricción en el plan nutricional de la misma (22).

La forma de la curva de lactancia es obtenida a partir de los parámetros que la caracterizan, como el nivel de producción inicial, el tiempo requerido en alcanzar la producción máxima, la producción máxima o al pico, la persistencia o el nivel que se mantiene la producción, y la longitud de la lactancia (18).

Madsen 1975, citado por Ochoa (18), considera de interés práctico el estudio del perfil de la curva de lactancia por varias razones:

1. Cuando el alimento es suministrado de acuerdo con la producción estimada con anterioridad, una vaca que tiene una curva de lactancia más plana, necesita menos concentrado durante una lactancia en relación con otra de igual producción total pero con una curva más empinada.
2. Una alta producción de leche al comienzo de la lactancia requiere de la vaca una alta actividad fisiológica, lo que a menudo conduce a desordenes reproductivos o enfermedades metabólicas. Por consiguiente, una moderada producción inicial combinada con una alta persistencia, es preferible a una alta producción inicial y un rápido descenso.
3. El conocimiento de la probable configuración de la curva de lactancia permitiría realizar ensayos nutricionales mucho más eficientes, puesto que las diferencias entre tratamientos son más fáciles de detectar cuando los animales son agrupados de acuerdo con la curva esperada.

Para describir la producción de leche a través de la lactancia en animales domésticos, se han propuesto diversos modelos matemáticos. En ganado lechero, la modelación de las curvas de lactancia ha sido

objeto de extensa investigación. La ecuación más ampliamente utilizada fue la propuesta por Wood en 1967 (26) derivada de la función gama incompleta; sin embargo, en animales domésticos similares a bovinos para carne, sólo se han propuesto y recomendado pocas ecuaciones (19).

Varios autores concluyeron que la forma de la curva de lactancia se ve afectada por diversos factores ambientales, tales como: año de parto, mes de parto y número de partos. Existe una relación directa entre la forma de la curva de lactancia y la producción de pasturas en la pradera, en sistemas de alimentación a potreros (13).

El uso de modelos matemáticos, tanto mecanísticos como empíricos, ha permitido conocer las curvas de lactancia de animales domésticos en diferentes sistemas de producción lechera. Sin embargo, no todos los modelos matemáticos se adecúan a una curva de lactancia típica, con sus respectivas fases secuenciales de producción ascendente, máxima y descendente. Por consiguiente, un modelo adecuado sería aquel que permita predecir la producción máxima y el lapso requerido para que ella ocurra. Asimismo, los parámetros de un modelo adecuado de la curva de lactación deben reflejar las influencias de factores genéticos, fisiológicos, productivos, ambientales, y sus interacciones.

Dentro de los modelos matemáticos empíricos que permiten describir una curva de lactancia, están los exponenciales negativos, los gamma incompletos y los de tipo polinomial, los cuales permiten estimar el promedio de la producción de leche ( $y$ ) en un tiempo dado ( $t$ ). Cada uno de estos modelos matemáticos presenta sus respectivas ventajas y desventajas: los modelos exponenciales negativos fueron las primeras aproximaciones empíricas que describieron la curva de la lactancia de un animal y su énfasis descriptivo radica en la persistencia para la producción de leche; por otro lado, los modelos gamma incompletos son los más usados para describir la curva de lactación en ganado lechero, y los modelos polinomiales son simplificaciones lineales de la curva de la lactancia.

### **El interés de la curva de lactancia**

En el área del mejoramiento genético, las curvas de lactancia permiten predecir el desempeño de todas las madres, información que se puede utilizar en la preselección de animales jóvenes destinados a las pruebas de progenie, desempeño o ambas (10).

Para caracterizar las curvas de producción lechera es necesario conocer los modelos que mejor las definen; estos son los que permiten predecir los valores esperados y a su vez, ayudan a estimar los coeficientes para conocer los valores más probables de las lactancias extendidas. Esta metodología se basa en la obtención de una curva de lactancia estándar para grupos animales, a partir de la cual, en combinación con la parte conocida de la lactancia, se estime la producción de los controles faltantes y posteriormente la producción total (20).

Las extensiones de lactancia son de interés práctico en las valoraciones genéticas, ya que permiten predecir la producción total de leche a partir de registros parciales, para realizar las evaluaciones de toros y seleccionar, lo antes posible, las madres de los futuros sementales (10).

### **Utilización de modelos matemáticos para caracterizar curvas de lactancia**

En sistemas de producción con razas lecheras, la curva de lactancia está caracterizada por una fase de ascenso, un periodo de producción máxima seguido por una fase de descenso continuo en la producción. Estas fases que determinan la forma de la curva están afectadas por factores genéticos y ambientales; el estudio del recorrido de la lactancia puede hacerse a través de funciones matemáticas que estiman el nivel de producción alcanzado en el tiempo (18).

La capacidad computacional en granjas lecheras ha mejorado notablemente en años recientes, lo cual ha permitido registrar automáticamente la producción de leche diaria. Los datos de curvas de lactancia pueden ser generados y los parámetros de las curvas comparados para tomar decisiones de manejo. La necesidad actual está en encontrar modelos matemáticos que mejoren la explicación de las curvas de lactancia (22).

Los modelos más utilizados para la estimación de curvas de lactancia son los modelos: 1) lineales, entre los que se cuentan, cuadráticos, cuadrático-logarítmicos, polinomiales inversos, polinomios segmentados, lineal hiperbólico, regresión múltiple y modelos polinomiales y 2) no lineales, entre los que están la función gamma incompleta, la parabólica exponencial y el modelo de Wilmink (25).

La representación de los modelos lineales y no lineales utilizados en curvas de lactancia de ganado bovino y bufalino, son:

#### Modelos lineales

##### 1. Modelo Lineal.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

##### 2. Modelo Cuadrático.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^2$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \frac{\beta_1}{2\beta_2}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 + \frac{\beta_1^2}{2\beta_2} - \frac{\beta_1}{2}$$

Este modelo fue utilizado por Dava (1971), citado por Sherchand *et al* (22), con datos de la primera lactancia en búfalos domésticos (*Bubalus bubalis*) de la India, modelo donde los componentes de los modelos de lactancia en general son: ( $y_t$ ) es el carácter de producción medido en el día (t) de la lactación; los  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$ , son los parámetros a estimar de la curva y en el caso de los modelos no lineales, el exponente es la base de los logaritmos neperianos.

##### 3. Modelo Cuadrático logarítmico.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 \ln t$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 8\beta_0\beta_2}}{4\beta_2}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 8\beta_0\beta_2}}{4\beta_2} \right) - \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 8\beta_0\beta_2}}{4} + \beta_3 \ln \left( \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 8\beta_0\beta_2}}{4\beta_2} \right)$$

Este modelo fue propuesto por Singh y Gomal (24), citado por Sherchand *et al* (22). Se utilizó en búfalas lecheras de la India y los autores afirmaron que ajusta mejor los datos que el modelo Nelder (1966), la función gamma incompleta propuesta por Wood 1967 (26) o el modelo lineal logarítmico, propuesto por los mismos autores.

##### 4. Modelo lineal hiperbólico.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \frac{\beta_2}{t}$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \sqrt{\frac{\beta_2}{t}}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 + 2\sqrt{\beta_1\beta_2}$$

Este modelo fue utilizado en búfalas mestizas de las razas Murrah, en Cuba (11) y Brasil (14).

##### 5. Regresión Múltiple Ali y Shaeffer (1).

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \frac{t}{305} + \beta_2 \left( \frac{t}{305} \right)^2 + \beta_3 \ln \frac{305}{t} + e \left( \ln \frac{305}{t} \right)^2$$

##### 6. Modelo polinomial inverso (Nelder, 1966).

$$y_t = \frac{t}{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2}$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_2}}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2\beta_0\sqrt{\beta_2} + \beta_1\sqrt{\beta_0}}$$

Este modelo se ajusta bien para lactancias que comienzan con una baja producción y alcanzan el pico más pronto de lo normal (3). Con base en la comparación del  $R^2$ , se observó que la función

polinomial inversa se ajustaba mejor que la función gamma incompleta cuando fueron usados datos de producción de leche semanal. Esta función fue superior a las funciones gamma, parabólica y exponencial para las curvas que comprendían la lactancia media usando datos de vacas Hariara, pero la función gamma se ajustaba mejor a las vacas que tenían una duración de la lactancia de 44 semanas (21).

Un punto importante a ser considerado en los modelos matemáticos para la descripción de la curva de la lactancia, son los valores de  $R^2$  ajustados a través de las lactancias, ya que estos permiten observar la dispersión y amplitud de puntos (datos de producción de leche) que se presentan los registros individuales alrededor de la curva de lactancia promedia de la población para cada modelo. Además, se debe considerar que, por ser un hecho biológico, ha de existir variabilidad entre individuos genéticamente idénticos. Esta variabilidad se acentúa debido a que cada registro individual de producción refleja no sólo el efecto del día en lactación, sino también los efectos ambientales (mes y año de parto, manejo del rebaño, número de ordeños, etc.) que influyen sobre la producción de leche de un animal.

#### *Modelos no lineales*

Los modelos no lineales fueron propuestos inicialmente por Wood (1967) y han servido extensivamente para describir la curva de la lactancia de bovinos, ovinos, cabras, búfalos y camélidos sudamericanos. Por otro lado, los diferentes modelos matemáticos permiten estimar la producción en el pico de la lactancia, definido como el tiempo en el cual se alcanza la máxima producción de leche de una hembra.

##### 1. Función gamma incompleta (26).

$$y_t = \beta_0 t^{\beta_1} \exp(-\beta_2 t)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\beta_1} \exp(-\beta_1)$$

Este modelo ha sido ampliamente utilizado para la curva de lactancia de vacas de ganado lechero, se ajusta bien a los datos de producción de leche, predice mejor los datos reales durante la lactancia temprana y tardía, y predice con menor precisión los datos durante la lactancia media (21).

##### 2. Modelo parabólica exponencial (23).

$$y_t = \beta_0 \exp(\beta_1 t - \beta_2 t^2)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t_{pico} = \frac{\beta_1}{2\beta_2}$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 \exp \left[ \frac{\beta_1^2}{2} \left( \frac{1}{\beta_2} - 1 \right) \right]$$

Este modelo produce una curva de campana troncada para la producción de leche, donde (exp) es la función exponencial, se ajusta bien para la producción pero no se ajusta después de que se logra el pico de producción porque la función es simétrica alrededor del pico.

##### 3. Modelo de Wiltmink (25)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \exp(-0.05t)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t = -\frac{1}{0.05} \text{Ln} \left( \frac{\beta_1}{0.05 \beta_2} \right)$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{max} = \beta_0 - \frac{\beta_1}{0.05} \text{Ln} \left( \frac{\beta_1}{0.05 \beta_2} \right) + \frac{\beta_1}{0.05}$$

## 4. Modelo de Papajcsik y Bordero (16):

$$y_t = \beta_0 t \exp(-\beta_2 t)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t = 1 / \beta_2$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{\max} = (\beta_0 / \beta_2) \exp - 1$$

Este modelo se indicó como uno de los mejores modelos para describir la curva de lactancia en bovinos de la raza Guzerat (16).

## 5. Modelo de Cobby 1978 (6).

$$y_t = \beta_0 - \beta_1 t - \beta_0 \exp(-\beta_2 t)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t = \beta_2^{-1} \ln(\beta_0 * \beta_2 / \beta_1)$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{\max} = \beta_0 - \left( \frac{\beta_{1 \ln(\beta_0 * \frac{\beta_2}{\beta_1})}}{\beta_2} \right) - \beta_0 \exp(-\ln(\beta_0 * \frac{\beta_2}{\beta_1}))$$

Rowlands *et al* (21) compararon la producción de leche en ganado bovino con los modelos de Brody 1924 (5), Wood (26) y Cobby (6) concluyendo que el modelo Cobby (6) describe el aumento inicial en la producción de leche hasta la quinta semana mejor que el modelo de Wood (26) pero el pico se alcanza tempranamente.

## 6. Modelo de Brody (5)

$$y_t = \beta_0 \exp(-\beta_1 t) - \beta_0 \exp(-\beta_2 t)$$

Donde el pico de lactancia se alcanza en:

$$t = (\beta_2 - \beta_1)^{-1} \ln(\beta_1 / \beta_2)$$

Y la producción máxima se alcanza en:

$$y_{\max} = \beta_0 \exp(-\beta_1 (\frac{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}{\beta_2 - \beta_1})) - \beta_0 \exp(-\beta_2 \frac{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}{\beta_2 - \beta_1})$$

Este modelo subestima la producción de leche en la mitad de la lactancia y sobre estima la producción cerca del pico y al final de la lactancia (22).

## 7. Modelo de Brody (4)

$$y_t = \beta_0 \exp(-\beta_2 t)$$

En un estudio de estimación de curvas de lactancias en la raza Siboney de Cuba, donde se probaron los modelos matemáticos de función gamma incompleta (26), regresión múltiple (1), cuadrática logarítmica y lineal hiperbólica, se concluyó que los modelos de regresión múltiple y el cuadrático logarítmico, permitieron describir adecuadamente la producción de leche de la raza y estimar valores que permitían calcular producciones diarias, acumuladas y totales de leche (10).

En la elaboración de modelos de estimación para producción de leche en sistemas especializados con la raza Holstein, utilizando el modelo de gamma incompleto (26) y modelos de regresión polinómica, desde el segundo hasta el sexto orden, se indicó que la producción de leche en los sistemas de lechería especializada en pastoreo intensivo suplementado, puede ser estimada con un alto nivel de confianza, utilizando modelos de regresión polinómica de quinto orden, en animales de primero, segundo, tercero y más partos (2).

En una caracterización del modelo gamma incompleto (26) se concluyó que el ajuste del modelo en este estudio fue bastante bueno con un coeficiente de determinación promedio de 81.63% y un bajo porcentaje de curvas atípicas, las cuales representaron solo el 6.63% de las 211 lactancias analizadas (18).

*Modelos Mixtos*

*Efectos mixtos no lineales.* La modelación de datos experimentales desde la metodología de modelos mixtos, ha brindado la posibilidad de analizar datos con estructuras de dependencia, no balanceados y en ocasiones con falta de normalidad. Las ventajas de esta metodología, es que permiten contemplar la falta de cumplimiento de los supuestos tradicionales y modelar de la mejor forma posible complicadas estructuras de bases de datos entre otras ventajas.

Estos métodos representan una rica y poderosa herramienta para analizar datos con medidas repetidas. En el caso de las curvas de lactancias se consideran los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , como efectos fijos con la inclusión de efectos aleatorios, los cuales permiten tener una relación no lineal con la variable respuesta (8, 12, 17).

Por ejemplo, la curva de Wood (26) considera como efectos fijos únicamente los siguientes:  $y_{ij} = \beta_0 t_j^{\beta_1} \exp^{-\beta_2 t_j} + e_{ij}$ , donde  $y_{ij}$  es la producción de leche en el  $j$ -ésimo día de la  $i$ -ésima lactancia;  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes desconocidas a estimarse;  $t_j$  es el  $j$ -ésimo día en lactación y  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ , es el error, asociado a la variabilidad individual de las observaciones que no se explican con el modelo.

Al incluir un parámetro aleatorio en la curva de Wood (26) se tiene la siguiente fórmula:  $y_{ij} = (\beta_0 + b_{oi}) t_j^{\beta_1} \exp^{-\beta_2 t_j} + e_{ij}$ , donde;  $b_{oi} \sim N(0, \sigma_{b_0}^2)$  es una variable no observable que representa una desviación aleatoria del coeficiente  $\beta_0$  de la  $i$ -ésima lactancia;  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ , es el error, asociado a la variabilidad individual de las observaciones que no se explican con el modelo y que reflejan el hecho de que las curvas pueden estar afectadas por efectos aleatorios no considerados.

Si se adiciona términos aleatorios para cada uno de los parámetros, la ecuación del modelo de Wood (25) puede re-escribirse y se obtiene:  $y_{ij} = (\beta_0 + b_{oi}) t_j^{(\beta_1 + b_{1i})} \exp^{-(\beta_2 + b_{2i}) t_j} + e_{ij}$ , donde:  $b_{\phi}$ ,  $b_{1i}$  y  $b_{2i}$ , son variables no observables que representan una desviación aleatoria del coeficiente  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , y  $\beta_2$ , respectivamente, relacionados a la  $i$ -ésima lactancia, y se incorpora una estructura de covarianza de componentes aleatorios.

**Referencias**

1. Ali TE, Schaeffer LR. Accounting for covariances among test day milk in dairy cows. *Can J Anim Sci* 1987; 67: 637-639.
2. Arango JP, Rivera B, Granobles JC. Elaboración y validación de modelos de estimación de producción lechera en sistemas especializados. Trabajo de grado, Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad de Caldas. En: Recopilación y Sistematización de los resultados de investigación de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad de Caldas. (CD ROM). Colombia. 2000. 120 p.

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{b_0}^2 & & \\ \sigma_{b_{01}} & \sigma_{b_1}^2 & \\ \sigma_{b_{02}} & \sigma_{b_{12}} & \sigma_{b_2}^2 \end{bmatrix} \right)$$

La incorporación de estos términos otorga la flexibilidad necesaria al modelo logístico, como para eliminar la necesidad de ajustar formas funcionales diferentes para individuos de un mismo ható (12).

En los modelos con efectos aleatorios, la interpretación de los coeficientes de regresión de la ecuación de la curva de lactancia, es la misma que la realizada en un modelo con estructura de covarianza simple. Luego, estos modelos que permiten obtener mejores predicciones y realizar comparaciones de curvas de lactancia poblacionales, con errores estándares apropiados, no presentan mayor complejidad para realizar interpretaciones de lactancia con modelos basados en el cuestionamiento supuesto de independencia (9).

**Conclusiones**

De los modelos expuestos para evaluar las curvas de lactancia se puede concluir que existe gran variedad de formulas matemáticas para la estimación de curvas de lactancia y su persistencia en ganado lechero. Dependiendo del método de estimación de curvas de lactancia por medio de modelos matemáticos, se dará la validez de los resultados obtenidos en extensiones de lactancia. Además, cada modelo permite predecir la producción total de leche a partir de producciones parciales, característica de gran importancia para la evaluación genética en bovinos lecheros.

**Agradecimientos**

Al fondo de apoyo a los trabajos de grado, Universidad de Antioquia.

3. Batra TR. Comparison of two mathematical models in fitting lactation curves for pureline and crossline dairy cows. *J Anim Sci* 1986; 66:405-410.
4. Brody SA, Ragsdale AC, Turner CW. The rate of decline of milk secretion with the advance of period of lactation. *J Gen Physiol* 1923; 5:441-444.
5. Brody S, Ragsdale AC, Turner CW. The relation between the initial rise and the subsequent decline of milk secretion following parturition. *J Gen Physiol* 1924; 6:541-545.

6. Cobby JM, Y LP. Ledu on fitting curves to lactation data. *Anim Prod* 1978; 26:127-134.
7. Cobuci JA. Curva de lactação na raça guzerá. *Rev Bras Zootec* 2000; 29:1332-1339.
8. Davidian M, Giltinan D. Hierarchical Non-linear models. In: *Non-linear models for repeated measurement data*. 2nd ed. London: Chapman y hall/CRC; 1995. p. 63-95.
9. El Halami R. Nonlinear mixed effects models and non parametric inference. Tesis de Doctorado, Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona, 2005. 310 p.
10. Fernández L, Méndez A, Guerra W, Suárez M. Estimación de curvas de lactancia estándar de la raza siboney para su utilización en extensiones de lactancias. *Rev Cubana Cienc Agric* 2001; 35:99-104.
11. Fraga LM, Gutiérrez M, Fernández L, Fundora O, González ME. Estudio preliminar de las curvas de lactancia en las búfalas mestizas de Murrah. *Rev Cubana Cienc Agric* 2003; 37:151-155.
12. Lindstrom MJ, Bates DM. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics* 1990; 46:673-687.
13. Mejía LJ, Ortiz MJC. Factores que afectan los parámetros de un modelo para caracterizar la curva de lactancia en vacas Holstein en el hato Paysandú. Trabajo de pregrado Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 1990. 120 p.
14. Muñoz-Berrocal M, Tholon P, Pelicion LC, Tonhati H. Uso de polinomios ordinarios y segmentados en el ajuste de curvas de lactancia de búfalas Murrah y sus mestizas en Brasil. The buffalo an alternative for animal agricultural in the third Millenium. *Proceeding of the IV World buffalo congress. Practical Exp* 2001; 2:354-420.
15. Nelder JA. Inverse polynomials, a useful group of multi-factor response functions. *Biometrics* 1966; 22:128-135.
16. Papajcsik IA, Boderó J. Modeling lactation curves of Friesian cows in a subtropical climate. *Anim Prod* 1988; 47: 201-207.
17. PinheiroJC, BatesD. *LinearMixed-effectsModels*. In: *Mixed effects models in S and S-PLUS*. 1st ed. Springer-Verlag, Berlin; 2000. p. 3-52.
18. Ochoa GJ, Restrepo EF. Caracterización de lactancias mediante un modelo matemático en hato Paysandú. Trabajo de grado, Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 1986. p. 120.
19. Ramírez VR, García MJ, Núñez DR, Ruiz FA, Meraz AM. Comparación de ecuaciones para estimar curvas de lactancia con diferentes estrategias de muestreo en bovinos angus, suizo y sus cruza. *Vet Mex* 2004; 35:187-201.
20. Rekaya R, Bejar F, Alendra R, Carabaño MJ. Extensión de la lactación a 350 días. Conferencia. Área de mejora genética animal. Universidad de Barcelona, Madrid España 1995. 40-80 p.
21. RowlandsGJ, LuceyS, RussellAM. A comparison of different models of the lactation curve in dairy cattle. *Anim Prod* 1982; 35:135-142.
22. Sherchand L, Mc New, Kellogg DW, Jonson ZB. Selection of mathematical model to generate lactation curves using daily milk yields of Holstein cows. *J Dairy Sci* 1995; 78: 2507-2513.
23. Sikka LC. Study of lactation as affected by heredity and environment. *J Dairy Res* 1950; 17:231-239.
24. Singh RP, Gopal R. lactation curve analysis of buffalo es maintained under village conditions. *Indian J Dairy Sci* 1982; 52:1157-1163.
25. Wilmink JBM. Comparison of different methods of predicting 305 – day milk yield using means calculated from within herd lactation curves. *Livest Prod Sci* 1987; 17:1–17.
26. Wood PDP. Algebraic model of the lactation curve in cattle. *Nature* 1967; 216:164–165.