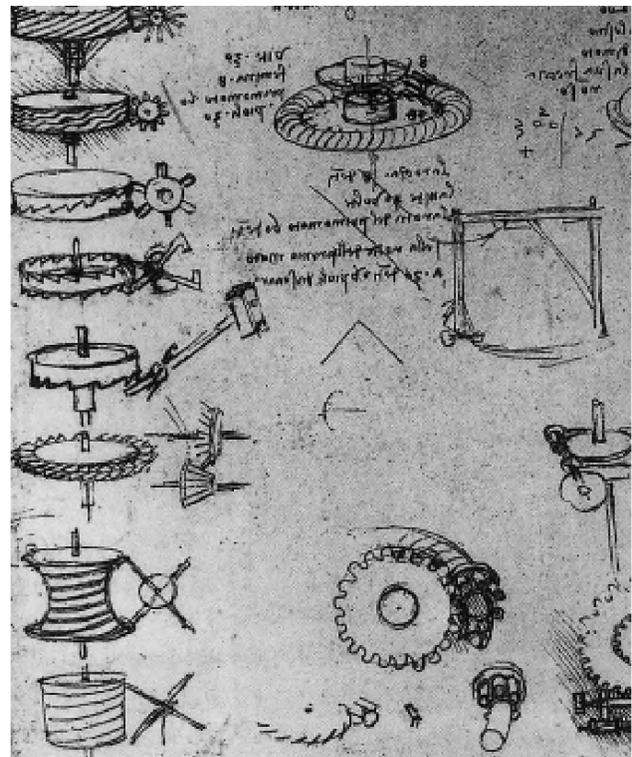


**EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS BÁSICOS DE FÍSICA
EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO
FUENTE GENERADORA DE NUEVAS PERSPECTIVAS.
UN ESTUDIO EN DINÁMICA DEL MOVIMIENTO
CIRCULAR**

**Consuelo Escudero
Sonia González
Eduardo Jaime**



Leonardo da Vinci,
Alimentador de hojas automático (fragmento).

RESUMEN

EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS BÁSICOS DE FÍSICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO FUENTE GENERADORA DE NUEVAS PERSPECTIVAS. UN ESTUDIO EN DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

La resolución de problemas es una clave para evaluar cual es el alcance en la comprensión de los conceptos de una disciplina. En este estudio, basado en el análisis del proceso de resolución por alumnos de primer año de la carrera Licenciatura en Geología, se buscan señales de la presencia de conocimiento-en-acción, concepto acuñado por Gérard Vergnaud en la teoría de los campos conceptuales (TCC). La diversidad de los procesos desarrollados permitió la elaboración de siete categorías con las que se intenta explicar cuales son las representaciones mentales que construyen.

RÉSUMÉ

L'ANALYSE DE CONCEPTS DE BASE DE LA PHYSIQUE DANS LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES COMME SOURCE GÉNÉRATRICE DE NOUVELLES PERSPECTIVES. UNE ÉTUDE EN DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE

La résolution de problèmes est une clé pour évaluer la portée de la compréhension des concepts d'une discipline. Dans cette étude, basée sur l'analyse du processus de résolution par des élèves de première année de la licence en Géologie, on cherche des signes mettant en évidence la connaissance en action, concept utilisée par Gérard Vergnaud dans la théorie des champs conceptuels (TCC). La diversité des processus développés a permis l'élaboration de sept catégories avec lesquelles on essaye d'expliquer les représentations mentales qu'ils construisent.

ABSTRACT

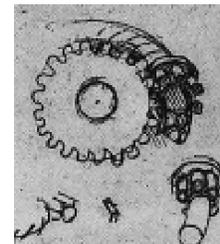
ANALYSIS OF BASIC CONCEPTS OF PHYSICS IN THE SOLVING OF PROBLEMS AS GENERATING SOURCE OF NEW PERSPECTIVES. A STUDY ON THE DYNAMICS OF CIRCULAR MOVEMENT

Problem solving is key to evaluating the reach of the understanding of concepts of a discipline. This study was based on the analysis of the resolution process of Licentiate in Geology first year students, and looks for signals of the presence of knowledge-in-action (concept drawn by Gerard Vergnaud in the theory of conceptual fields (TCC)). The diversity of the processes developed allowed an elaboration of seven categories which are used to explain the mental representations that build.

PALABRAS CLAVE

*Enseñanza de la física, conocimiento-en-acción, teoría de los campos conceptuales.
Teaching of physics, knowledge-in-action, theory of conceptual fields.*

EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS BÁSICOS DE FÍSICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO FUENTE GENERADORA DE NUEVAS PERSPECTIVAS. UN ESTUDIO EN DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR*



Consuelo Escudero**
Sonia González***
Eduardo Jaime****

INTRODUCCIÓN

Este artículo forma parte de un proyecto de mayor alcance, cuyo propósito está orientado a la búsqueda de marcas que indiquen la presencia del *conocimiento-en-acción* durante el proceso de resolución de problemas de física.

En el análisis pormenorizado de una situación problemática se infiere la presencia de algunos conocimientos implícitos, tradicionalmente difíciles de detectar, cuya calidad y organización influye notablemente en los procedimientos que desarrollan las personas al intentar resolverlas.

El uso y la organización de los símbolos, las gráficas empleadas (también sus referencias), las etapas desarrolladas para la resolución de un problema, entre otros aspectos, constituyen la explicitación de conceptos y de procesos mentales que se activan al enfrentarse a un conjunto de informaciones que aún está incompleto, pero que tiene la potencialidad de irse completando en la medida en que puedan expresarse las relaciones físicas subyacentes.

Un importante tópico en física introductoria es el *movimiento circular*, en particular, la aceleración de una partícula bajo dicho mo-

* Estudio realizado en el marco del proyecto de investigación 1/282. Parcialmente financiado por la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), Argentina. Una versión preliminar de este trabajo fue presentada como ponencia en la VI Reunión Latinoamericana de Educación en Física, 19 al 21 de octubre del 2005, Universidad de Antioquia, Medellín (Colombia).

** Profesora del Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina; Profesora del Departamento de Biología, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan, Argentina. E-mail: cescude@unsj.edu.ar.

*** Profesora del Departamento de Física y de Química, Facultad de Filosofía Humanidades y Arte (FFHA), Universidad Nacional de San Juan, Argentina. E-mail: sbg1957ar@yahoo.com.ar

**** Profesor del Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina. E-mail: ej Jaime@unsj.edu.ar

vimiento, como nexo entre la cinemática y la dinámica. Tratándose de un estudio en el que el contenido disciplinar es de gran importancia, resulta pertinente el empleo de la *teoría de los campos conceptuales* de Vergnaud para el análisis de los procesos desarrollados por los alumnos.

El objetivo de esa teoría es el de ofrecer un referencial que permita comprender las continuidades y rupturas entre conocimientos –en los estudiantes– desde el punto de vista de su contenido conceptual, entendiéndose como *conocimiento* tanto el saber hacer como el saber expresar (Vergnaud, 1990: 135).

Un aspecto interesante de este trabajo se revela en el hecho de haber podido develar que el tópico *fuerzas de rozamiento* forma parte de los contenidos omitidos en la enseñanza de la física en Argentina en el nivel medio. Sin embargo, éste es un factor importante a tener en cuenta a la hora de iniciar su conceptualización en la universidad.¹

La teoría de Vergnaud hasta ahora se ha utilizado principalmente como referencial para la educación matemática. Este trabajo intenta profundizar este punto en la educación universitaria básica en física, continuando con otros trabajos realizados en el nivel medio y el universitario.

Para realizar este estudio se empleó como instrumento principal de análisis las producciones escritas de sesenta alumnos de primer año de la Universidad, particularmente de la carrera Licenciatura en Geología. Se construyeron categorías que permiten, por un lado, profundizar en algunas cuestiones relacionadas con los contenidos, y por otro, ordenar las diversas producciones de los alumnos, de manera que faciliten un abordaje más sistémico.

La aplicación de esta metodología de trabajo ha desplegado diversos caminos para la investigación. Esto abre simultáneamente nuevas posibilidades para generar alternativas diferentes para la enseñanza en la resolución de problemas.

MARCO TEÓRICO

La *teoría de los campos conceptuales* de Vergnaud² es una teoría psicológica de los conceptos (Vergnaud, 1990: 147), una teoría cognitivista del proceso de conceptualización de lo real. Se trata de una teoría pragmática, en el sentido de que presupone que la adquisición de conocimientos es moldeada por situaciones, problemas y acciones del sujeto en esas circunstancias (Vergnaud, 1994: 42). Es decir, es por medio de su resolución que un concepto adquiere sentido para el alumno. Además, es una teoría de la complejidad cognitiva que contempla el desarrollo de situaciones progresivamente dominadas de los conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en esas situaciones, y de las palabras y símbolos que pueden eficazmente representar esos conceptos y operaciones para el individuo, dependiendo de su nivel cognitivo.

Gerard Vergnaud, director de investigación del *Centre National de Recherche Scientifique* (CNRS) de Francia, discípulo de Piaget, amplía y redirecciona, en su teoría, el foco piagetiano de las operaciones lógicas generales, de las estructuras generales de pensamiento, hacia el estudio del funcionamiento cognitivo del "sujeto-en-situación". Además de eso, a diferencia de Piaget, toma como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual de dominio de ese conocimiento (Vergnaud, 1994: 41; Franchi, 1999:

1 Autores como Arcodia e Islas (2004) lo relevaron y Leff (2002), desde otra óptica, señala como problemática la comprensión de la aceleración en el movimiento circular.

2 Una descripción de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y de sus implicaciones para la investigación y la enseñanza de las ciencias puede consultarse en Moreira (2002) y en Escudero (2005).

160). Para Vergnaud, Piaget no se dio cuenta de cuánto el desarrollo cognitivo depende de situaciones y de conceptualizaciones específicas necesarias para lidiar con ellas (1998: 181). Según él, Piaget tampoco percibió lo infructuoso que es intentar reducir la complejidad conceptual, progresivamente dominada por niños y jóvenes, a algún tipo de complejidad lógica general (1994: 41).

Vergnaud considera que un *concepto* es un triplete de tres conjuntos (Vergnaud, 1983: 393; 1990: 145; Franchi, 1999: 173): $C = (S, I, L)$, donde:

- *S*: conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto (el referente);
- *I*: conjunto de invariantes operatorios asociados al concepto (el significado);
- *L*: conjunto de representaciones lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones a las que él se aplica y los procedimientos que de él se nutren (el *significante*).

La teoría de los campos conceptuales destaca que la adquisición de conocimiento es moldeada por las situaciones y los problemas previamente dominados, y que ese conocimiento tiene, en consecuencia, muchas características contextuales (1996a: 117). Sin embargo, probablemente exista una laguna considerable entre los invariantes que los sujetos construyen al interactuar con el medio y los invariantes que constituyen el conocimiento científico.

Vergnaud asigna al término *situación* un significado, el de tarea o problema a resolver, significado que es limitado, pero amplio y variado a la vez.³ Para él, son las situaciones las que le dan sentido a los conceptos y éste no está en

las situaciones en sí. Un concepto se vuelve significativo para el sujeto a través de una variedad de situaciones y de diferentes aspectos del mismo concepto, que están envueltos en dichas situaciones. Al mismo tiempo, una situación no puede ser analizada mediante un único concepto, sino que se necesitan varios de ellos. Esta es la razón por la que deben estudiarse los *campos conceptuales*, y no situaciones aisladas o conceptos aislados (1994: 46).

Vergnaud llama *esquema* a una "organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones" (1990: 136; 1994: 53; 1996c: 201; 1998: 168). No es el comportamiento el que es invariante, sino la organización del mismo. Por tanto, un esquema es un universal que es eficiente para toda una gama de situaciones que puede generar diferentes secuencias de acción, de recolección de información y de control, dependiendo de las características de cada situación particular (1998: 172).

Los componentes de los esquemas, según Vergnaud (1990: 136; 1994: 46; 1996b: 11), son:

- *Anticipaciones del objetivo* a alcanzar, de los efectos a esperar y de las eventuales etapas intermedias.
- *Reglas de acción* del tipo "si... entonces...", que permiten generar la secuencia de acciones del sujeto; es decir, reglas de búsqueda de información y control de los resultados de la acción.
- *Invariantes operatorias*, que dirigen el reconocimiento y la toma de información de los elementos pertinentes de la situación a tratar. Son los conocimientos contenidos en los esquemas.
- Posibilidades de *inferencias* (o razonamientos), que permiten "calcular" —aquí y ahora— las reglas y anticipaciones a partir de las

3 La idea de *situación* de Vergnaud puede aceptarse limitada, en el sentido de que no se entiende como una *situación didáctica fundamental* al estilo de Brousseau. Para Vergnaud, la idea de *situación* es lo suficientemente "indefinida" como para incluir bajo ella problemas, tareas, preguntas, tanto las tradicionalmente escolares como las que están fuera de ese ámbito, a condición de que permitan llevar a los estudiantes a interrogarse sobre determinadas relaciones complejas y especialmente sobre la coherencia del sistema en estudio (Escudero, Moreira y Caballero, 2003).

informaciones e invariantes operatorias de los que dispone el sujeto.

Para Franchi (1999: 165), la ausencia de una conceptualización adecuada está en el origen de los errores sistemáticos cometidos por los alumnos. Pero son las *invariantes operatorias* las que articulan teoría y práctica, es decir, las que hacen la articulación esencial, ya que la percepción, la búsqueda y la selección de la información se basarían completamente en el sistema de *conceptos-en-acción* disponibles en el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias) y de *teoremas-en-acción* subyacentes a su comportamiento (165).

Un teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; un concepto-en-acción es una categoría de pensamiento considerada como pertinente (1996c: 202; 1998: 167).

Acordamos con Moreira (2002) en que Vergnaud, al rescatar y enriquecer el concepto *esquema* introduciendo los conceptos *teorema-en-acción* y *concepto-en-acción*, al definir *concepto* como un triplete, al colocar la conceptualización en el centro del desarrollo cognitivo, al priorizar la interacción sujeto-situaciones y, como no podría dejar de ser, al definir *campo conceptual*, provee un referencial muy rico para comprender, explicar e investigar el proceso de aprendizaje significativo.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El estudio se basó en el análisis de la resolución de una situación problemática por alum-

nos del primer curso de física de la carrera Licenciatura en Geología. Los datos se registraron durante el 2005 en la cátedra Física I. El crédito horario fue de seis horas, de despliegue anual y con cursado simultáneo de la asignatura Matemática, circunstancia que en algunos puntos de interés actuó como factor limitante.

El grupo estuvo constituido por sesenta alumnos, heterogéneo en relación con los conocimientos previos y a los hábitos de estudio, ya que provienen de instituciones y orientaciones diversas. El problema analizado fue uno de los propuestos en el segundo parcial rendido por los alumnos y corresponde al tipo de problema formal.⁴

Para el análisis partimos del hecho de que, muy probablemente, el uso de los signos y símbolos en las fórmulas "adaptadas" a la situación problemática trabajada permite desocultar el significado de lo que se ha querido o podido expresar en el momento de la resolución. Es decir, el "habla" se ha utilizado para detectar inconsistencias, infiriendo sus significados aprendidos (o no). Se puede recuperar el sentido, siguiendo a Vergnaud (1990: 158), como la relación del sujeto con las situaciones y los significantes.

Vergnaud, al considerar un concepto como un triplete de tres conjuntos, uno de ellos el conjunto "L" de las representaciones lingüísticas o no-lingüísticas que permite representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones a las que él se aplica y los procedimientos que de él se nutren (significantes), nos ofrece una pista muy importante para nuestra búsqueda y consecuentes hallaz-

4 *Formal*: lenguaje en el que se expresa la solución, caracterizado por referirse a un modelo o teoría físico-matemática. Entendemos el modelo o interpretación del cálculo abstracto (Nagel, 1968) como si se estuviese creando un mundo intermedio entre el dato empírico y el puro cálculo abstracto. Por tanto, se relaciona con la dimensión semántica. Así, un problema que emplea lenguaje formal requiere que el alumno construya representaciones internas coherentes con el conocimiento científico compartido. Ese proceso se llama *modelización* (Escudero, González y García, 2000).

gos. No debemos dejar de considerar que, como ya dijimos:

Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, durante el aprendizaje o en su utilización, es necesariamente considerar estos tres planos a la vez. No hay, en general, biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No podemos pues reducir el significado ni a los significantes ni a las situaciones (Vergnaud, 1990: 146).

Este punto no es menor. Diferentes autores coinciden en manifestar que las expresiones algebraicas son tan abstractas que sus significados son frecuentemente "fugaces", contribuyendo a la transferencia y a la interpretación erróneas.

DISCUSIÓN Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS

El enunciado de la situación problemática y su solución son las siguientes (véase figura 1): supongamos ahora que un automóvil de masa $m = 900 \text{ kg}$, va a describir una curva cuyo radio es $R = 30 \text{ m}$, en una carretera plana y horizontal.

- a) Si la velocidad del auto es $v = 10 \text{ m/s}$, ¿cuál es el valor de la fuerza centrípeta que deberá actuar sobre él para que consiga entrar en la curva?
- b) Si el coeficiente de fricción entre los neumáticos y la carretera es $\mu = 0,50$, ¿cuál es el valor máximo de la rapidez que el automóvil podría desarrollar en esta curva, sin derrapar? (Expresar también en km/h).

<p>a) $\begin{cases} \Sigma f_y = N - P = 0 \\ \Sigma f_x = fr = F_c = m v^2/R \\ F_c = 900 \text{ kg} (10 \text{ m/s})^2 / 30 \text{ m} \\ F_c = 300 \text{ N} \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} \Sigma f_x = Fr = m v^2/R \\ \Sigma f_y = N - P = 0 \rightarrow N = P \end{cases}$</p> <p style="text-align: center;">$v_{max} = 12,12 \text{ m/s} \rightarrow 12,12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \Rightarrow v_{max} = 43,6 \text{ km/h}$</p>	<p>$R = 30 \text{ m}$ $v = 10 \text{ m/s}$ $m = 900 \text{ kg}$</p> <p>$\mu_{max} N = m v^2/R$ $\mu_{max} m g = m v^2/R$ $v_{max} = \sqrt{\mu g R}$</p>	
---	---	--

Figura 1. Enunciado y solución de la situación problemática analizada en esta investigación.

Un estudiante, para resolver este problema, necesita captar el sentido hacia adentro de la dirección radial de la aceleración centrípeta y que cualquiera que sea la naturaleza de las fuerzas que operen sobre el objeto en el movimiento circular uniforme, la resultante de todas ellas deberá: 1) estar en la dirección ra-

dial; 2) tener una magnitud mv^2/r . Aunque la rapidez del objeto permanezca constante, existe aceleración y, en consecuencia, una fuerza neta, ya que la dirección de la velocidad está cambiando. En la situación bajo análisis, además de dos fuerzas verticales —el peso mg y una fuerza normal N —, una fuerza horizon-

tal F debe actuar sobre el automóvil. La fuerza F genera la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento en círculo. Esta dirección se retiene, guarda, restringe, reserva en el límite, cuando $At \rightarrow 0$; es decir, para la aceleración instantánea en el tiempo t . En nuestro caso, esta fuerza proviene de la fuerza de fricción lateral ejercida por la carretera sobre las llantas. Tampoco se tiene la garantía de que sean lo suficientemente grandes siempre.

Este problema no integra conceptos⁵ fundantes de la mecánica, como son *interacción* y *energía*, aunque posibilita un encuentro más primordial que permitiría sustentar nociones de mayor estatus. El estudiante, al resolver el problema, ha tenido que poner en juego una concepción de fuerza de fricción más general que la utilizada cuando las trayectorias son rectilíneas; es decir, como simple oposición al movimiento, y elaborar que la fuerza de fricción es la fuerza actuante que permite el cambio en la dirección de la velocidad.

Como se puede advertir, para resolver el ítem (a) se requirieron nociones muy básicas referidas al empleo de algoritmos, compatible con un razonamiento mecánico y lineal; mientras que el ítem (b) precisa —aparentemente— de una mínima reflexión que permita elaborar un modelo de la situación física y trazar una vía de resolución.

Por elemental que parezca, para el alumno no es lo mismo. Si se queda en cinemática y dinámica de la partícula para trayectorias rectilíneas, no llega a plantear el ítem (a). En menor medida se llega a captar que están en juego dos condiciones de contorno distintas para una misma situación. Ni la fuerza de fricción, ni la aceleración centrípeta (ni la fuerza centrípeta) son concepciones alternativas. Esta-

mos frente a un conocimiento en construcción.

Autores como Greca y Mallmann (1997) y nosotros mismos (Escudero y Moreira, 2002; Escudero, 2005) señalamos y profundizamos en la confusión entre nociones como *movimiento*, *velocidad* y *aceleración*. El problema aquí analizado permitiría redescubrir esta confusión en el dominio de la dinámica del movimiento circular.

De un total de 60 exámenes recolectados, 46 presentaron una solución a la situación planteada.⁶ Dicha evaluación ha constado de seis ítems; este problema se ubica en el último lugar y la evaluación ha abarcado los tópicos de dinámica de las traslaciones.

La valoración de estos aspectos permite diferenciar, en primera instancia, dos grandes grupos:

1. Alumnos que estiman que los dos ítems están relacionados.
 2. Alumnos que identifican la independencia de los dos ítems.
1. En relación con el primer grupo, integrado por treinta y tres alumnos, el tipo de dificultades se encuentra más distribuido —estamos hablando de cinco categorías (subgrupos)— y asociado a esquemas muy elementales.

Para concebir las categorías, ha sido necesario que los investigadores realicen inferencias sobre las posibles representaciones de los estudiantes al resolver el problema. Se ha considerado como base para el análisis del discurso escrito, la unidad *enunciado-solución*, abordándola como conversación en la solución de un problema. La misma se juzga como un tipo de inter-

5 En otros trabajos realizados en la misma línea (Escudero, 2001; Escudero y Jaime, 2003), ha sido de interés estudiar la resolución de *problemas integrativos*. Por *problema integrativo* entendemos aquel enunciado que involucra contenidos de física de cierta especificidad, pero que no se centran en un único tópico o tema en exclusividad (Escudero, González y García, 2000).

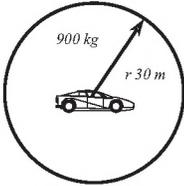
6 Esta cifra es de un 77% de soluciones presentadas y se ha mantenido del mismo orden que en otros trabajos con universitarios (Escudero y Jaime, 2003; Escudero, Moreira y Caballero, 2005).

cambio conversacional, como una unidad interactiva mínima (Escudero, 2005).⁷

- *Categoría 1:* $N_1 = 6$

Los estudiantes de esta categoría no muestran noción alguna que dé cuenta que han identificado la trayectoria del automóvil como curvilínea. No se ha desarrollado el

concepto de movimiento. Sólo "tantean" algunas fórmulas para presentar una solución. Apenas articulan algunas nociones de cinemática. Ni siquiera han reconocido una fórmula como la pedida en (a). Mayoritariamente no acompañan la solución con representaciones externas esquemáticas. Uno de los estudiantes de esta categoría resuelve como se muestra en la figura 2.



Alumno núm. 9

$$m = 900 \text{ kg}$$

$$r = 30 \text{ m}$$

$$v = 10 \text{ m/s}$$

$$m/s^2 = 8820 \text{ N}$$

$$\mu = 0,50$$

$$r = C^2 \times 2\pi$$

$$r = 0,5^2 \times 360^\circ$$

$$F = m \times g$$

$$F = 900 \text{ kg} \times 9,8$$

$$t = \frac{\sqrt{2 \cdot x}}{g}$$

$$t = \frac{\sqrt{2 \cdot 30 \text{ m}}}{9,8 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 6,12 \text{ s}$$

$$r = 90^\circ$$

$$R = 30\text{m}/6,12\text{s} = 4,90 \text{ m/s} \Rightarrow \text{rapidez}$$

$$R = 4,90 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 17,64 \text{ km/h}$$

$$R = 17,64 \text{ km/h} \Rightarrow \text{rapidez}$$

Figura 2. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 9.

- *Categoría 2:* $N_2 = 11$

Los alumnos pertenecientes a esta categoría presentan elementos aislados y primitivos. No han puesto en juego la noción más

elemental de fuerza de fricción. No controlan mínimamente unidades. Un ejemplo de la solución concerniente a la categoría 2 se muestra en la figura 3.

$$m = 900 \text{ kg}$$

$$R = 30 \text{ m}$$

Alumno núm. 52

$$F_c = m \times a_c \quad a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2 \text{ m/s}}{30 \text{ m}} = \frac{100}{30} = 3,33 \text{ m/s}$$

$$F_c = 900 \text{ kg} \times 3,33 \text{ m/s} = 2,99 \text{ Kg}$$

Figura 3. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 52.

⁷ Una explicación más exhaustiva de la metodología puede consultarse en Escudero, Moreira y Caballero (2003).

Como puede advertirse, este alumno necesita de una concatenación de dos funciones para calcular la fuerza centrípeta en el ítem (a), como tampoco ha trabajado las unidades como herramientas de control en la realización de la tarea.

• *Categoría 3:* $N_3 = 7$

Los estudiantes que pertenecen a esta categoría resuelven sólo el ítem (a). Calculan la fuerza centrípeta, reconocen la fórmula y reemplazan. Para ellos no parece tener sentido la pregunta (b). Por un lado, se constituye en el dato; y por otro, el diagrama de cuerpo libre ofrece grandes dificultades todavía (véase figura 4).

• *Categoría 4:* $N_4 = 2$

En esta categoría se encuentran los alumnos que, aun contando con algunos conceptos de dinámica, no identifican ni plantean que se trata de condiciones distintas. Es decir, para ellos permanecen indiferenciadas las dos condiciones de contorno. Recalculan algún dato ya dado en el enunciado —sobre todo la velocidad—, por ejemplo, reemplazando directamente el valor de la fuerza centrípeta hallada ($2997N=3000N$), volviendo a recalcular en (b) la velocidad en las condiciones del ítem (a). Utilizan el valor determinado en (a): $3000N$. La solución provista por el estudiante 52 es muestra de ello (véase figura 5).

Alumno núm. 15

$\left. \begin{array}{l} m = 900 \text{ kg} \\ R = 30 \text{ m} \\ V = 10 \text{ m/s} \end{array} \right\} \text{ Dato}$	$\left. \begin{array}{l} F_c = ? \\ R_{max} = ? \end{array} \right\} \text{ incógnita}$	
$\left. \begin{array}{l} \mu = 0,50 \end{array} \right\} \text{ Dato}$		
<p>(a) $a_c = v^2/R$</p> $a_c = \frac{(10\text{m/s})^2}{30 \text{ m}}$ $a_c = \frac{100\text{m}^2/\text{s}^2}{30 \text{ m}} = 3,33 \text{ m/s}^2$	$F_c = m \times a_c$ $F_c = 900 \text{ kg} \times 3,33 \text{ m/s}^2$ $F_c = 2997 \text{ N}$	
<p>(b)</p>		

Figura 4. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 15.

Alumno núm. 32		
$m = 900 \text{ kg}$ $R = 30 \text{ m}$ $v = 10 \text{ m/s}$ $\mu = 0,50$	(a) $a_c = v^2/r$ $a_c = \frac{100 \text{ m}^2/\text{s}^2}{30 \text{ m}}$ $ac = 3,33 \text{ m/s}^2$	(b) $fr_{max} = m \times v^2 / r$ $fr_{max} = a_c \times m$ $fr_{max} = 3,33 \text{ m/s}^2 \times 900 \text{ kg}$ $fr_{max} = 2997 \text{ N}$ $v = \sqrt{\frac{fr_{max} \cdot r}{m}}$ $v = \sqrt{\frac{2997 \text{ kg m/s}^2 \cdot 30 \text{ m}}{900 \text{ kg}}}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 5px;">$v = 9,99 \text{ m/s}^2$</div>

Figura 5. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 32.

- Categoría 5: $N_5 = 7$

Los estudiantes de esta categoría parecen distinguir embrionariamente las dos condiciones de contorno, pero siguen utilizando el valor calculado. Es decir, de alguna forma siguen "pensando" que no han cambiado las condiciones. Consideran la fuerza de fricción y determinan la velocidad:

$$TFx = 3000 \text{ N} - fr \wedge v = 6,85 \text{ m/s}$$

Muestran una solución reduccionista, donde la situación compuesta por dos condiciones de contorno distintas se ha simplificado, logrando una especie de tautología. Al utilizar fuerza centrípeta y fuerza de fricción —a su manera—, sugiere que pueden estar pensando en otra condición en (b), diferente a la de (a) (véase figura 6).

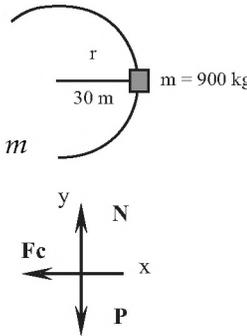
Alumno núm. 51		
	$v = 10 \text{ m/s}$ $F_c = ?$	(a) $a_c = v^2 / r$ $a_c = (10 \text{ m/s})^2 / 30 \text{ m}$ $a_c = 0,33 \text{ m/s}^2$
$\Sigma f_y = N - P = 0 \quad N = P$ $\Sigma f_x = F_c = m \cdot a_c$ $F_c = 900 \text{ kg} \times 0,33 \text{ m/s}^2$ $F_c = 300 \text{ N}$		
(b) $\mu = 0,50 \quad fr = \mu \cdot N \rightarrow fr = 0,5 \times 8820$ $- F_c - fr = m \cdot a_c \quad fr = 4410 \text{ N}$ $- 300 \text{ N} - 4410 \text{ N} = m \cdot v^2 / r$ $\frac{-4110 \text{ N}}{900 \text{ kg}} \cdot 30 \text{ N} = v^2$ $-\sqrt{137} = v_{max}$ $-11 \text{ m/s} = v_{max} \rightarrow v = -0,012 \text{ km/hr}$		

Figura 6. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 51.

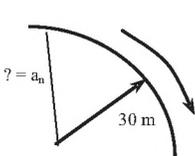
2. Con respecto al segundo grupo, de trece alumnos, se distinguen fundamentalmente dos subgrupos:

- Aquellos que muestran claridad conceptual desde todo punto de vista.
- Aquellos cuyas dificultades se asientan principalmente en cuestiones sintácticas o en carencias pertenecientes al dominio de la matemática.

• Categoría 6: $N_6 = 2$

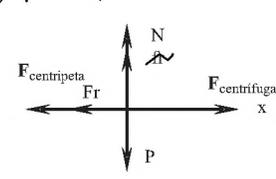
Los estudiantes de esta sexta categoría están integrados por aquellos que, aun contando con la identificación de distintas condiciones y con nociones procedentes de aceleración centrípeta, fuerza centrípeta, fuerza de fricción, etc., no han desarrollado todavía herramientas específicas de control de la tarea como, por ejemplo, el análisis dimensional (véase figura 7).

$m = 900 \text{ kg}$
 $R = 30 \text{ m}$
 $V = 10 \text{ m/s}$



$a_n = v_t^2/R = R \times \omega^2$
 $a_n = (10 \text{ m/s})^2/30 \text{ m} = 100 \text{ m}^2/\text{s}^2/30 \text{ m} = 3,33 \text{ m/s}^2$

(b) $\mu = 0,50$



$\sum f_x: F_{\text{centripeta}} - F_{\text{centrifuga}} - Fr = m a_n$
 $\sum f_y: N + fr - P = 0$
 $N + fr - P$

$\left\{ \begin{array}{l} \sum f_y: N - P = 0 \rightarrow N = P \\ \sum f_x: F_{\text{centripeta}} - F_{\text{centrifuga}} - Fr = m v^2/R \end{array} \right.$

$V_t = \frac{\sqrt{F_{\text{centrifuga}} - F_{\text{centripeta}} - \mu \cdot m \cdot g}}{R} = m$

~~$fr = m \cdot v^2/R$
 $-\mu N = m \cdot v^2/R$
 $-\mu mg = m \cdot v^2/R$~~

$vt = \frac{\sqrt{-\mu \cdot g}}{R} =$

Alumno núm. 53

Otra opción sería $-fr = m \times vt^2/R$
 $-fr = m \times -vt^2/R$
 $\mu \times m \times g = -m \times -vt^2/R$
 $-vt = \sqrt{\frac{-\mu \cdot g}{-R}} =$
 $\frac{-0,50 \cdot -9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{-30 \text{ m}} = \frac{2,21 \text{ m}}{5,47} = 0,40$

Figura 7. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 53.

Es más, en este alumno conviven dos referenciales indiferenciados que pugnan por "sobrevivir": el newtoniano y el cotidiano. Su diagrama de cuerpo libre muestra un máximo de fuerzas presentes sin todavía distinguir nociones como fuerza actuante y resultante, fuerza inercial en sistemas de referencia no inerciales, entre otras, así como la lucha interior en la búsqueda de la comprensión.⁸

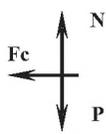
• Categoría 7: $N_7 = 11$

Estos alumnos parecen generar representaciones mentales en donde se integran coherentemente los elementos que propor-

ciona el enunciado, sus conocimientos previos y los datos calculados para determinar el tipo de movimiento que realiza el automóvil en una trayectoria curva, plana y horizontal. Su construcción supone una pertinente incorporación de relaciones necesarias sencillas: espaciales, geométricas, cinemáticas y dinámicas. Todos han considerado los ítems (a) y (b) como una situación con condiciones de contorno diferentes desarrolladas sobre la misma curva, y usan herramientas de control. La mayoría acompaña la resolución algorítmica con representaciones externas esquemáticas adecuadas: dibujo de la trayectoria y diagrama de cuerpo libre (véase figura 8).

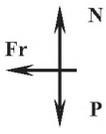
Alumno núm. 22

(a)



$m = 900 \text{ kg}$
 $v = 10 \text{ m/s}$
 $R = 30 \text{ m}$

(b)



$\mu = 0,50$
 $m = 900 \text{ kg}$
 $R = 30 \text{ m}$

$$\begin{cases} \sum f_y = N - P = 0 \\ \sum f_x = F_c = m \times v^2/r \end{cases}$$

$$F_c = 900 \times 10^2 / 30$$

$$F_c = 3000 \text{ N}$$

$$\begin{cases} \sum f_y = N - P = 0 \rightarrow N = P \\ \sum f_x = F_r = m \times v^2/r \\ \mu P = m \times v^2/r \\ v^2 = \mu P r/m \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\frac{0,50 \cdot 900 \cdot 9,8 \cdot 30}{900}}$$

$$v = 12,12 \text{ m/s} \approx 43,6 \text{ km/h}$$

Figura 8. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 22.

Una singularidad observada la constituye la resolución del alumno número 57, mostrada en la figura 9. Utiliza muy bien el principio de D'Alambert, a pesar de no haber sido enseñado de modo explícito. Al parecer, ha resultado funcional –para él– describir, consciente o inconscientemente, el

movimiento circular desde un sistema de referencia no inercial. Es un modo equivalente matemática, pero no cognitivamente. Así, parece precisar de menos recursos cognitivos o de menor nivel cualitativo, haciendo: $EF = F_c - fr = 0$ (véase figura 9).

8 Como otra opción aparece el marco newtoniano con claridad aparente.

Alumno núm. 57

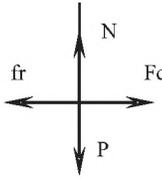
$m = 900 \text{ kg}$
 $R = 30 \text{ m}$

(a) $F_c = ?$
(b) $\mu = 0,50$
 $v_{max} = ?$
(km/h)

$v = 10 \text{ m/s}$
(a) $F_c = m \times v^2 / r$
 $F_c = 900 \text{ kg} \times 10^2 / 30$

$F_c = 3000 \text{ N}$

(b)



$\Sigma F_x = F_c - fr = 0$
 $F_c = fr$
 $m \times v^2 / r = \mu \times N$
 $v^2 = \mu \times N \times r / m$

$v = \sqrt{\frac{8820 \cdot 0,5 \cdot 30}{900}} \rightarrow v = 12,12 \text{ m/s}$

$12,12 \text{ m/s} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 43,6 \text{ km/h}$

Figura 9. Solución presentada a la situación problemática por el alumno número 57.

La fuerza centrífuga⁹ tiene el carácter de fuerza inercial en un referencial no inercial, como ya registramos en otro trabajo (Escudero, Moreira y Caballero, 2003).

En la tabla 1 se presenta una síntesis del análisis descrito.

¿QUÉ IDEAS ESTÁN EN JUEGO?

Un comentario especial merece en este problema la noción de *fuerza de fricción* que el estudiante ha construido hasta el momento. El concepto de fuerza de fricción más trabajado en aulas introductorias es, según los textos:

La fuerza de fricción por deslizamiento siempre se opone al movimiento relativo de los cuerpos y, por tanto, tiene dirección opuesta a la de la velocidad relativa entre los cuerpos (Alonso y Finn, 1995: 105).

Esta fuerza (fuerza de frotamiento dinámico) es siempre opuesta al movimiento; o sea, al vector v (Roederer, 2002: 94).

Es decir, que se opone al sentido de la velocidad. Sin embargo, no siempre es así. No es trivial para un estudiante tener que representar la fuerza de fricción como generadora de la fuerza centrípeta. ¡Hay que vencer esta idea!

Tabla 1. Síntesis del análisis

Categoría	1	2	3	4	5	6	7	No resuelven	Totales
Número de alumnos	6	11	7	2	7	2	11	14	60
Porcentajes	10	18,6	11,6	3,3	11,6	3,3	18,6	23,3	100

⁹ Las aceleraciones de Coriolis y la centrífuga son el resultado del movimiento de rotación relativo entre los observadores. No son aceleraciones debidas a alguna acción específica aplicada a la partícula (Alonso y Finn, 1995).

Expresar simplemente que la fuerza de fricción se opone al movimiento es incompleto. Comprender que la fuerza de fricción está actuando en la dirección radial de la curva es reconsiderar la idea de que la fuerza de fricción se opone al movimiento como característica intrínseca. Se opone a la tendencia del movimiento, en el sentido de proceso, desarrollo o propensión, más que de dirección, sentido o rumbo. Para expresar la solución, el estudiante ha tenido que construir un concepto de fricción más elaborado.

Al tratar estos temas introductoramente, algunos autores señalan, como puede verse en las dos citas siguientes, efectos de la fuerza de fricción como no siempre indeseables, quedando sobrentendidos movimientos del tipo rototraslatorios,¹⁰ y traslaciones en trayectorias curvilíneas, respectivamente.

La fuerza de fricción de cada cuerpo es de dirección opuesta a su movimiento relativo al otro cuerpo. Las fuerzas de fricción se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca contribuyen a él. Aun cuando no existe un movimiento relativo, pueden existir fuerzas de fricción entre superficies (Roederer, 2002).

Debemos señalar que los efectos de la fuerza de fricción no siempre son indeseables... Si no hubiera fricción, las ruedas patinarían y un automóvil no podría tomar una curva¹¹ (Alonso y Finn, 1995: 105).

Queda claro que la operacionalidad de los conceptos y sus relaciones debe ser probada en situaciones variadas. En una investigación se debe analizar el mayor número posible de actuaciones y esquemas para comprender en qué consiste, desde el punto de vista cognitivo, este o aquel conjunto de conceptos. Las nociones complejas, aun de la física elemental,

sólo se entienden a través de una diversidad de trabajos prácticos y teóricos. E involucra, de hecho, varias propiedades, cuya pertinencia es variable de acuerdo con la situación a tratar.

A continuación se puede observar cómo, en algunos casos, la fuerza de fricción no se opone a la dirección del movimiento. Los diagramas de cuerpo libre (figuras 11 a 13) dan cuenta de ello.

La masa $m_2 = 10 \text{ kg}$ se desliza sobre una mesa sin rozamiento. Los coeficientes de fricción estático y cinético entre m_2 y la masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ son respectivamente $0,6$ y $0,4$ (véase figura 10). (a) ¿Cuál es la aceleración máxima de m_1 ? (b) ¿Cuál es el valor máximo de m_3 , si m_1 se mueve con m_2 sin deslizamiento? (c) Si $m_3 = 30 \text{ kg}$, determinar la aceleración de cada masa y la tensión de la cuerda.

CONCLUSIONES

Resulta evidente que los alumnos que diseñan una resolución correcta y completa no sólo han construido los conceptos de un campo conceptual, sino que también han podido afianzar y ampliar sus esquemas de dominio. Han debido superar un concepto de fuerza de rozamiento por deslizamiento con validez local. Las distintas soluciones, aun en una misma categoría, muestran nociones diferentes de fuerza de fricción, en relación con la de trayectoria y fuerza centrípeta, sobre todo. A su vez, hay un grupo de dieciséis alumnos que podría estimarse que se encuentra en una etapa de transición, en la que es necesario trabajar en forma sistemática e intencionadamente, con estrategias específicas derivadas de las dificultades detectadas.

10 Permite redescubrir el concepto *fuerza de fricción* también en rototraslaciones, por ejemplo, rodadura, y en relación con nociones como *trabajo* y *energía*.

11 Quedando implícito cómo trabajar una situación como la dada. La fuerza de fricción no se encuentra en la misma dirección de v , sino en la dirección radial.

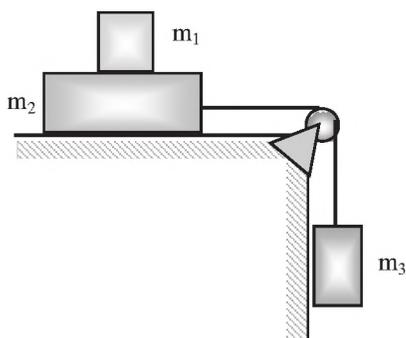


Figura 10

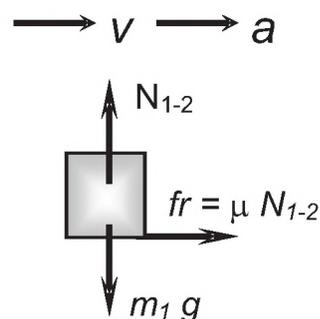


Figura 11. Diagrama de cuerpo libre

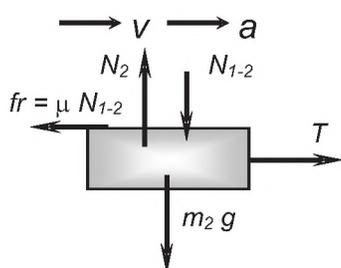


Figura 12. Diagrama de cuerpo libre para m_2

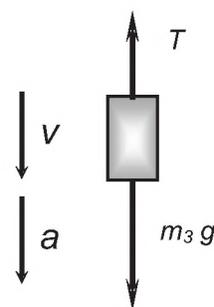


Figura 13. Diagrama de cuerpo libre para m_3

Muchas veces los docentes, los investigadores y las autoridades educativas perdemos de vista el largo camino que conlleva la construcción del conocimiento. No podemos darnos el lujo de desaprovechar la oportunidad que representan la EGB y el Polimodal,¹² en este sentido.

Este tipo de trabajo actúa frecuentemente como disparador de ideas, sobre todo para los profesores más inquietos, quienes podrán encontrar algunas marcas interesantes para incrementar los sustentos teóricos de la mediación en esta área disciplinar.

La profundización en la mirada permite identificar algunos núcleos de dificultades que, a

su vez, con la integración de otros datos, podrían ser objeto de hipótesis en trabajos con mayor grado de especificidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALONSO, M. y FINN, E. J., 1995, *Física*, Wilmington, Delaware, Adisson-Wesley Iberoamericana.

ARCODIA, F. e ISLAS, S., 2004, "El tratamiento de las fuerzas de roce en libros de texto", en: *Memorias VII Simposio de Investigadores de Educación en Física*, Santa Rosa, Argentina, pp. 596-606.

12 En Argentina, se denomina EGB a la Educación General Básica y Polimodal al ciclo de especialización en secundaria.

ESCUADERO, C., 2001, "Representaciones, modelos mentales y su relación con omisiones, aciertos y errores de actuación al resolver un problema de física", *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra, VI Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias, Barcelona España.

_____, 2005, "Inferencias y modelos mentales: un estudio de resolución de problemas acerca de los primeros contenidos de física abordados en el aula por estudiantes de nivel medio", Tesis doctoral, Universidad de Burgos, España - UFRGS (Brasil).

ESCUADERO, C.; GONZÁLEZ, S. y GARCÍA, M., 2000, "¿Se tiene en cuenta algún criterio cuando se elaboran prácticos de problemas en física?", *Revista de Enseñanza de la Física*, Córdoba, Argentina, vol. 13, núm. 2, pp. 5-12.

ESCUADERO, C. y JAIME, E., 2003, "Elementos para una conceptualización de la noción de cuerpo rígido en la resolución de un problema integrativo", *Memorias XIII Reunión Nacional de Educación en Física (REF XIII)*, Río Cuarto, Córdoba, Argentina.

ESCUADERO, C. y MOREIRA, M. A., 2002, "Resolución de problemas de cinemática en nivel medio: estudio de algunas representaciones", *Revista Brasileira de Pesquisa em Educaçao em Ciências (ABRAPEL)*, vol. 2, núm. 3, pp. 5-25.

ESCUADERO, C.; MOREIRA, M. A. y CABALLERO, C., 2003, "Teoremas y conceptos-enacción en clases de física introductoria en secundaria", *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, vol. 2, núm. 3, <http://www.saum.vigo.es/reec>

_____, 2005, "Un estudio sobre la conceptualización en alumnos universitarios de nociones de Física referidas a movimientos de

rotación", *Memorias VI RELAEF (VI Reunión Latinoamericana de Educación en Física)*, Medellín, Colombia, oct.

FRANCHI, A., 1999, "Considerações sobre a teoria dos campos conceituais", en: ALCÁNTARA MACHADO, S. D. et al., *Educação Matemática: uma introdução*, pp. 155-195.

GRECA, I. y MALLMANN, L., 1997, "Modelos mentais do conceito de força", *Atas do I Encontro Nacional de Pesquisa em ensino de Ciências (I ENPEC)*, Brasil, pp. 280-293.

LEFF, H., 2002, "Acceleration for circular motion", *Am. J. Phys.*, vol. 70, núm. 5, pp. 490-492.

MOREIRA, M. A., 2002, "A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciencias e a pesquisa nesta área", *Investigações em Ensino de Ciências*, Brasil, vol. 7, núm. 1, <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

NAGEL, E., 1968, *La estructura de la ciencia*, Buenos Aires, Paidós

ROEDERER, J., 2002, *Mecánica elemental*, Buenos Aires, Eudeba.

VERGNAUD, G., 1983, "Actividad y conocimiento operatorio", en: COLL, C., *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, Siglo XXI, pp. 91-104.

_____, 1987, *Problem solving and concept development in the learning of mathematics*, Tübingen, EARLI, Second Meeting.

_____, 1990, "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núm. 23, pp. 133-170.

_____, 1994, "Multiplicative conceptual field: what and why?", en: GUERSHON, H. y CONFREY, J., eds., *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, N.Y, State University of New York Press, pp. 41-59.

_____, 1996a, "Education: the Best Part of Piaget's Heritage", *Swiss Journal of Psychology*, vol. 55, nums. 2-3, pp. 112-118.

_____, 1996b, "A trama dos campos conceptuais na construação dos conhecimentos", *Revista de GEMPA*, Porto Alegre, Brasil, num. 4, pp. 9-19.

_____, 1996c, "Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica", *Perspectivas*, vol. 26, núm. 10, pp. 195-207.

_____, 1998, "A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17, núm. 2, pp. 167-181.

REFERENCIA

SCUDERO, Consuelo; GONZÁLEZ, Sonia y JAIME, Eduardo "El análisis de conceptos básicos de física en la resolución de problemas como fuente generadora de nuevas perspectivas. Un estudio en dinámica del movimiento circular", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVII, núm. 43, (septiembre-diciembre), 2005, pp. 63-78.

Original recibido: septiembre 2005

Aceptado: noviembre 2005

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.