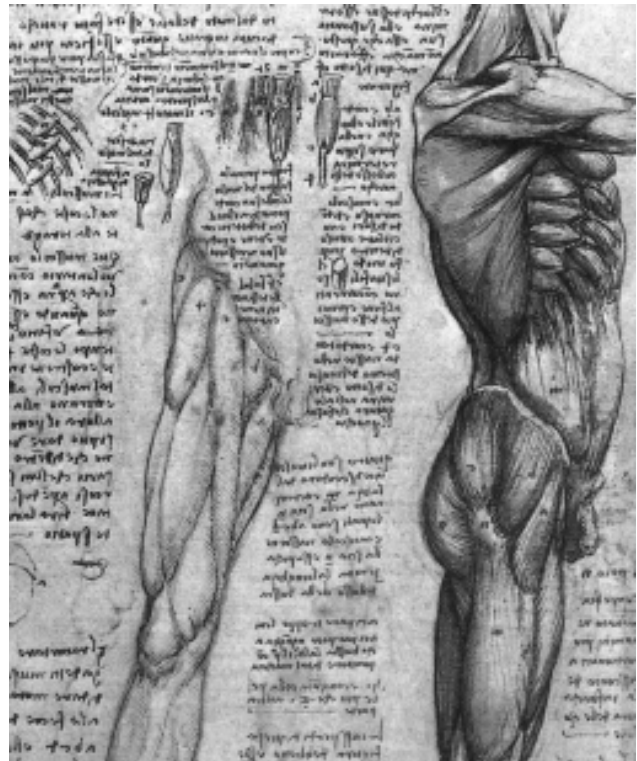


LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE Y EL ANÁLISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES. INFORME DE INVESTIGACIÓN

Carlos Mario Jaramillo López
Leonardo Ceballos Urrego



Leonardo da Vinci,
Músculos del tronco.

RESUMEN

LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE Y EL ANÁLISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES. INFORME DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se valida el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples como un tipo de análisis estadístico más adecuado y fino que el análisis de Cluster, alternativo para ser utilizado en los estudios de aplicación del Modelo de Van Hiele, particularmente para la enseñanza de la noción de convergencia de una serie en matemáticas.

RÉSUMÉ

LES NIVEAUX DE RAISONNEMENT DE VAN HIELE DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ET L'ANALYSE FACTORIELLE DE CORRESPONDANCES MULTIPLES. RAPPORT DE RECHERCHE

Dans cette recherche on valide l'Analyse Factorielle de Correspondances Multiples comme une stratégie d'analyse statistique plus adéquate et plus fine que celle de Cluster, alternative pour être utilisée dans les études d'application du Modèle de Van Hiele, particulièrement pour l'enseignement de la notion de convergence d'une série en mathématiques.

ABSTRACT

LEVELS OF REASONING OF VAN HIELE IN TEACHING THE NOTION OF CONVERGENCE OF A SERIES AND THE FACTORIAL ANALYSIS OF MULTIPLE CORRESPONDENCES. RESEARCH REPORT

This investigation validated the Multiple Correspondences of Factorial Analysis as more adequate and fine method of statistic analysis than the Cluster Analysis, alternative to be used in the studies on the application of the Van Hiele Model, particularly for the teaching of the notion of convergence of a series in mathematics.

PALABRAS CLAVE

Enseñanza de las matemáticas, enseñanza de la noción de convergencia de una serie, Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples.

Teaching of mathematics, teaching of the notion of convergence of a series, Multiple Correspondence of Factorial Analysis.

LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE Y EL ANÁLISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES. INFORME DE INVESTIGACIÓN



Carlos Mario Jaramillo López*
Leonardo Ceballos Urrego**

INTRODUCCIÓN

Una de las dificultades en la enseñanza del cálculo infinitesimal está en la noción de *convergencia de una serie*, en tanto contiene un obstáculo cognitivo para el alumno, al tratar éste de entender cómo un proceso indefinido, sin aparente final, puede producir un resultado exacto y preciso. Ello es expresión del nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante, y del nivel avanzado que se aspira a que él alcance mediante la enseñanza, todo ello desde la perspectiva del modelo de los esposos Pierre y Dina van Hiele.

El Modelo de Van Hiele (Land, 1991) proporciona una descripción del proceso de aprendizaje de las matemáticas, y postula la existencia de niveles de pensamiento, así: Nivel 0 (predescriptivo); Nivel I (de reconocimiento visual); Nivel II (de análisis); Nivel III (de clasificación) y Nivel IV (de deducción formal).

Estos niveles no se identifican con niveles de habilidad computacional. Ellos son jerárquicos, recursivos, secuenciales y progresivos. Además, cada uno posee su propio lenguaje.

Jaramillo, en su texto *La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de Van Hiele* (2000), se propuso determinar un análogo geométrico visual y sencillo que le permitiera al estudiante acceder, de forma natural, a la comprensión de tal noción; para ello se apoyó en el Modelo de Van Hiele, y mediante el diseño cuidadoso de un experimento fundamentado en la aplicación secuencial de una entrevista clínica, una prueba de respuesta múltiple, la obtención de una base de datos, la aplicación del análisis de Cluster y la detección de niveles, condujo a varios alumnos a alcanzar el nivel avanzado de razonamiento correspondiente a la noción de convergencia.

* Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia, Centro de Investigación CIEN, Universidad de Antioquia.

E-mail: cama@matematicas.udea.edu.co

** Profesor del Tecnológico de Antioquia.

E-mail: lceballo@tdea.edu.co

Tomando como base los datos de Jaramillo (2000) y por interés de los autores, se abordó una investigación exploratoria¹ en la cual se aplicó el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM), con el fin de validarlo o descartarlo, como un tipo de análisis estadístico más adecuado y fino que el análisis de Cluster, que pueda ser utilizado en los estudios de aplicación del citado modelo, en particular en el nivel avanzado de razonamiento (Nivel III).

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

OBJETIVO GENERAL

Utilizar el AFCM como instrumento para la convalidación de los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele, en la enseñanza de la noción de *convergencia de una serie*.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar y precisar factores cuyas características se correspondan con los de los niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele, en particular para la noción de convergencia de una serie.
2. Establecer tipologías de individuos cuyas características permitan clasificarlos en los distintos niveles de razonamiento.
3. Comparar los resultados obtenidos bajo el AFCM con los de Jaramillo (2000).
4. Utilizar el AFCM para explorar la existencia de dos subniveles dentro de cada nivel de razonamiento, explícitamente en la noción de convergencia de una serie, como un aporte al mejoramiento de los resultados obtenidos por Jaramillo (2000).

BREVE DESCRIPCIÓN DEL AFCM

El AFCM es un método de clasificación diferente al análisis de Cluster, que permite establecer un buen espacio de representación, en el plano cartesiano, de los individuos estudiados, de las modalidades de cada variable cualitativa correspondiente a cada nivel de razonamiento, o de la combinación de los anteriores. De tales representaciones, a su vez, se puede explorar la forma de las nubes de puntos, la asociación entre las modalidades, la relación entre éstas y los grupos de individuos. Adicionalmente, el despliegue de las modalidades en los primeros planos factoriales es útil para caracterizar los ejes factoriales, las zonas del plano y los grupos de individuos desplegados en tales regiones.

Los siguientes son algunos de los criterios que se deben tener en cuenta a la hora de establecer la confiabilidad de los resultados sobre un AFCM: la descomposición de la inercia y el criterio del valor propio promedio; la mayor contribución de las modalidades a la inercia sobre cada eje; las modalidades con coordenadas más importantes sobre cada eje; la distribución de las modalidades y de los individuos respecto del origen para cada factor, y la estabilidad de los resultados frente a las rotaciones.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

1. *Revisión del estado del arte.* Las aplicaciones del Modelo de Van Hiele sobre conceptos de la matemática avanzada constituyen en la actualidad un conocimiento de frontera en el contexto de la educación matemática.

¹ La investigación es "Aplicación del análisis factorial de correspondencias múltiples en la validación de los de niveles de razonamiento, así como para la exploración de la existencia de subniveles, en la noción de convergencia, a la luz del modelo de Van Hiele". Código del proyecto IN10016CE, inscrito en el CIEN.

2. *Análisis descriptivo*. Se realizó de dos formas:

- a. Sobre las respuestas a cada una de las variables obtenidas en la encuesta aplicada por Jaramillo (2000: 225-262), para las cuales se tuvo en cuenta la identificación de las respuestas correctas, la distribución de éstas de acuerdo con la frecuencia, y su clasificación según criterios de dificultad o conveniencia.
- b. Sobre los individuos a quienes se les aplicó la encuesta, de acuerdo con la cantidad de respuestas correctas: distribución de los individuos, en orden descendente, de acuerdo con la frecuencia de respuestas correctas; distribución de los individuos según la mayor dificultad de las preguntas (variables); distribución de los individuos de acuerdo con la calidad de las preguntas definidas por Jaramillo (2000: 79-102); identificación de los individuos con mayor cantidad y mejor calidad de respuestas correctas; preguntas con respuesta errada por los seis individuos mejor clasificados. El análisis sobre los individuos se centró en los identificados en el Nivel III de Van Hiele.

3. *Aplicación*. El AFCM se realizó como se describe a continuación: distribución de las modalidades que representan las 1.^{as} y 2.^{as} respuestas correctas sobre un primer plano factorial; observación y reestructuración; presentación de la distribución de las modalidades correctas y los individuos seleccionados, sobre los tres primeros planos para cada uno de los bloques de preguntas; determinación y nominación de los factores relacionados con la noción de convergencia de una serie.

RESULTADOS

1. *De la revisión del estado del arte*. La bibliografía encontrada fue poca: al respecto,

puede consultarse Campillo y Pérez (1998); De la Torre y Pérez (2000); Esteban (2000); Jaramillo (2000); Llorens (1994) y Navarro (2002).

2. *Del análisis descriptivo*.

a. *En relación con la identificación de las respuestas correctas*. Se estructuraron dos tablas, a partir de las cuales se logró establecer una clasificación que daba cuenta de la dificultad de las preguntas según la frecuencia de aciertos en cada bloque.

b. *En relación con los individuos*.

- Distribución de los individuos, en orden descendente, de acuerdo con la frecuencia de respuestas correctas.
- Distribución de los individuos de acuerdo con la mayor dificultad de las preguntas, en cada uno de los bloques de preguntas.
- Distribución de los individuos de acuerdo con la calidad de las preguntas definidas por Jaramillo (2000).
- Identificación de los individuos con mayor cantidad y mejor calidad de respuestas correctas.
- Las preguntas en las que más erraron los individuos mejor clasificados. Seis de ellas fueron consideradas *críticas*, por cuanto no fueron respondidas, *a la vez*, por cada uno de los tres individuos mejor clasificados.

3. *Resultados del AFCM*.

En primer lugar, se logró establecer la siguiente definición de factores en concordancia con el primer objetivo específico ("Identificar y precisar factores cuyas características se correspondan con los de los niveles de razonamiento propuestos por

Van Hiele, en particular para la noción de convergencia de una serie”):

- *Factor 1*: percepción de la convergencia de una serie. En él, el punto de equilibrio establece una separación entre dos aspectos claramente diferenciados: las modalidades que apuntan a una comprensión del aspecto dinámico del concepto de convergencia de una serie, oponiéndose a las que no reflejan tal comprensión.
- *Factor 2*: percepción del infinito. En este factor, el punto de equilibrio diferencia la concepción del infinito como un proceso matemático indefinido (infinito potencial), frente a la no percepción del infinito como tal.
- *Factor 3*: tendencia a la formalización. En él, el punto de equilibrio opone a quienes van adquiriendo la capacidad de establecer clasificaciones y genera un lenguaje adecuado para la descripción del concepto *convergencia de una serie*, con las modalidades que reflejan el distanciamiento de dicha capacidad.

En segundo lugar, se estableció la tipología de individuos que denotan la existencia del Nivel III frente al concepto de convergencia.

En tercer lugar, encontramos propicio plantear la existencia de *dos subniveles de razonamiento* dentro de cada nivel, para el concepto *convergencia de una serie*, caracterizados por ser *dos zonas próximas de razonamiento comunicadas, pero claramente diferenciadas*, a saber:

1. *Subnivel 0*: el individuo posee los elementos básicos del concepto, pero no un manejo propio del mismo.
2. *Subnivel 1*: el individuo posee un dominio inobjetable del concepto.

CONCLUSIONES

1. Algunos elementos que establecen la validez de la investigación son: el grado de coherencia lógica interna de los resultados, la ausencia de contradicciones con los resultados de otras investigaciones, y la extensión de las conclusiones a estudios similares.
2. Las variables señaladas como críticas contienen un alto grado de abstracción, y pueden considerarse como indicadoras de separación entre los niveles de Van Hiele, para el concepto en estudio.
3. La aplicación del AFCM es pertinente. Se dio correspondencia entre el conjunto de preguntas preestablecido y los factores encontrados.
4. Se logró la determinación de factores, modalidades e individuos en correspondencia con los niveles de Van Hiele.
5. Verificación de la existencia de dos subniveles dentro del Nivel III. Para futuros estudios de esta naturaleza, los tests socráticos (producto de una entrevista clínica de carácter socrático) que pretenden detectar niveles de Van Hiele, tendrán como objetivo adicional detectar *subniveles* en cada uno de los niveles. Además, deberán estructurarse de tal manera que las diferentes modalidades de las variables reflejen una gradación y permitan ubicar a los estudiantes en forma más precisa, tanto en el nivel como en el *subnivel* respectivo.
6. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto matemático es necesario tener en cuenta que un alumno sin un nivel adecuado de razonamiento no podrá comprender una noción como la de convergencia de una serie.
7. El AFCM es un instrumento científicamente útil para determinar los estados de razonamiento de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPILLO HERRERO, P. y PÉREZ CARRERAS, P., 1998, "La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele", *Divulgaciones Matemáticas*, vol. 6, núm. 1, pp. 69-80.

DE LA TORRE, A. y PÉREZ CARRERAS, P., 2000, *La modelización del espacio y del tiempo*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.

ESTEBAN, PEDRO V., 2000, *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el Modelo de Van Hiele*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.

JARAMILLO, C. M., 2000, *La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de Van Hiele*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.

LAND, J. E., 1991, *Appropriateness of the Van Hiele Model for describing Students' Cognitive Processes on Algebra Tasks as typified by College Students' learning of Functions (Mathematics Functions)*, Boston, Boston University.

LLORENS, JOSÉ LUIS, 1994, *Aplicación del Modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local*, Tesis Doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.

NAVARRO DOMÍNGUEZ, A., 2002, *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*, Tesis doctoral, Sevilla.

REFERENCIA

JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario y CEBALLOS URREGO, Leonardo, "Los niveles de razonamiento de Van Hiele en la enseñanza de la noción de convergencia de una serie y el análisis factorial de correspondencias múltiples. Informe de investigación", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVII, núm. 43, (septiembre-diciembre), 2005, pp. 143-147.

Original recibido: septiembre 2005

Aceptado: diciembre 2005

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.

