

Kandinsky, *En azul*. Óleo sobre lienzo, 1925.

LA FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS FÍSICOS. EL CASO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Ángel Enrique Romero Chacón Luz
Dary Rodríguez

RESUMEN

LA FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS FÍSICOS. EL CASO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Se examina la forma tradicional de asumir la relación física-matemáticas en el contexto educativo y, tomando como fundamento los aportes de la historia y la epistemología de la física y del enfoque de modelización, se analiza en particular el concepto velocidad instantánea y su formalización. Con la intención de superar algunas dificultades identificadas en la manera usual de significar este concepto, se adelanta una interpretación del análisis del movimiento según la perspectiva, galileana: la velocidad instantánea como variable de estado. Desde esta perspectiva, se resalta el papel desempeñado por la representación cartesiana en la diferenciación de variables y sus relaciones como medio para la formalización y comprensión de este concepto.

RÉSUMÉ

LA FORMALISATION DES CONCEPTS EN PHYSIQUE. LE CAS DE LA VITESSE INSTANTANÉE

Nous examinons la manière traditionnelle dont on assume la relation Physique-mathématiques dans le contexte éducatif et, bases sur les apports de l'histoire et de l'épistémologie de la physique et de l'approche de modélisation on analyse notamment, le concept de vitesse instantanée et sa formalisation. Nous tentons de surmonter quelques difficultés soulevées par la façon courante de donner son sens à ce concept. On avance une interprétation sur l'analyse du mouvement d'après une optique galiléenne: la vitesse instantanée en tant que variable d'état. Dans cette perspective, on souligne le rôle joué par la représentation cartésienne dans la différenciation des variables et leurs relations en tant que moyen de formalisation et compréhension du concept



FORMALIZATION OF PHYSICAL CONCEPTS. THE CASE OF INSTANTANEOUS SPEED

The traditional way of assuming the Physics-Mathematics relationship in the educational context based on the contributions of the history and epistemology of Physics and modeling in Physics, plus the concept of instant speed and its formalization, are analyzed in this paper. In an attempt to overcome some difficulties identified in the usual manner of meaning this concept, an interpretation of movement analysis in accordance with Galilean perspective is proposed: instantaneous speed as a variable of state. From this perspective, the role of the Cartesian representation in the differentiation of variables and its relationships as a means for the formalization and understanding of this concept is also emphasized.

PALABRAS CLAVE

*Enseñanza de la física, enseñanza de la matemática, velocidad instantánea
Teaching of Physics, teaching of Mathematics, instant speed (instantaneous velocity)*

LA FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS FÍSICOS. EL CASO DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA*

Ángel Enrique Romero Chacón** Luz
Dary Rodríguez***

INTRODUCCIÓN

Usualmente los procesos de matematización y formalización son catalogados como uno de los aspectos que más dificultades causan a los estudiantes de física, tanto en el ámbito de la educación media como en el de pregrado. Son, además, señalados por los profesores de física como uno de los factores de mayor incidencia en el fracaso académico de sus estudiantes, al punto de llegar a proponer una "desmatematización" de la física, es decir, una enseñanza de los conceptos y teorías físicas que no involucre la cuantificación de las magnitudes físicas ni el uso de representaciones matemáticas. A lo anterior se suma el uso de las matemáticas que hace el profesor de física en las didácticas tradicionales: en ellas se confunde los procesos de matematización de los fenómenos físicos con la aplicación de fórmulas y algoritmos.

Dado que esta situación puede estar siendo ocasionada por las concepciones que tienen los docentes de las relaciones que existen entre los procesos de matematización y la construcción de los conceptos físicos, concepciones que están basadas, a su vez, en deter-

minadas formas de asumir el conocimiento matemático y el conocimiento científico, indagar por la forma en que se materializa tal relación en el ámbito educativo indudablemente contribuirá a resolver las problemáticas planteadas.

LA RELACIÓN ENTRE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO EDUCATIVO

La forma de plantear y abordar la relación entre la física y las matemáticas más difundida en el ámbito escolar es aquella por la cual se considera a las matemáticas como *lenguaje* de la física. Este enunciado, sin embargo, lejos de ser la estricta connotación que aparenta, está cargado de muchos presupuestos onto-lógicos y epistemológicos que es necesario explicitar.

Esta concepción puede dividirse en dos enfoques, dependiendo de la forma como se asu-

* Este artículo hace parte de los resultados de la investigación educativa "La matematización de los fenómenos físicos: el caso de los fenómenos mecánicos y térmicos. Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas", Universidad de Antioquia-CODI, Escuela Normal Superior María Auxiliadora, 2001-2002. Profesor Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: aeromero@ayura.udea.edu.co

** Profesora Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.

me el lenguaje en su relación con el pensamiento. Uno, a través del cual las matemáticas son asumidas como un medio de expresión y de cálculo, que conduce a concretar la relación entre la física y las matemáticas a través de una *relación de aplicación*: las matemáticas intervienen en la física como un instrumento meramente técnico. Esta concepción es la que lleva a proponer como estrategia didáctica el adiestramiento en el uso de algoritmos matemáticos (Vondracek, 1999, 32; Linder y Hillhouse, 1996,332 y ss.). Y otro, en donde se considera que las matemáticas tienen con la física una *relación de constitución*: sin las matemáticas no sólo es imposible especificar y expresar los conceptos y procesos del pensamiento físico, sino incluso generarlos. Mientras que desde la primera perspectiva existe una situación de exterioridad respecto a los objetos de estudio y al sujeto cognoscente, desde la segunda, al examinar las teorías físicas, resulta difícil encontrar un concepto físico que no esté ligado a uno o varios conceptos matemáticos.

Teniendo en cuenta esto, asumir las matemáticas como la herramienta de la física no permite comprender ni visualizar de qué forma se establece y explicita esta relación: por una parte, asumir las matemáticas como un método universal de representación de la física, que se apoya por su parte en un método experimental igualmente universal, es una posición demasiado vaga que explica de un modo excesivamente general tal adecuación de las matemáticas al conocimiento científico (Lévy-Leblond, 1988, 77); de otra parte, desde este enfoque las estructuras lógico-matemáticas son dadas como algo acabado, donde toda idea de génesis y desarrollo es excluida, pues las estructuras formales son preformaciones y el sujeto es sede o teatro, pero no actor de ellas.

En los últimos años han venido surgiendo propuestas de investigación en la enseñanza de la física que, enmarcadas en el segundo enfoque, abordan más explícitamente las po-

sibles formas como se dan las relaciones entre la física y las matemáticas a través de estudios de caso: se trata de la *indagación histórico-epistemológica* de la física con fines pedagógicos y de la *modelización* en física.

Por un lado, los análisis histórico-epistemológicos de la física han contribuido a superar la relación de confrontación entre los pares naturaleza-hombre, experiencia-teoría y concreto-abstracto, característicos de formas tradicionales de asumir la relación entre la física y las matemáticas. Por una parte, han mostrado que no existe una única manera de concebir la materialización de dicha relación, pues tal adecuación no es universal ni ahistórica: depende tanto de las estructuras de los sistemas matemáticos como de los conceptos y las magnitudes físicas en consideración (Paty, 1994, 404). Por otra parte, contribuyen a la constitución de un marco conceptual apropiado: matematizar un fenómeno físico no consiste en sobreponer un aparato matemático al fenómeno; se requiere, ante todo, construir la posibilidad misma de matematizarlo, es decir, de construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo (Malagón, 1988,114).

Por otro lado, de acuerdo con el enfoque de modelización, los modelos constituyen el núcleo del conocimiento científico y la modelización es la actividad sistemática a partir de la cual se puede construir y emplear este conocimiento. Este enfoque está basado en ciertos presupuestos epistemológicos, siendo tal vez uno de los más relevantes aquel por el cual se afirma que nunca llegamos a conocer los objetos "en sí", sino a través de nuestras representaciones de ellos; en otras palabras, todo nuestro conocimiento de lo que llamamos "mundo exterior" depende de nuestra habilidad para construir modelos de él (Johnson-Laird, 1983; citado por Halloun, 1996, 1.021). Esto implica que cualquier "integración" entre disciplinas diversas debe significar un modo de comparar y relacionar

entre sí modelos diversos y diversas estructuras de modelos (Arca, Guidoni y Mazoli, 1990, 139). Estas consideraciones tienen importantes implicaciones en los procesos de matematización:

- Hacer matemáticas implica más que la simple manipulación de símbolos matemáticos. Cuando se construyen o exploran sistemas matemáticos, lo que tiene interés son las propiedades estructurales de esos sistemas, no los elementos aislados dentro del sistema, ni las reglas aisladas que sirven para actuar sobre tales elementos (Castro Martínez y otros, 1997, 362 y ss.).
- Cuando se utilizan representaciones para matematizar situaciones problemáticas, las representaciones matemáticas funcionan como simplificaciones de sistemas externos y, a la vez, como externalizaciones de sistemas *internos* (Lesh, 1997, 379).

Tomando como base estos aportes, es claro que la forma como se puede avanzar en la caracterización de las relaciones entre la física y las matemáticas que posibilite plantear propuestas didácticas es a través de la realización de estudios de casos de cómo se constituyen y formalizan conceptos físicos particulares. Sólo así se podrá explicitar el uso de representaciones, el establecimiento de modelos y los grados de formalización involucrados en la identificación y cuantificación de las magnitudes relevantes para la constitución de un concepto particular.

EL CONCEPTO VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y SU FORMALIZACIÓN

La velocidad instantánea es uno de los conceptos centrales en la descripción y análisis del movimiento de los cuerpos y sistemas. En la enseñanza, este concepto se aborda usualmente desde una perspectiva espacio-tempo-

ral, en el sentido de que para su definición y significación se toman como referentes los conceptos *posición* y *desplazamiento*, asumidos como funciones del tiempo. Es así como la velocidad instantánea v de una partícula en el momento t se define como el límite de su velocidad media durante un intervalo de tiempo que incluya a t , cuando el tamaño del intervalo tiende a cero.

A pesar de la importancia que este concepto tiene en el estudio de la cinemática, en la mayoría de los textos y cursos introductorios de física no se dedica el tiempo suficiente para garantizar su comprensión por parte de los estudiantes, ni se diseñan y ponen en práctica las estrategias adecuadas para tal fin. La mayoría de las investigaciones que identifican las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los conceptos básicos de cinemática resaltan el papel que juega la experiencia y proponen dar una base perceptual para la definición operatoria de límite, al considerar un movimiento no-uniforme como una sucesión de movimientos uniformes ocurridos en intervalos de tiempo cortos (Trowbridge y McDermott, 1980, 1.027; Rosenquist y McDermott, 1987, 408 y ss.).

No obstante, la alta frecuencia con la que este concepto es abordado en los cursos introductorios de física, haciendo uso de la perspectiva espacio-temporal, contrasta con el bajo entendimiento que los estudiantes logran de él. Esta formalización del concepto *velocidad* está fundamentada en la consideración del movimiento como cambio de lugar (cambio de posición): un cuerpo se encuentra en movimiento si cambia de lugar en un cierto tiempo; desde esta perspectiva, el cambio de lugar y el correspondiente gasto de tiempo se convierten en los únicos referentes para evidenciar y analizar el movimiento de los cuerpos.

A esta forma de significar el movimiento y de definir el concepto velocidad instantánea se le pueden realizar algunas objeciones:

- Si bien las funciones $r = r(t)$ y $v = v(t)$ se utilizan formalmente para describir satisfactoriamente el movimiento de los cuerpos, la situación cambia radicalmente si se desea analizar movimientos para los cuales no se conocen *a priori* estas funciones (Ayala y otros, 2002,1).
- La definición operatoria de velocidad instantánea trae consigo dificultades de adecuación entre la noción *instantaneidad temporal* y el significado de velocidad que subyace a dicha definición. Cuando se hace referencia al movimiento de un cuerpo se considera intuitivamente que en cada instante el cuerpo tiene un valor de velocidad determinado; no obstante, el uso de lapsos de tiempo finitos (aunque pequeños), presentes en el paso al límite de la definición, no se corresponden con esta noción de instantaneidad, dado que lo que se tiene son lapsos de tiempo -duraciones-, no instantes.
- Esta definición sugiere que para medir la velocidad instantánea basta con cuantificar los cambios de posición y los correspondientes lapsos de tiempo y aplicar la relación propuesta; no obstante, este procedimiento no permite resolver satisfactoriamente las dificultades que se presentan cuando se desea medir la velocidad para un instante determinado, dado que sólo es posible dar cuenta de la velocidad media en un lapso de tiempo. Más aún, la forma de medir la velocidad implícita en esta definición no se corresponde con el proceso de medir: no se dispone de una unidad de velocidad que permita la construcción de una escala para asegurar cuándo un valor determinado de velocidad es la mitad, el doble, el triple, etc., de otro.

Teniendo en cuenta estas objeciones, cabe preguntarse si la única forma de comprender el concepto *velocidad instantánea* es a partir de una relación espacio temporal.

EL MOVIMIENTO DESDE UNA PERSPECTIVA FENOMENOLÓGICA

El movimiento puede pensarse y analizarse desde un modo de ver por *sistemas* y un modo de ver por *variables*. Desde esta perspectiva, el movimiento no es una propiedad que se le atribuye a un cuerpo, sino un estado de un sistema constituido por -al menos- dos cuerpos (Guidoni y Arca, 1987, 6 y ss.). De hecho, la estructura del lenguaje usado para referirnos al movimiento nos perca de esta posibilidad: cuando percibimos que no es adecuado decir «el cuerpo tiene movimiento», sino «el cuerpo está en movimiento», estamos considerando que el movimiento no es algo que pertenece al cuerpo, sino que es un modo de *ser o estar* de los cuerpos.

Considerar el movimiento como un *estado* de un sistema de cuerpos implica que, paralelamente a la identificación del sistema en consideración, es necesario identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de los diferentes estados de movimiento que puede llegar a tener un cuerpo. Esta posibilidad, igualmente, ya está presente en el lenguaje a muy tempranas edades: cuando nos referimos al movimiento de un cuerpo hablamos de qué tan *rápido* o *lento* se mueve dicho cuerpo; esto pone en evidencia que para referirnos al movimiento identificamos una cierta cualidad susceptible de tener grados, que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos: el grado de velocidad.

Las diferentes situaciones relativas al movimiento pueden ser interpretadas desde esta perspectiva: la caída de los cuerpos en las vecindades de la superficie terrestre puede ser descrita como el cambio continuo del estado de movimiento de un cuerpo, de manera que experimenta cambios de estado de movimiento iguales en tiempos iguales; el caso del movimiento rectilíneo uniforme puede interpretarse como la permanencia en el tiempo del mismo estado de movimiento; el caso del movimiento acelerado es la variación conti-

nua en el tiempo del estado de movimiento (Ayala y otros, 2002,19). Podría afirmarse, incluso, que la ley de la inercia enuncia que un cuerpo por sí mismo no puede cambiar su estado de movimiento.

Para avanzar con el estudio del movimiento desde el modo de ver por sistemas y el modo de ver por variables es necesario configurar fenómenos donde se posibilite la identificación del estado de movimiento como variable y el establecimiento de relaciones con otras variables que permitan su cuantificación. Para este fin se considera relevante realizar un análisis del fenómeno de la caída de los cuerpos, según la perspectiva galileana.

**PERSPECTIVA GALILEANA DEL
MOVIMIENTO: LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA
COMO VARIABLE DE ESTADO**

Galileo fue uno de los fundadores de una forma de análisis que a lo largo de la historia se ha erigido como paradigmática: la geometri-zación y, como consecuencia de ello, la cuantificación del movimiento. Se resaltan aquí algunos aspectos de la perspectiva galileana del movimiento que en muchos análisis históricos y textos de enseñanza resulta desapercibida: la identificación de la velocidad instantánea como variable continua que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos. En la "Jornada tercera" de su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Galileo aborda el análisis del movimiento. Respecto al movimiento naturalmente acelerado, afirma:

Salviati. [...] Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va

aumentando siempre de la misma manera [...] de modo que si el móvil continuara en su movimiento según el grado de intensidad de velocidad adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento sería dos veces más lento que el que obtendría con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo (Galileo, 276-277).

Para Galileo, la propiedad relevante en el análisis del movimiento es la velocidad, o más concretamente el grado de velocidad, interpretada como el grado de rapidez o lentitud que puede adquirir un cuerpo. A través de esta idea, Galileo modifica el estatus ontológico del movimiento: de efecto producido por una causa -el ímpetu- y que existe y se mantiene sólo mientras dura la acción de la causa que lo produce, pasa a ser un ente relativamente independiente que se conserva por sí solo (Koyré, 1981, 91).

Galileo es consciente de las dificultades conceptuales que implica esta concepción y por ello pone en boca de Sagredo y Simplicio algunas de las objeciones más importantes, a saber: ¿cómo concebir el paso continuo del reposo al movimiento? ¿Cómo pensar un movimiento que se realiza en un instante? Dada la importancia del análisis, es relevante citarlo en extenso:

Sagredo. Cuando me imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, y comienza a moverse acelerándose según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante de movimiento; [...] al ser el tiempo subdividible al infinito, [...] podemos concluir, entonces, que en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos mues-

tran que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable.

Salviati. Esta es una de las dificultades que, al principio, me dieron mucho que pensar, no obstante, en poco tiempo conseguí deshacerme de ella. Fue, precisamente, la misma experiencia, que la que os suscita la dificultad, la que se encargó de resolvérmela [...] Dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, [...] no pienso que no estuviérais dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza, fuese devuelta a la misma altura; si esto es posible, no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo.

Simplicio. *Pero si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos, entonces jamás llegarán a consumirse todos. De ahí que el grado ascendente en cuestión no llegará jamás al reposo, sino que se moverá infinitamente cada vez más despacio, cosa que no parece suceder.*

Salviati. Ocurriría esto, señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad (Galileo, 1981, 281-282).

Galileo configura su idea de velocidad instantánea para dar respuesta a las objeciones planteadas. Por una parte, refuerza la idea de que entre el reposo y el movimiento no hay diferencia de cualidad, sino de cantidad, al considerar al reposo como un *estado* más de movimiento: el estado de lentitud infinita; esto implica asumir el grado de velocidad como

variable continua, en el sentido de que cuando un cuerpo pasa de dicho estado de reposo -asumido, como el estado de movimiento de grado cero- a otro estado de movimiento, o viceversa, tiene que pasar por todos los infinitos grados de movimiento intermedios. Por otra parte, hace aceptable la idea de que el móvil pasa por infinito número de grados de velocidad en un tiempo finito, al hacer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo: considera que a cada instante del transcurso del movimiento le corresponde un único grado de velocidad (Malagón, 1988, 110).

Esta perspectiva de análisis del movimiento es precisamente la que se ha denominado *es-trategia de análisis por estados y transformaciones* (Guidoni y Arca, 1987, 6 y ss.). Desde esta forma de ver, la velocidad es considerada la variable que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos, de forma que estados de movimiento diferentes corresponden a grados de velocidad diferentes. El movimiento es, entonces, una transformación: una sucesión en el tiempo de estados de movimiento; ahora bien, como la idea de estado implica permanencia, el movimiento desde esta perspectiva es considerado como una sucesión de reposos instantáneos.

Con la intención de demostrar las relaciones espacio-temporales experimentadas en la caída a partir del axioma propuesto (el grado de velocidad en la caída aumenta desde el reposo en forma proporcional al tiempo transcurrido), Galileo hace uso de una representación geométrica de las variables que intervienen, representación que vendría a constituirse como emblemática en cuanto a la matematización del movimiento se refiere (véase figura 1). Galileo representa el tiempo transcurrido en la caída por un segmento vertical AC y lo subdivide en partes iguales de manera que segmentos iguales corresponden a lapsos de tiempo iguales. Los grados de velocidad del cuerpo en cada instante son representados por segmentos horizontales:

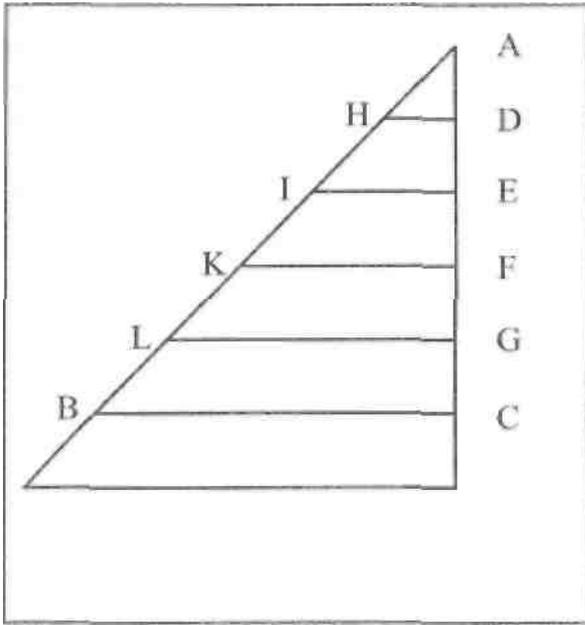


Figura 1.

Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída

Fuente: GALILEI, Galileo (1981 [1638]). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Traducido por J. Sabada. Introducción y notas por C. Solís. Madrid: Editora Nacional, p. 293.

Ahora bien, afirma Galileo, como la aceleración se produce de manera continua de un momento a otro, y no a saltos, de una parte del tiempo a otra, y puesto que el término A se considera como el momento mínimo de velocidad, es decir, como el estado de reposo y como el primer instante del tiempo subsecuente AD, está claro que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que hace en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por una infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, hay que imaginar una infinidad de líneas cada vez menores, trazadas desde los puntos infinitos de la línea AD, paralelamente a la línea DH, cuya infinidad de líneas representará finalmente la superficie del triángulo ADH (Galilei, 1981, 293).

Este fragmento muestra cómo Galileo, asumiendo como axioma la relación de proporcionalidad entre el aumento del grado de velocidad y el lapso de tiempo transcurrido ($v \propto t$)

oc At) y haciendo uso de una representación geométrica para su concepto *velocidad instantánea*, deduce las relaciones experimentadas en la caída: que la distancia recorrida desde el punto de partida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo ($x \propto At^2$) y que los desplazamientos en tiempos iguales siguen la sucesión de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

Resulta importante resaltar aquí la pertinencia de la representación geométrica en los procesos de construcción conceptual del fenómeno del movimiento y, consecuentemente, en los procesos para su matematización: a través de esta representación, magnitudes no geométricas como la velocidad y el tiempo son representadas como segmentos, hecho que posibilita poder operar sobre ellas de la misma forma como se opera con segmentos, es decir, a través de proporciones y composición de proporciones.

En particular, esta representación hace evidente que, en la perspectiva galileana, la velocidad instantánea no es un concepto definido a partir de una relación espacio-temporal, como usualmente se presenta en los libros de texto y los cursos introductorios de física: acudir a referentes espacio temporales para el estudio de la velocidad como magnitud no es equivalente a una definición operativa de la velocidad en términos de los conceptos de espacio y tiempo, como usualmente es presentada. Representar la velocidad instantánea por segmentos y pensar en ella como una magnitud más, le permite a Galileo establecer una estructura -conjunto de axiomas, proposiciones y teoremas- sobre el movimiento que le posibilita hacer comparaciones entre grados de velocidad a través de las comparaciones espacio-temporales. En este sentido, desde la perspectiva galileana, el concepto *velocidad instantánea* tiene la misma categoría que el espacio y el tiempo, y esto es precisamente una consecuencia del razonamiento geométrico utilizado por Galileo para abordar el problema del movimiento (Malagón, 1988, 97; Gandt, 1988, 45 y ss).

LA REPRESENTACIÓN CARTESIANA Y LA FORMALIZACIÓN DEL CONCEPTO VELOCIDAD

Como lo fundamentan muchas investigaciones, las representaciones internas se reflejan de algún modo en sus representaciones externas: la forma en que las personas piensan se refleja en el uso del lenguaje, por lo que se considera que lo que los estudiantes escriban, dibujen y digan dará indicios de la manera en que razonan (Greca y Moreira, 1998, 292). La representación cartesiana se considera particularmente importante para desarrollar en los estudiantes los procesos de matematización de los fenómenos físicos, por cuanto: 1) Permite la diferenciación y visualización de las variables reconocidas en una interpretación física, por medio de su representación a través de líneas sobre un plano; 2) Facilita la identificación de las relaciones de orden, características de las magnitudes físicas, por medio de la comparación entre los segmentos que

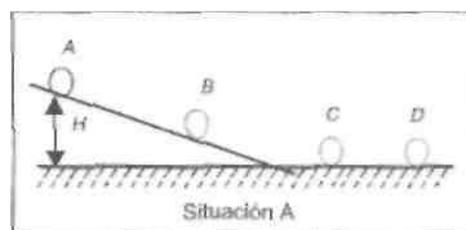
representan los diversos valores que puede tomar una variable; 3) Favorece el establecimiento de relaciones entre las diferentes variables representadas vía el análisis, a partir de la representación misma, de cómo cambia una variable respecto a otra, y 4) Posibilita la comprensión del fenómeno físico a través de su formalización.

No obstante, dado que los espacios de representación tienen significado sólo en correspondencia con las variables y relaciones que ellos representan, es importante advertir que las principales dificultades al representar variables y relaciones entre ellas no son de tipo técnico-formal, sino, ante todo, semántico.

Para ilustrar estas dificultades se expone a continuación un análisis de algunas representaciones planteadas por estudiantes a propósito de una situación problemática (véase figura 2) propuesta en el marco de una investigación educativa relativa a la matematización de los fenómenos físicos (Romero y otros 2002).

Considere las dos situaciones siguientes:

- A. Un cuerpo se deja caer desde la parte superior *A* de un plano inclinado de altura *H*, hasta que alcanza una superficie horizontal muy lisa.
- B. Desde un punto *A* ubicado a una altura *H* del piso se deja caer un cuerpo.



1. Ordene, de menor a mayor, los valores del grado de rapidez que el cuerpo tiene en los puntos *A*, *B*, *C* y *D* indicados para cada una de las situaciones. Represente mediante segmentos cada uno de los valores de los grados de rapidez en correspondencia con la ordenación hecha.
2. ¿Considera usted que en cada momento desde que se suelta el cuerpo, éste tiene algún valor de grado de rapidez? ¿Podrá el cuerpo tener valores diferentes de grado de rapidez en un mismo momento? Explique.
3. Si se representa el tiempo transcurrido para cada uno de estos movimientos por un segmento horizontal, identifique en cada segmento los momentos correspondientes a la posición *A*, *B*, *C* y *D* para cada situación. Ubique en cada uno de ellos los segmentos con los que representó los valores de los grados de rapidez para cada caso.

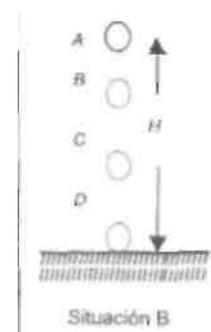


Figura 2. Situación problemática

Los estudiantes aceptan que, en cada momento del movimiento, el cuerpo tiene un único valor de grado de rapidez. A la pregunta: ¿podrá el cuerpo tener valores diferentes de grado de rapidez en un mismo momento?, los estudiantes responden: «Desde que se suelta hasta que pare, [el cuerpo] tendrá diferentes valores de rapidez, pero no podrá tener en el mismo momento varios». «A medida que el cuerpo cae, su rapidez aumenta progresivamente. [Pero] no es posible que un cuerpo en un mismo momento tenga variabilidad en su rapidez». «El tiempo es variable y no puede haber rapidez diferente en un mismo tiempo».

La representación realizada para el numeral 3 se transcribe en la figura 3. A partir de esta representación se puede afirmar que los estudiantes identifican el grado de rapidez como una variable cuyos valores particulares se asocian a cada instante de tiempo, es decir, que tienen ya la noción de velocidad instantánea; no obstante, no existe una adecuación entre esta interpretación física y la representación: a pesar de que los estudiantes asumen que el reposo corresponde a la velocidad de grado cero, no consideran obvio representar tal grado cero a través de un punto, como usualmente se les exige para la construcción y análisis adecuado de las gráficas $v-t$ en cinemática.

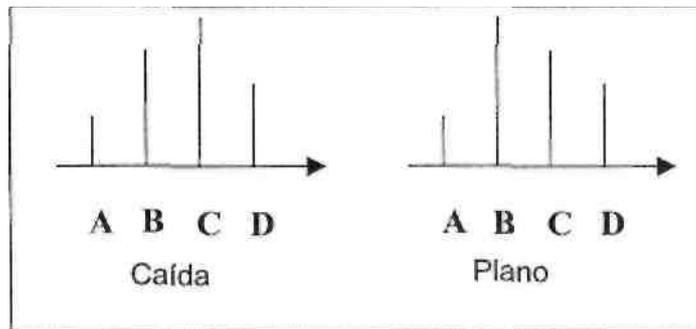


Figura 3. Representación del orden de los grados de velocidad según su cambio en el tiempo

Lo cierto es que esta consideración, lejos de ser obvia, está estrechamente relacionada con el hecho, intuitiva y formalmente válido, de que sólo es posible comparar magnitudes homogéneas: si se elige la longitud para representar la velocidad, se asume que las diferentes cantidades de longitud corresponden a los diferentes grados de velocidad; pero mientras el grado cero de velocidad tiene como referente el reposo, su correspondiente para la longitud no es un valor más, sino la ausencia de tal propiedad. En otros términos, un punto no es un elemento de la misma clase que una línea: por sucesivas divisiones de un segmento no se obtiene un punto, de la mis-

ma forma que por la reunión de puntos no se genera un segmento. Esta dificultad no es exclusiva de la geometría; también se presenta en la interpretación física, cuando se está obligado a asumir al reposo como un grado más de movimiento: "el grado de lentitud infinita", en términos de Galileo.

Es importante advertir las posibles faltas de correspondencia entre una explicación física que involucra una variable y su representación gráfica, por cuanto ello ilustra las dificultades de tipo *semántico* en el uso de una representación espacial, como es la longitud de un segmento, para representar una variable no espacial, como es la velocidad.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Formalizar una magnitud física, vía su cuantificación, no es un problema teórico relacionado con la asignación arbitraria de cifras a las propiedades y su posterior manipulación a través de algoritmos; tampoco es un problema meramente empírico relacionado con el uso de instrumentos para la obtención de datos: se trata, ante todo, de un problema de adecuación entre las formas de razonamiento -el pensamiento numérico o el geométrico- y las fenomenologías identificadas. Usualmente la velocidad instantánea es considerada como una variable dependiente de la posición y el tiempo; su formalización y cuantificación se hace a través del paso al límite de la relación entre estas variables. No obstante, esta forma de significarla trae consigo contradicciones con la noción *instantaneidad temporal* y con el significado de medición.

Alternativamente, la velocidad instantánea puede ser vista como una variable de estado y, por tanto, considerarse como independiente del espacio y del tiempo. Desde esta perspectiva, su cuantificación se hace mediante la identificación de un fenómeno prototipo -la caída de los cuerpos, por ejemplo- y el uso adecuado de representaciones para dar cuenta de las variables y relaciones entre variables identificadas en dicho fenómeno. En particular, la representación cartesiana es un caso paradigmático de la construcción de espacios abstractos para representar variables y relaciones entre variables: a través de ella es posible representar todos los valores de una variable continua cualquiera y las posibles relaciones entre sus valores, mediante los puntos sobre una línea y sus relaciones geométricas y numéricas; de la misma forma, es posible representar relaciones entre parejas de variables mediante curvas en el plano. No obstante, dado que toda representación implica una adecuación entre el *espacio de representación* y el *objeto representado* -que es una representación más-, es necesario *aprender a leer* la se-

mántica propia de estos dos contextos, pues, de lo contrario, es posible que se termine operando en dichos espacios de una forma puramente memorística y, por tanto, cognoscitivamente poco significativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AYALA, M. M. y otros. (2002). *Cuadernos de mecánica No. 1*. Bogotá, D. C: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Física. Pre impreso.

ARCA, M.; GUIDONI, P y MAZOLI, P (1990). *Enseñar ciencia. Cómo empezar: reflexiones para una educación científica de base*. Barcelona: Paidós Educador.

CASTRO MARTÍNEZ, E. y otros. "Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas". En: *Enseñanza de las ciencias*. Vol. 15, No. 3. pp. 361-371.

GALILEI, Gaúleo (1981 [1638]). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Traducido por J. Sabada. Introducción y notas por C. Solis. Madrid: Editora Nacional.

GANDT, F. de. (1988). "Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton)". En: APERY, R. y otros. *Pensar la matemática*. Barcelona: Tusquets. pp. 43-73.

GRECA, I. y MOREIRA, M. A. (1998). "Modelos mentales y aprendizaje de la física en electricidad y magnetismo". En: *Enseñanza de las ciencias*. Vol. 16, No. 2. pp. 289-303.

GUIDONI, E y ARCA, M. (1987). *Guardare per sistemi, guardare per variabili*. Torino: Emme Edizioni.

HALLOUN, I. (1996). "Schematic Modelling for Meaningful Learning of Physics". In: *Journal*

of *Research in Science Teaching*. Vol. 33, No. 9. pp. 1.019-1.041.

KOYRÉ, A. (1981). *Estudios galileanos*. Madrid: Siglo XXI.

LESH, R. (1997). "Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones". En: *Enseñanza de las ciencias*. Vol. 15, No. 3. pp. 377-391.

LEVY-LEBLOND, J-M. (1988). "Física y matemáticas". En: APERY, R y otros. *Pensar la matemática*. Barcelona: Tusquets pp. 75-109.

LINDER, C. J. y HILLHOUSE, G.(1996). "Teaching by Conceptual Exploration". In: *The Physics Teacher*. Vol. 34, (sept). pp. 332-338.

MALAGÓN, J. F. (1988). *La relación física y matemáticas en Galileo*. Tesis de Maestría en Docencia de la Física. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

PATY, M. (1994). "Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques á la physi-que". En: FLAMENT, D. y Navarro, V. (eds.).

Rencontre a Madrid de chercheurs hispano-frangais sur l'histoire et la philosophie de la mathématique. Madrid: Comunidad de Madrid/C.S.I.C. pp. 401-428.

ROSENQUIST, M. y McDERMOTT, L. (1987). "A conceptual approach to teaching kine-matics". In: *Am. J. Phys.* Vol. 55, No. 5, (may). pp. 407-415.

ROMERO, A. y otros (2002). *La matematización de los fenómenos físicos: el caso de los fenómenos mecánicos y térmicos. Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas. Informe de investigación*. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación -CIEE Escuela Normal Superior María Auxiliadora.

TROWBRIDGE, D. y McDERMOTT, L. (1980). "Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimensión". In: *Am. J. Phys.* Vol. 48, No. 12, (dec). pp. 1.020-1.028.

VONDRACEK, M. (1999). "Teaching Physics with Math to Weak Math Students". In: *The Physics Teacher*. Vol. 37, (jan.), pp. 32-33.

REFERENCIA

ROMERO CHACÓN, Ángel Enrique y RODRÍGUEZ, Luz Dary. "La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea". En: *Revista Educación y Pedagogía*. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. pp. 57 - 67.

Original recibido: septiembre 2002

Aceptado: octubre 2002

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.

