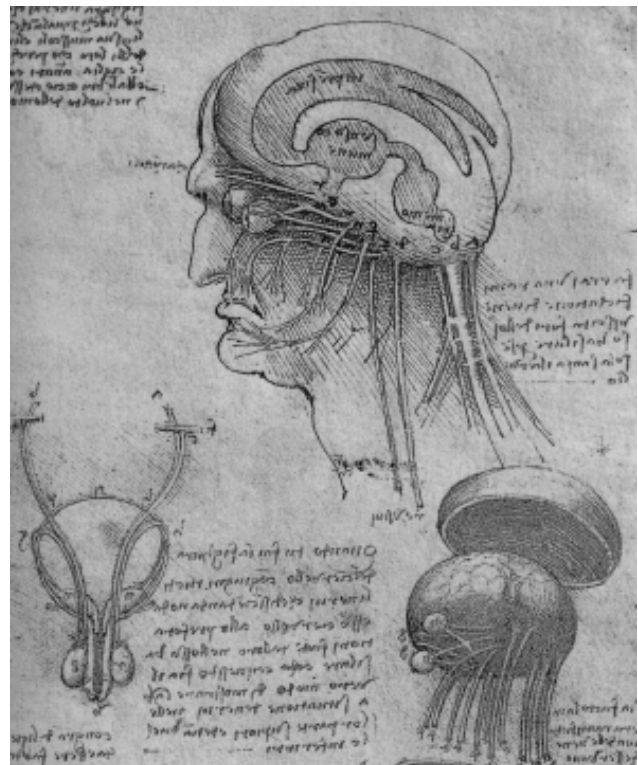


ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS INTERACCIONES MENTALES DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO SOBRE EL ENTENDIMIENTO DEL CONCEPTO *MULTIPLICACIÓN*

Roberto Figueroa Molina
Carlos Utria Echeverría
Rafael Colpas Castillo
Antonio Araujo Pereira



Leonardo da Vinci,
Globos oculares.

RESUMEN

REVISTA

EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

RESUMEN

ABSTRACT

ABSTRACT

PALABRAS CLAVE

PALABRAS CLAVE

RESUMEN

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS INTERACCIONES MENTALES DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO
SOBRE EL ENTENDIMIENTO DEL CONCEPTO MULTIPLICACIÓN

Este artículo presenta los resultados de la investigación cuyo propósito consistió en explorar cómo los estudiantes de sexto grado de bachillerato construyen o interiorizan el concepto multiplicación desde los inicios de su educación formal hasta la que actualmente poseen.

RÉSUMÉ

ÉTUDE EXPLORATOIRE DES INTERACTIONS MENTALES DES ÉTUDIANTS DE SIXIÈME SUR LA
COMPRÉHENSION DU CONCEPT DE MULTIPLICATION

Cet article présente les résultats de la recherche dont le but consistait à explorer comment les étudiants de la sixième année du baccalauréat colombien construisent ou intériorisent le concept de multiplication depuis les débuts de leur éducation formelle jusqu'à ce qu'ils possèdent actuellement.

ABSTRACT

EXPLORATORY STUDY OF MENTAL INTERACTIONS OF SIXTH GRADERS ON THE CONCEPTUAL
UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION

This article presents the results of the investigation with the purpose of exploring how sixth-grade, high-school students built or interiorized the concept of multiplication from the beginning of their schooling up until present day.

PALABRAS CLAVE

*Interacciones mentales, multiplicación, entrevista reconciliadora, enseñanza de las matemáticas.
Mental interactions, multiplication, reconciling interview, teaching of mathematics.*

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LAS INTERACCIONES MENTALES DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO SOBRE EL ENTENDIMIENTO DEL CONCEPTO *MULTIPLICACIÓN**



Roberto Figueroa Molina**
Carlos Utria Echeverría
Rafael Colpas Castillo
Antonio Araujo Pereira

PRESENTACIÓN

Documentos recientes relacionados con la reforma educativa en matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics —NCTM— Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas, 1989; National Research Council —Concilio Nacional de Investigaciones—, 1989), han hecho un llamado para minimizar el énfasis en los cálculos y hechos, y brindar uno mayor al entendimiento de conceptos (comprensión), pre-conceptos, interacciones mentales, solución de problemas, aplicaciones y comunicación de las ideas matemáticas, y el desarrollo en los aprendices de un entendimiento matemático comprensivo y con la suficiente flexibilidad para aplicar los conceptos en una amplia gama de problemas del mundo real (Simon y Blume, 1994).

Como parte de esta propuesta, fue necesario reconocer y analizar el concepto *multiplicación* como un aspecto de razonamiento cuantitati-

vo que involucra procesos necesarios en problemas y situaciones relacionadas con las operaciones propias a aquél (Thompson, 1989). ¿Cómo el individuo adquiere este concepto? ¿Cómo lo internaliza, desarrolla, metacogniza y lo aplica?

Cuando los estudiantes son expuestos a experiencias que convergen con los valores y conocimientos con los cuales pueden hacer uso de los niveles de representación que poseen sobre la multiplicación (Barody, 1985; Steffe, 1988 y Kouba, 1989), estas concepciones pueden alterar el proceso formal del aprendizaje de la multiplicación. Esto se debe a que pueden aplicar ciertos conocimientos sobre la multiplicación —y así lo hacen—, mediante los niveles de representación de la multiplicación, antes de conocer el concepto o los símbolos formales de ella (Kouba y Franklin, 1995).

* Trabajo presentado en el Seminario sobre Investigación Descriptiva, Universidad de Puerto Rico, 1997.

** Profesores de la Universidad del Atlántico, Miembros del Grupo GECIT, reconocido por Colciencias.
E-mail: roferguireo@hotmail.com.

Por tanto, este aspecto del razonamiento matemático puede solaparse con otros estudios del campo científico que abordan las ideas previas, preconcepciones y errores conceptuales. El problema ha sido estudiado en otros aspectos matemáticos como el de fracción (Melun, 1994), multiplicación y división (Kouba y Franklin, 1995; Clark y Kamii, 1996).

La *multiplicación* es un concepto que se desarrolla lentamente a través de la vida escolar del estudiante. Requiere de bases conceptuales y operativas de la suma, que a su vez se cimienta sobre los conceptos *conjunto*, *relaciones* y *funciones*. Esto sugiere que, con el tiempo, el estudiante pasa por los procesos de asimilación y acomodación del concepto en sus esquemas mentales, pero intercalando los escenarios en los cuales se da la experiencia. En la medida que el estudiante pasa de un grado escolar a otro, se incrementan sus conocimientos y la concepción sobre la multiplicación. Ello implica que un estudiante de primer grado conoce menos del concepto que uno de quinto, y así sucesivamente hasta el grado duodécimo.

A través de este estudio, se pretendió describir cómo el estudiante de sexto grado ha construido o internalizado el concepto *multiplicación*, desde su inicio en los estudios formales y el proceso que ha seguido para elaborar la percepción sobre el concepto que hoy posee.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Muchos de los aspectos o características que se han estudiado con relación a las concepciones que tenemos los humanos de ciertos fenómenos u objetos y sus interacciones cognitivas, aún después de haber recibido instrucción, prosiguen vigentes, aunque el esfuerzo por modificarlas continúa. La exploración sobre la percepción que poseen los estudiantes, particularmente los de sexto grado, sobre el concepto *multiplicación*, está permeada por una serie de factores específicos, tales como:

- La multiplicación generalmente se le presenta a los estudiantes en el segundo grado y proyectada simplemente como una forma rápida para hacer sumas repetitivas (Fennell, Reys y Webb, 1991).
- Los niños suman en lugar de multiplicar (Hart, 1981; Kamii y Livingston, 1994).
- Los niños con algún tipo de dificultad en los cálculos, a menudo presentan problemas con el significado de multiplicación (Lindquist, 1989; Piaget, 1987).
- Cuando los niños no conocen un “producto”, no pueden computarlo a partir de lo que conocen. Esta dificultad contrasta con la facilidad de los niños en calcular la suma desconocida. por ejemplo: cuando un niño conoce que $6 \times 6 = 36$, esto no ayuda a muchos niños a multiplicar 7×6 (Kamii y Livingston, 1994).
- Estrategias metodológicas de la enseñanza centrada en la repetición, memorización y evaluación acumulativas. Autores de textos de matemáticas ignoran las deficiencias conceptuales de sus contenidos, lo cual disminuye la posibilidad de aplicar procesos de enseñanza y aprendizaje significativos (Figuerola, 1996).
- Enseñanza focalizada en la solución de ejercicios mediante algoritmos, convirtiendo a los estudiantes en simples mecánicos, restándole importancia a los procesos descriptivos y explicativos que facilitan en el alumno una mejor interpretación del concepto *multiplicación* (Figuerola, 1996).

Cada una de estas situaciones puede desarrollarse como estudio de investigación. El nuestro se restringió a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la concepción de los estudiantes de sexto grado acerca del concepto *multiplicación*?

2. ¿Qué procesos o interacciones mentales desarrollan los estudiantes de sexto grado para aprender y expresar el concepto *multiplicación*?

JUSTIFICACIÓN

Cuando se abordan los procesos cognoscitivos como un sistema aislado de las interacciones educativas, se confían las transformaciones del conocimiento a la desidia y a la pérdida de credibilidad y cientificidad de las corrientes renuentes a estas nuevas tendencias investigativas. Por eso, considerar el pensamiento como algo evolutivo en constante transformación procesual y buscar los procesos de construcción e interpretación de las regularidades naturales y representativas, determinaron la importancia del desarrollo de este estudio.

¿Cuántas veces se ha escuchado: “¿Por qué mi hijo no aprende matemáticas? ¡He ensayado todos los métodos para que pueda aprender matemáticas, y aún no lo he logrado! ¿Qué le pasa a este niño?”? Esta preocupación no es sólo de la madre o padre desconsolado, sino también de todos los que, de una u otra forma, se encuentran inmersos dentro de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Consciente del problema relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, era necesario explorar las interacciones mentales que realizan los niños para construir y expresar el concepto *multiplicación*. El propósito de este estudio consistió en identificar el proceso utilizado para llegar a la transformación de estas preconcepciones, sin considerar al estudiante como el único culpable de tan importante problema, sino presentarle el procedimiento aceptado por la comunidad de expertos para llegar a la construcción del conocimiento.

Este proceso debe llevarnos a la reconstrucción de políticas que sean del conocimiento

de los administradores de los programas, como los encargados, en última instancia, de aceptar o rechazar los planteamientos surgidos del estudio. Las recomendaciones, basadas en los hallazgos de este estudio, pueden ser utilizadas para la elaboración de estrategias metodológicas que faciliten la enseñanza y el aprendizaje del concepto *multiplicación*.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Entre los estudios afines a esta investigación se encuentran:

- Clark y Kamii (1996), quienes manifiestan en su trabajo que los niños que desarrollan la suma requieren de la aplicación de un orden superior de pensamiento para la multiplicación. En esa investigación se entrevistaron individualmente a 136 niños de primero a quinto grados, y se utilizaron tareas piagetanas que permitieron determinar el desarrollo del pensamiento de la suma a la multiplicación. Se encontró que en un 45% de los estudiantes, el “pensamiento multiplicativo” comienza a aparecer en los inicios del segundo grado y se desarrolla lentamente. Sólo un 48% de los estudiantes del quinto grado demostró alguna consistencia en el uso del “pensamiento multiplicativo”. Clark y Kamii concluyen que la introducción de la multiplicación en el segundo grado es apropiada, y que los educadores no deben esperar hasta el quinto grado para enseñar la multiplicación a todos los niños.

La relación de esta propuesta con el estudio permite consolidar algunos elementos de juicio sobre los cambios y transformaciones que puede sufrir el concepto *multiplicación* en la estructura de pensamiento de los alumnos. En otras palabras, se intenta identificar las relaciones entre las interacciones mentales de los alumnos y las acciones que realizan para llegar a la construcción del concepto.

- Page (1974) afirma que, de acuerdo con su propia experiencia en el salón de clases, los niños no tienen problemas con el concepto en sí, sino que se les hace difícil entender la relación entre el concepto y su representación numérica. Los niños llegan al primer grado con un entendimiento intuitivo de la resta. Una de las tareas en el aula, según los estándares de matemáticas, consiste en crear el nexo entre los conocimientos previos del niño y las matemáticas. Es necesario proveer una variedad de situaciones donde se utilice la resta para que el niño pueda ampliar el campo de aplicación de dicha operación matemática. El problema surge cuando el niño debe establecer una relación entre la situación y una presentación numérica (regularmente se olvida del lenguaje, el cual es crucial para realizar las conexiones cognitivas). Se necesita ofrecer significados al proceso algorítmico a través del lenguaje.

Además, Page identifica, en su trabajo, algunos aspectos de fundamental importancia en las interacciones mentales que están relacionadas con el lenguaje. Considera que el lenguaje posibilita que el estudiante integre lo teórico con lo operativo en la multiplicación.

- Cramer y Karnowski (1995) tratan de descubrir la importancia del lenguaje en las representaciones matemáticas. Basados en el modelo Lesh Translation Model, los autores enfatizan específicamente la importancia de la comunicación en el aprendizaje de las matemáticas en el proceso de instrucción. El lenguaje ayuda a los niños a construir nexos entre sus experiencias matemáticas informales y los símbolos abstractos utilizados en matemáticas. El lenguaje facilita las conexiones entre las diferentes representaciones matemáticas y las ideas. La escritura sobre las matemáticas ayuda al estudiante a profundizar su entendimiento.

Se puede definir el *entendimiento de las matemáticas* como la habilidad para representar una idea matemática en diversas formas y realizar conexiones entre las diferentes representaciones. El lenguaje matemático informal del estudiante es un mediador entre el significado y las diferentes representaciones; adicionalmente, puede suplementar la abstracción de ideas matemáticas de los estudiantes.

- Kouba y Franklin (1995) concluyen que los niños se desempeñan pobremente en los problemas de multiplicación y división, debido al uso persistente de estrategias inadecuadas para resolver este tipo de problemas matemáticos, reforzados inadvertidamente por una serie de factores. Uno de éstos reside en que los problemas de multiplicación y división en los grados K-4¹ se limita a operaciones con números enteros. Esta situación no ayuda a que los niños puedan percibir la realidad, y lleva a que concluyan “falsamente” que la multiplicación siempre produce números grandes y la división, números pequeños.

Los niños necesitan experiencias con situaciones concretas y que se les guíe y oriente para el entendimiento de modelos a escala (Steffe, 1988). Las investigaciones muestran (Kouba, 1989) que los niños aprehenden mejor cuando pueden utilizar diferentes representaciones para las situaciones de multiplicación y división, de manera que puedan expresar las relaciones existentes entre dichas representaciones o modelos. Muchos niños realizan sus primeras relaciones matemáticas de la multiplicación y la división empleando modelos o representaciones relacionadas con la suma y la resta.

Los maestros deben motivar a los estudiantes para que apliquen estrategias que les permitan encontrar sentido con su experiencia cotidiana. Los niños obtienen ren-

1 Grado correspondiente en nuestro sistema de educación al cuarto grado de primaria.

dimientos académicos adecuados cuando pueden desarrollar sus propias historias matemáticas (orales o escritas) de multiplicación o división, y utilizar modelos para representar sus historias. Los estudiantes, en sus diferentes niveles, pueden lograr progresos en el aprovechamiento matemático, si se les permite comparar sus ejecuciones con la de otros estudiantes que estén ubicados en un nivel más avanzado. Esto puede lograrse mediante la enseñanza cooperativa y la planificación de actividades relacionadas con preguntas del medio, en secuencias o de actividades de exploración.

- Lindquist (1989) afirma que ningún algoritmo simple es el "correcto" para enseñarse. Al igual que en la suma y en la resta, cuando se le permite al estudiante crear sus propios algoritmos multidígitos, aumenta la comprensión y la flexibilidad en el uso de las operaciones matemáticas. El niño puede explicar lo que hizo y demostrar la validez de su algoritmo inventado a través de la manipulación de objetos físicos o mediante la creación de arreglos pictóricos. El uso de algoritmos informales tomara más tiempo; sin embargo, el uso de dicho tiempo produce un ahorro del mismo en la práctica de reglas matemáticas y aumenta la comprensión y la motivación del niño.
- Norwood y Carter (1994) describen cómo los estudiantes, a través de la escritura de un diario, muestran el entendimiento respecto a cualquier concepto matemático. Mediante el diario personal, el estudiante puede demostrar si domina simplemente la parte mecánica de la multiplicación, pero no el concepto, o si posee ambos dominios. Este diario también se emplea para repasar o evaluar las ideas de los estudiantes sobre algún tema antes de su introducción. Además, se utiliza como actividad de evaluación para determinar cuán bien los estudiantes entienden el tema que se está desarrollando en clase. La estructura de los

diarios personales traen a la luz pensamientos y entendimiento en un ambiente típico de salón.

- Budget, Turner y Cooney (1996) consideran que para conocer y entender cómo los estudiantes procesan las operaciones matemáticas, es necesario observar, escuchar y recopilar evidencia de lo que los estudiantes están aprendiendo. Para lograrlo, es pertinente examinar el pensamiento del estudiante a través de sus interacciones con las tareas.

Esta investigación fue en esa dirección. Se pretendió examinar cómo los estudiantes organizaron el concepto *multiplicación* en su estructura de pensamiento. Investigamos cómo lo construyeron y si podían expresarlo a través de todo el proceso de aprendizaje cuando se les exigió o pidió su definición.

- Buschman (1995) propone, como parte de la enseñanza de las matemáticas, identificar la naturaleza del pensamiento del estudiante y las estrategias utilizadas para solucionar problemas a nivel conceptual. Mediante la interacción y la comunicación, el estudiante puede reflejar su entendimiento matemático, o de las matemáticas, para establecer conexiones e internalizar los conceptos. De esta manera, el estudiante puede recordar, entender, utilizar y descubrir nuevos conceptos. Buschman también plantea que los estudiantes necesitan tiempo para observar, trabajar con pares y construir un lenguaje matemático propio. Cuando se comparte conocimiento con los pares, el conocimiento adquirido es útil y práctico en la aplicación en diferentes situaciones. Cuando el estudiante utiliza su propio vocabulario, su entendimiento matemático es más preciso, emplea palabras aprendidas en situaciones y contextos reales. De esta manera puede entender el significado de cada palabra y la definición del concepto.

- De León y Fuenlabrada (1996), en un estudio sobre los procedimientos que utilizan los estudiantes de primaria para la solución de problemas de reparto, encontraron que la mayoría de los niños tiene dificultad para resolver problemas de la selección de pedazos. Los niños de los primeros grados no han construido, en el plano de la acción implícita, la relación de igualdad entre el total de enteros de un reparto y el total de pedazos del mismo reparto; los niños de tercero a sexto que tienen dicha relación, al menos de manera implícita, no logran funcionalizarla con anticipación en el contexto de la selección de pedazo. En síntesis, señalan que la construcción del significado de las fracciones es complejo y prolongado, y ello resulta de la interacción de los niños con situaciones problemáticas, con sus esquemas de conocimiento y con los sistemas de significados o signos.

La revisión de la literatura permitió reexaminar este estudio y las concepciones de los estudiantes, como también los referentes teóricos para explicar cómo los estudiantes aprenden el concepto *multiplicación* y las estrategias que emplean para incorporarlos en su estructura de saberes y expresarlos cuando se les solicita.

MARCO TEÓRICO

LOS NIVELES ENERGÉTICOS DE PENSAMIENTO

El problema concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias ha sido, en general, objeto de un gran número de investigaciones, las cuales, en última instancia, han buscado resolver, de una u otra forma, el paradigma de transmisión-asimilación o de la enseñanza tradicional.

Mancomunadamente, los supuestos teóricos —psicológicos y epistemológicos—, han hecho sus aportes, tratando de vencer los obstá-

culos paradigmáticos renuentes a desaparecer del panorama de la investigación educativa. Dentro de estos enfoques teóricos, el de mayor aceptación por la comunidad educativa, en los actuales momentos, es la teoría cognoscitiva. Ésta enfatiza sobre los niveles y el desarrollo de comprensión y asimilación del aprendizaje de los conceptos científicos.

Enmarcados en esta concepción, se pretendió en este estudio realizar un aporte teórico que permitiera homologar las actividades mentales como cambios en la estructura de conciencia, con las transiciones energéticas que ocurren en los movimientos naturales. Esta construcción mental la hemos denominado: *los niveles energéticos de pensamiento*, y surgen como una alternativa para caracterizar y fundamentar las investigaciones educativas en el campo de las ciencias naturales.

Este modelo se basa en los espaciamientos de los niveles energéticos que forman el espectro electromagnético, como base teórica fundamental para explicar las rupturas y formación de nuevas estructuras físicas, químicas y biológicas. Estas interacciones son producidas por potenciales energéticos que aumentan el movimiento de las partículas, generando nuevas formas o representaciones que requieren de explicaciones más refinadas de la nueva sustancia, fenómeno, situaciones o suceso.

De igual manera, se puede afirmar que la estructura de conciencia de los humanos está constituida por niveles energéticos de pensamiento. Para que una persona pueda transferir o transformar un constructo, requiere de potenciales intelectivos que le permitan establecer relaciones y saltos cualitativos, dentro de los niveles energéticos de pensamiento de su macroestructura evolutiva. En otras palabras, para que un individuo pueda pasar de una hipótesis o conjetura a un concepto más refinado y aceptado por la comunidad científica, se requiere que las interacciones energéticas de pensamiento permitan estimular los

niveles jerárquicos de la estructura mental, producto de la distribuciones energéticas entre los niveles de aprendizaje, que se corresponden con los diferentes movimientos espectrales presentes en la estructura cognitiva.

Puede decirse que todos estos cambios energéticos se suceden de idéntica forma en la estructura de pensamiento: por la adición constante de nuevos potenciales de saber que permiten establecer acoplamientos o combinaciones, entre un nivel de aprendizaje general y uno específico, aumentando, en consecuencia, los saltos de aprendizaje de un nivel a otro.

METODOLOGÍA

Esta investigación es un estudio de caso de tipo descriptivo. La interpretación de los datos obtenidos fue de tipo cualitativo, ya que no se midieron variables en términos numéricos. Se hizo una interpretación de los protocolos grabados, resultados de entrevista con preguntas “reconciliadoras”.

Este estudio se llevó a cabo con estudiantes del Colegio Congregación Mita, de Hato Rey (nombre de un barrio de San Juan Puerto Rico) y de la escuela intermedia Raúl Ybarra del

Departamento de Educación, en el pueblo de Maricao. La muestra la constituyó un grupo de ocho estudiantes, de las clases de matemáticas, seleccionados por disponibilidad y conveniencia.

ETAPAS DEL PROYECTO

1. *Preparación del proyecto de estudio.* Consistió en la preparación y redacción detallada de los diferentes elementos conceptuales que integran la propuesta. Permitieron brindar una visión general de lo que se pretendía desarrollar en el proceso de investigación.
2. *Elaboración del instrumento de investigación.* La técnica utilizada para la recolección de datos fue la *entrevista con preguntas “reconciliadoras”*, mediante la cual se pretendía detectar las interacciones mentales desarrolladas por los estudiantes desde sus primeros contactos con el concepto *multiplicación*, su evolución, cambios aparentes o regreso a su estado inicial. Es decir, identificar las transformaciones conceptuales generadas en la estructura de conciencia, a través de los saltos intelectivos de los niveles energéticos de pensamiento que se producen con la formulación de las preguntas “reconciliadoras” (véase figura 1).

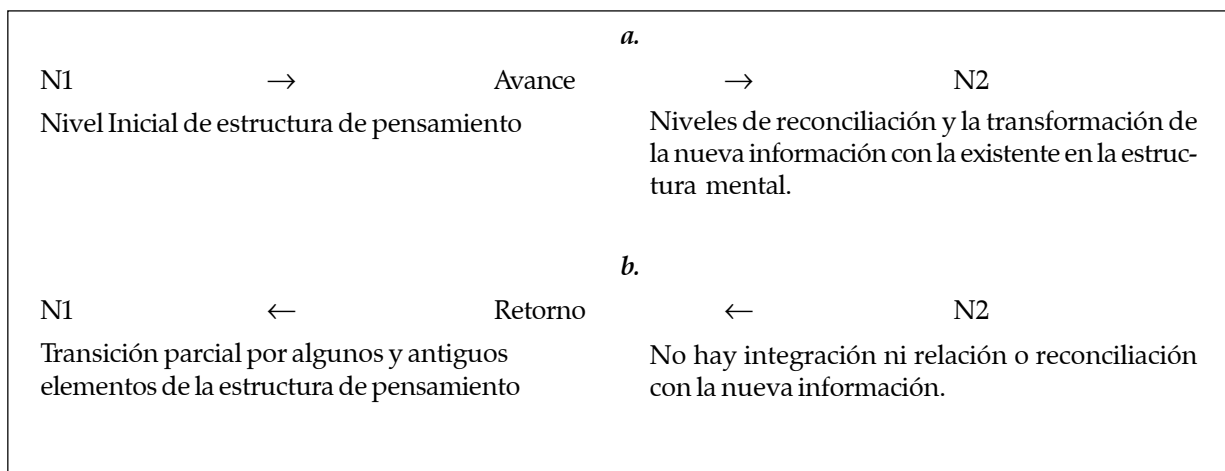


Figura 1. Saltos intelectivos de los niveles energéticos de pensamiento

La figura muestra las transformaciones conceptuales que se generan en las etapas *a* y *b*. La etapa de avance *a* señala el nivel inicial de la estructura de pensamiento (N1) de los estudiantes, antes de comenzar el proceso de enseñanza del concepto *multiplicación*. A su vez, N2 muestra los niveles de reconciliación y transformación de la información con la ya existente en la estructura mental, producto de los saltos intelectivos de los niveles energéticos de pensamiento. En la etapa de retorno *b*, el nivel N2 muestra la pérdida de relación entre la nueva información y la existente en la estructura de pensamiento, es decir, se pierde la integración y se produce el olvido. N1 es sólo un proceso de transición parcial donde fluctúan antiguos elementos conceptuales de la estructura mental.

La entrevista buscó identificar en los estudiantes el *desdoblamiento conceptual progresivo*. Entendemos por ello la transformación conceptual continua en los seres humanos mediante el contacto directo o indirecto con el conocimiento cotidiano o científico. En otras palabras, son los cambios paradigmáticos los que permiten cambiar o modificar una determinada concepción de un evento o fenómeno por otro más acabado y aceptado por la comunidad de especialistas en estos temas. Adicionalmente, en ese proceso, toda persona se ve abocada al desarrollo intelectual, a superar, recordar o mantener las transiciones e interacciones conceptuales que se dan ante nuevas situaciones, hechos o fenómenos del ambiente natural, social y cultural, en el cual se desarrollan periódica o perentoriamente los procesos de construcción del conocimiento.

Aunque no es una entrevista estructurada, presenta un orden secuencial para obtener los logros propuestos. Este orden secuencial no permite divagar a partir de las repuestas de los entrevistados, lo cual conlleva a contradicciones conceptuales por los implicados en el estudio (entrevistador / entrevistado). Aunque se abre la posibilidad, mediante las preguntas "reconciliadoras", de que el estudiante construya o negocie transitoriamente su concepción por la que surja en el diálogo.

La entrevista con preguntas "reconciliadoras" constituye una alternativa para la caracterización de los procesos mentales, que busca identificar las transiciones cognitivas de los individuos cuando son expuestos a un recorrido histórico-social-cultural del conocimiento en un área de saberes específicos.

La entrevista se inicia con varias preguntas dialógicas que permiten al entrevistado (profesor o estudiante), identificar o familiarizarse sobre el tema que deseamos indagar; son de carácter directo, y de ellas podemos determinar el desarrollo y los logros alcanzados al final de la entrevista (véase anexo).

HALLAZGOS DEL ESTUDIO

Compartir con estudiantes de sexto grado respecto a sus experiencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje ofreció la oportunidad para conocer mejor sus fortalezas y debilidades en las diferentes áreas académicas. Por lo general, el estudiante presenta opiniones divididas respecto a su satisfacción y comprensión de la materia, así como su concepción de los diferentes términos (conceptos) que facilitan el estudio de ésta.

En su gran mayoría, los estudiantes manifestaron comprender los términos relacionados con su materia. Aceptaron el reto de definirlos según su entendimiento y según fueron definidos por sus maestros u otras personas de las cuales adquieren las primeras definiciones y aplicaciones del concepto.

Con respecto a las matemáticas, muchos estudiantes indicaron estar "bien" en la clase, con el único agravante de que la multiplicación y la división, así como las fracciones, constituyen los conceptos de mayor dificultad. En este estudio preferimos prestarle especial atención a la multiplicación. Según se desprende de los datos ofrecidos por los mismos estudiantes:

1. Entienden lo que el maestro presenta en sus clases si es explícito y creativo.
2. Los conceptos que más dificultad causan en los estudiantes son las fracciones, la multiplicación, división y las tablas de multiplicar.
3. Todos tienden a definir la multiplicación operacionalmente, como “la multiplicación de un número por otro, el número de veces que se quiera”, “es una suma repetida o abreviada de algún número”, y no muestran otra forma de definirla.
4. Utilizan el algoritmo tradicional para realizar los ejercicios.
5. Se basan en la tabla de multiplicar ya memorizada, uso de los dedos (como manipulativo digital) y la suma para llegar al resultado.
6. La práctica garantiza el aprendizaje del concepto (memorización).
7. Los estudiantes desconocen la jerga técnica, pero operan y resuelven los problemas con fluidez.
8. La forma vertical de agrupar los factores es memorizada y preferida sobre la horizontal.
9. Cuando existen dudas se recurre al “experto” para resolver el ejercicio y lograr el éxito (técnica tutorial).
10. Pueden relacionar su aprendizaje con experiencias pasadas en grados anteriores.
11. Pueden hacer conexiones (arquitectura y ciencias) y aplicar el concepto a situaciones cotidianas (en el supermercado, en la tienda de ropa, transacciones de dinero, labores diarias —como carpintero y otras—).
12. En algunos casos, la matemáticas desarrollan fobia hacia ésta.
13. Se recomienda el uso de calculadora como solución inmediata a la dificultad o falta de conocimiento; papel y lápiz, cuando sea necesario.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez redactadas las entrevistas reconciliadoras de los estudiantes de sexto grado sobre las concepciones del concepto *multiplicación*, se procedió a establecer categorías que nos permitieran identificar, describir, analizar e interpretar las posibles similitudes y diferencias en el contexto de las entrevistas efectuadas. Identificamos que las concepciones que los alumnos entrevistados poseían sobre el concepto *multiplicar*, así como los elementos específicos relacionados con él, no sólo no se diferenciaban de las concepciones aceptadas por la comunidad de expertos, sino también de la propia perspectiva que en los niveles de enseñanza se trata de impartir. La necesidad de aprender y darle explicación a un hecho, acontecimiento o fenómeno, genera en cada individuo elementos simbólicos que le permiten comprender e interpretar estas situaciones, de acuerdo con sus capacidades mentales, producto de sus interacciones en el medio.

Una de las dificultades que presentaron los estudiantes entrevistados sobre el concepto *multiplicación* residió en la escasez de elementos teóricos que le facilitarían una explicación más acabada de la construcción del constructo. Como producto de esta caracterización, encontramos que mientras estos estudiantes no tuviesen papel y lápiz para detallar el proceso operativo del algoritmo de la multiplicación, no presentaban ni siquiera una idea de lo que era el concepto. Para este grupo de estudiantes, el concepto *multiplicación* era totalmente manipulable, demostrativo, repetitivo y memorístico a través de la suma abreviada, careciendo de todo significado la formalidad y la abstracción del constructo.

Los estudiantes entrevistados consideraban el significado del concepto *multiplicación* como replicar, y replicar como repetición. Una vez tenían a la mano lápiz y papel, cuando se les indagaba sobre qué entendían por multiplicar, muchos lo expresaban como la repetición

de un número, aunque su explicación conceptual dejase mucho que desear sobre su coherencia. Algunos expresaron: 1) “yo entiendo que multiplicar es coger ese número y hacerlo otra vez, otra vez, y después sumarlo”; 2) “pues, que tú multiplicas los números por otro [...] y entonces te da el resultado”; 3) “la repetición de un número [...] varias veces, las veces que te indiquen”; 4) “pues, eso son... fracciones de números que tú los tienes que multiplicar con otros y cuando los multiplicas te da un resultado”.

La última definición expresa mayor complejidad que las anteriores, pues introduce elementos conceptuales como son las fracciones y los resultados que hacen más completa la expresión del concepto *multiplicar*. Otros lo expresan como una situación preconcebida de causa-efecto, en la cual la manipulación de unos símbolos numéricos proporcionan un resultado: “mira, estamos multiplicando por esto y te da esto; esto es lo que significa multiplicar”; o: “multiplicar es añadir más a un número”; también lo expresan como algo aumentativo: “algo que tú multiplicas o lo añades o lo agrandas, es decir, añadir varias veces, repetir el mismo número o sumarlo”.

Aunque los entrevistados utilizaron papel y lápiz para expresar el concepto, algunos lo identificaron totalmente como un proceso operativo al expresar que “multiplicar [...] es como decir tres por cuatro, que es lo mismo que cuatro por tres... cuento tres más tres igual a seis, más tres igual a nueve, más tres igual a doce”. Este ejemplo está intrínsecamente relacionado con el algoritmo tradicional de la forma operativa de resolver la multiplicación. También la definen como “sumar x número por x veces”, el cual manifiestan que es la única manera que tienen para concebirlo. Es necesario destacar que sólo un estudiante logra definir el concepto *multiplicación* como una suma abreviada, al expresar: “es sumar un número varias veces para llegar a la contestación... el número de veces que te diga la multiplicación”.

Con relación al proceso de aprendizaje y la comprensión de la multiplicación, estos elementos están influidos por la aprehensión memorística, por la repetición oral y escrita, la tutoría de expertos y la técnica de relajación musical (música-terapia). Esta influencia se manifiesta así:

[...] sé multiplicar porque sé las tablas de memoria, pues cogía ese número y si me pedía dos por seis, pues ponía el dos, seis veces y después cogía un papel y lo sumaba. Después cogía todos los números de la tabla del seis y lo hacía así: seis por uno, ponía el seis una vez; seis por dos, ponía el seis dos veces, después tres veces y lo sumaba, y así, hasta terminar la tabla del seis. Después lo repetía muchas veces y el total me lo aprendía.

Otro estudiante expresa que

[...] cuando estaba en cuarto [se refiere al grado], la maestra tenía unos casetes con música de rap, entonces yo, por las noches, me ponía a oír esos casetes, a practicar las tablas hasta que me las aprendí. Las estudié y las estudié, y cuando mi mamá me preguntó todas las tablas me las sabía, que hasta en el carro me las preguntaba: “¿cuánto es esto por esto?”, y “¿esto por esto?”, hasta que las memorice.

Al preguntarles si aplicaban otra estrategia para aprender a multiplicar, una estudiante respondió:

[...] cojo un papel, pongo un ejercicio de multiplicar, que a veces te salen tres arriba y tres abajo, entonces yo no entendía bien eso. La maestra me explicó que el primero se multiplica por los tres de arriba y después el segundo es lo mismo y el tercero es lo mismo. Yo lo que hacía era que multiplicaba los números en línea y los sacaba mal.

Se le pide a la estudiante que ejemplifique un ejercicio por escrito para que explique qué era lo que hacía. La estudiante escribe: 897×123 y explica:

[...] yo lo que hacía era que multiplicaba 3×7 , 2×9 y 1×8 . Luego, la maestra me explicó que se multiplicaba el tres por cada uno, 3×7 luego 3×9 y 3×8 , y lo mismo hago con el 2 por cada uno de los números y lo mismo con el 1.

En esta estudiante se observa una deficiencia en el dominio algorítmico, y su aprendizaje se realiza por demostración, es decir, ella presentaba confusiones entre la suma y multiplicación en su forma operativa.

Los estudiantes entrevistados utilizaron los dedos como manipulativo digital para desarrollar el proceso operativo de la multiplicación. También, el elemento conceptual para la construcción del concepto de multiplicar es la suma. El aprendizaje del concepto *multiplicación* lo construyen practicando, en forma oral y escrita, las tablas de multiplicar. Su proceso mental está basado en la repetición mental y escrita de la multiplicación, cuando dicen: "yo aprendí a multiplicar practicándolas y escribiéndolas y diciéndomelas un montón de veces hasta que me las aprendí". Otro dice: "mi mamá me ayudaba, ella me preguntaba y yo tenía que contestar y me hacía repetir las muchas veces". Lo anterior indica que los estudiantes necesitan de la guía de un adulto, experto o compañero de un nivel más avanzado para el aprendizaje de la multiplicación. Vygotsky (1986) afirma que la *zona de desarrollo próximo* es la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado mediante la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

En el proceso operativo de la multiplicación, todos los entrevistados emplearon la forma algorítmica tradicional, aunque aplicando algunas técnicas enseñadas por los profesores para facilitar la consecución de los resultados. Ejemplo de estas técnicas es el método del asterisco: escriben un asterisco en el espacio vacío, al realizar una multiplicación con más

de dos multiplicadores y multiplicandos. Es decir, sólo conocen una sola forma algorítmica de plantear la solución de la multiplicación. Al realizar la multiplicación, ninguno de los entrevistados mencionó sus factores o elementos; todos emplearon el recurso de las tablas de multiplicar escritas, porque dudaban y no las habían memorizado. Todo esto nos lleva a pensar que la multiplicación es enseñada en forma memorística y repetitiva, y la información se presenta directamente al alumno, sin ofrecer alternativas que produzcan en él interacciones que puedan cambiar su estructura de pensamiento, como son la resolución de la multiplicación a través de las propiedades de ésta o mediante la solución por analogías.

Podemos plantear que el concepto *multiplicación* es adquirido por los alumnos, mediante las experiencias sucesivas a las que se ve expuesto, producto de la repetición y la memorización, como el manejo manipulativo digital, que va desarrollando a lo largo de su contacto con el ambiente escolar, familiar y social, y no como una entidad independiente y definida de la actividad mental. El proceso de comprensión del concepto se lleva a cabo mediante la interacción del estudiante con el medio.

Otras manifestaciones que logramos identificar es lo referente al proceso mental que estos estudiantes aplican para mantener estos constructos en su estructura de conciencia: es decir, la organización operativa de estos conceptos en términos de la relación entre la suma y la multiplicación. Para estos alumnos, el conocimiento debe estar organizado para que pueda memorizar y ser asimilado; en otras palabras, ofrecerlos en "paquetes" que permitan establecer jerarquías en la estructura de pensamiento. La otra manifestación es que no conservan este constructo en la mente mediante la racionalidad, sino a través de la memorización y la repetición.

Los niveles energéticos de pensamiento para este grupo de alumnos son impredecibles, ya que los saltos cuantizados de conocimientos,

según sus expresiones conceptuales, se mantienen latentes en la estructura de conciencia en estos sujetos, a pesar de que durante la entrevista dejan entrever cambios que parecen ser producto de las interacciones conceptuales con los temas matemáticos cursados.

CONCLUSIONES

1. Los estudiantes participantes de este estudio parecen poseer escasos elementos teóricos para explicar el concepto *multiplicar*, debido al aprendizaje memorístico y repetitivo, y por el uso de manipulativos y demostraciones totalmente concretas.
2. La definición del concepto *multiplicar* es expresada en forma operativa, mediante la repetición mental y escrita.
3. El elemento conceptual y operativo para la construcción del concepto *multiplicar* es la suma.
4. No expresan los factores o elementos de la multiplicación (multiplicador, multiplicando y resultado) como unidades esenciales del carácter operativo de la multiplicación.
5. No utilizan las propiedades de la multiplicación (asociativa, conmutativa, elemento neutro y distributiva) para plantear otras alternativas de solución al algoritmo tradicional que realizan.
6. Los niveles energéticos de pensamiento son imprescindibles para el carácter operativo y mecánico que suelen atribuir a los principios y modelos que utilizan para explicar el concepto.
7. La observación es básica dentro de los procesos mentales, pero no determinante. El conocimiento no se adquiere por una internalización de un significado exterior ya dado, sino por la construcción desde dentro, de representaciones e interpretaciones adecuadas.

ANEXO

GUÍA PARA LA ENTREVISTA RECONCILIADORA
<p>Como parte del estudio de las ciencias básicas (biología, química, física y matemáticas), son muchos los conceptos, ideas, términos o palabras que debes aprender para poder comprender e interpretar un fenómeno natural o matemático. ¿Puedes mencionarme algunos de estos conceptos, ideas, términos o palabras que recuerdes te causaron problemas o dificultad para aprenderlos? ¿Por qué te causaron esos problemas?</p> <p>¿Qué piensas de esos conceptos, ideas, términos o palabras?</p> <p>¿Puedes explicarme cómo hiciste para entender y aprenderte esos conceptos, ideas, términos o palabras? ¿Los memorizaste? ¿Por repetición? ¿Por demostración o solamente con la explicación del profesor?</p> <p>Quiero que hablemos con relación al aprendizaje de estos conceptos (ideas, términos o palabras), específicamente sobre un concepto de matemática que tú conoces y del cual te has valido, o haz empleado para resolver algunos problemas. El concepto (idea, términos o palabras), al cual quiero referirme es el de la multiplicación. Es preciso mencionarte que nadie sabrá tu nombre, por eso esperamos que puedas decirnos espontánea cómo te enseñaron y cómo aprendiste el concepto (idea, término o palabras) de multiplicar.</p>

En los años de estudios cursados y basándote en tu experiencia, ¿puedes decirme qué entiendes por multiplicación? ¿Tienes otra forma de definirla o explicarla?

¿Cuál fue la estrategia, mecanismo o medios que utilizaste para aprender el concepto de la multiplicación?

¿En qué otros conceptos matemáticos te apoyas o basas para entender y aprender el concepto de multiplicación? ¿Por qué?

¿Por qué crees que estos conceptos, en los cuales te apoyaste para explicar o definir el concepto de multiplicación, son importantes?

Estos conceptos, términos, ideas o expresiones que acabas de mencionarme, ¿los aprendiste de la misma forma como aprendiste el concepto de multiplicar? ¿Te fueron más fáciles o más difíciles de aprender?

¿Recuerdas cuál era tu idea sobre el concepto de multiplicar antes que el profesor te lo explicara? ¿Por qué?

¿Puedes ofrecerme ejemplos de situaciones donde tengas que utilizar (aplicar) la multiplicación?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARODY, A., J., 1985, "Mastery of Basic Number Combinations: Internalization of relationships or facts?", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 16, núm. 2-3, pp. 83-98.

BUDGET, A.; TURNER, P. y COONEY, T., 1996, "Analyzing Teaching and Learning: The Art listening", *The Mathematics Teacher*, vol. 89, núm. 4, abr., pp. 326-329.

BUSCHMAN, L., 1995, "Communicating in the Language of Mathematics", *Teaching Children Mathematics*, vol. 1, núm. 16, pp. 324-329.

CLARK, F. B. and KAMII, C., 1996, "Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grade 1-5", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, núm. 1, pp. 41-51.

CRAMER, K. y KARNOWSKI, L., 1995, "The Importance of Informal Language in Representing Mathematical Ideas", *Teaching Children Mathematics*, vol. 1, núm. 6, pp. 332-335.

DE LEÓN, H. y FUENLABRADA, I., 1996, "Procedimientos de la solución de niños de pri-

maria en problemas de reparto", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 1, núm. 2, pp. 268-282.

FENNELL, F., REYS, R. y WEBB, A., 1991, *Mathematics Unlimited*, Orlando, FL, Harcourt, Brace Jovanovich.

FIGUEROA, R., 1996, "Estudio exploratorio de las interacciones mentales de los docentes de ciencias naturales sobre la concepción de reacción química: una propuesta teórica", en: *Primer Encuentro de Investigaciones de Post-Grado, 18 y 19 de octubre de 1996*, Puerto Rico, Universidad de Puerto Rico.

HART, K., ed., 1981, *Children's understanding of Mathematics: 11-16*, Londres, John Murray.

KAMII, C. y LIVINGSTON, S., 1994, *Young Children continue to reinvent Arithmetic, 3rd grade*, Nueva York, Teachers College Press.

KOUBA, V., 1989, "Children's Solution Strategies for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems", *Journal for Research*

in *Mathematics Education*, núm. 20, pp. 147-158.

KOUBA, V. L. y FRANKLIN, K., 1995, "Multiplication and Division: Sense Making and Meaning", *Teaching Children Mathematics*, vol. 1, núm. 9, pp. 574-577.

LINDQUIST, M., ed., 1989, *Results from the Fourth Mathematics Assessment of Educational Progress*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

MELUN, R., 1994, "Language, Intellectual Structure and Common Mathematical Errors: A call for Research", *School Science and Mathematics*, vol. 9, núm. 5, may., pp. 235-239.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS —NCTM—, 1989, *Assessment Standards for School Mathematics*, Reston, NCTM.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1989, *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*, Washington, D. C., National Academy Press.

NORWOOD, K. S. y CARTER, G., 1994, "Journal Writing: An Insight into Students

Understanding", *Teaching Children Mathematics*, vol. 1, núm. 3, pp.146-148.

PAGE, A., 1994, "Helping Students understand Subtraction", *Teaching Children Mathematics*, vol. 1, núm. 3, nov., pp. 140-143.

PIAGET, J., 1987, *Possibility and Necessity*, Minneapolis, University of Minnesota Press (Original work published 1983).

SIMON, M. A. y BLUME, G. W., 1994, "Building and Understanding Multiplicative Relationships: A Study of Perspective Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 5, pp. 472-493.

STEFFE, L., 1988, "Children's Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes", en: HIEBERT, J. y BEHR, M., eds., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, vol. 2, Reston, VA, National Council of Teacher mathematics, pp. 119-140.

VYGOTSKY, L. S., 1986, *Thought and Language*, A. Kozulin, ed., Cambridge, MA: MIT Press (Traducción al castellano: *Pensamiento y lenguaje*, Buenos Aires, La Pléyade, 1977).

REFERENCIA

FIGUEROA MOLINA, Roberto; UTRIA ECHEVERRÍA, Carlos; COLPAS CASTILLO, Rafael y ARAUJO PEREIRA, Antonio, "Estudio exploratorio de las interacciones mentales de los estudiantes de sexto grado sobre el entendimiento del concepto *multiplicación*", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVII, núm. 43, (septiembre-diciembre), 2005, pp. 111-124.

Original recibido: septiembre 2005

Aceptado: diciembre 2005

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.