Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional*

Ana Isabel Silvestre**
João Pedro da Ponte***

*Traducido del portugués por Diego Alejandro Pérez*****
*Traducción revisada por Diana Jaramillo******

Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional

El objetivo de este artículo es comprender cómo se desarrolla el razonamiento proporcional de los alumnos del 6.° año de escolaridad, en especial en lo que se refiere a la distinción entre situaciones que involucran y que no involucran proporcionalidad directa. La experiencia de enseñanza está fundamentada en cinco tareas basadas en el cuento El conejo y la tortuga*, realizadas en grupos dentro de la clase, y discutidas después colectivamente por todo el curso.*

Palabras clave: *Enseñanza de las matemáticas, proporcionalidad directa, constante de proporcionalidad.*

An educative experience aimed at the development of proportional reasoning

The objective of this article is to understand how proportional reasoning is developed in 6th-grade students, especially in terms of the distinction between situations that either involve or not direct proportionality. The teaching experience is composed by five tasks based on the short story The rabbit and the turtle*, carried out in groups inside the classroom, and later discussed collectively by the whole class.*

Key words: *The teaching of mathematics, direct proportionality, constant of proportionality.*

Une expérience d'enseignement dirigé au développement du raisonnement proportionnel

L'objectif de cet article est comprendre la manière dont le raisonnement proportionnel des étudiants de sixième année de scolarité est développé, surtout en ce qui fait référence à la distinction entre situations qui impliquent et qui n'impliquent pas de proportionnalité directe. L'expérience de l'enseignement est basée sur cinq tâches basées sur le conte « Le lapin et la tortue », réalisées en groupes à l'intérieur de la classe et discutées plus tard collectivement par le cours entier.

Mots clés: *Apprentissage des mathématiques, proportionnalité directe, constante de proportionnalité.*

---

* Trabajo realizado en el ámbito del proyecto de investigación "Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra" (IMLNA), apoyado por la Fundación para la Ciencia y la Tecnología (FCT), bajo el contrato núm. PTDC/CED/65448/2006. El texto es traducido con autorización de los autores.

** Profesora de la Escuela Básica 2,3 de Gaspar Correia, Loures, Portugal. Becaria del Ministerio de Educación y de la FCT.
E.mail: anaisabelsilvestre@gmail.com

*** Profesor del Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.
E.mail: jpponte@fc.ul.pt

**** Licenciado en Educación básica, con énfasis en matemática, de la Universidad de Antioquia. Auxiliar de investigación del proyecto "El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase".
E.mail: diegoxp_@hotmail.com

***** Profesora de la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.
E mail: djaramillo.quiceno@gmail.com

Introducción

En todos los países, el razonamiento proporcional es considerado un asunto importante de la matemática escolar. Algunas investigaciones en educación matemática sugieren que el razonamiento proporcional está marcado por un lento proceso de desarrollo (Cramer y Post, 1993; Cramer, Post y Currier, 1993), siendo influenciado por factores asociados a la complejidad que implica el concepto de *proporcionalidad directa,* a la experiencia escolar de los alumnos (Greer, 2007; Nesher, 1980; Verschaffel, Greer y Corte, 2000) y a su vivencia personal. Por esto, el National Council of Teachers of Mathematics —NCTM— (1989) indica que es necesario tiempo y empeño para desarrollar esta forma de razonamiento, promoviendo el aprendizaje de los alumnos en la identificación de situaciones que involucren relaciones proporcionales, y en la resolución de problemas referentes a este tipo de relaciones.

La proporcionalidad directa modela varios fenómenos de la cotidianidad y está presente en distintas actividades de la matemática escolar (por ejemplo, en la conversión entre unidades de medida), pero eso no parece ser suficiente para promover la comprensión de este concepto matemático y el consecuente desarrollo del razonamiento proporcional de los alumnos. En realidad, el contexto del problema constituye un elemento esencial que influye en su razonamiento (Lamon, 1993; Noelting, 1980; Vergnaud, 1983). Lamon (1993) identifica niveles de sofisticación en las estrategias y los grados de dificultad para cuatro tipos de contextos: 1) medidas bien definidas, utilizando entidades bien definidas expresadas en unidades como kilómetros por hora; 2) parte-parte-todo, en que un subconjunto es comparado con su complemento (otro subconjunto) o con su todo, por ejemplo, niñas comparadas con todos los chicos de un curso (niñas: chicos de un curso); 3) conjuntos asociados, donde dos cantidades usualmente no asociadas se relacionan a través del contexto del problema, por ejemplo, *pizzas* y niños (*pizzas:* niños), y 4) escalas, relativas a la reducción / ampliación de objetos / estructuras, involucrando magnitudes continuas.

La experiencia de enseñanza que sirve de base a este estudio asume la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6.° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional (Vergnaud, 1983). Asume, también, la perspectiva de que esa comprensión se desarrolla mediante la resolución de problemas y la realización de tareas desafiantes, de naturaleza exploratoria e investigativa, en el contexto de la interacción social en pequeños grupos (Christiansen y Walther, 1986) y la discusión colectiva con todo un curso (Wood, 1999).

Así, la experiencia presenta a los alumnos situaciones que involucran relaciones tanto proporcionales como no proporcionales, buscando modificar su tendencia para formular estrategias de resolución basadas en la concepción errónea de que "todo es proporcional". La experiencia tiene como presupuesto, también, que los alumnos deben ser desafiados a comprender los problemas que les son propuestos, explorando regularidades numéricas para elaborar estrategias coherentes que sean capaces de explicar, en vez de seguir estrategias de cálculo rutinario que no comprenden. El objetivo de este artículo es comprender cómo se desarrolla el razonamiento proporcional de los alumnos del 6.° año en el marco de esta experiencia, en especial en lo que se refiere a la distinción entre situaciones que involucran y situaciones que no involucran proporcionalidad directa.

Investigación sobre el razonamiento proporcional

El desarrollo del razonamiento proporcional

Antes de iniciar la escolaridad, los niños son ya capaces de realizar juicios de tipo proporcional que resultan de su experiencia física y lingüística (Resnick y Singer, 1993). A pesar de esto, esta capacidad primitiva no se traduce necesariamente en un desarrollo posterior de su razonamiento proporcional. Para que ello ocurra, es requisito que la enseñanza de la proporcionalidad directa se apoye en el conocimiento intuitivo de los alumnos (Ben-Chaim et ál., 1998) y, al mismo tiempo, los ayude a eliminar las concepciones falsas que los llevan a sobrevalorar las relaciones proporcionales (Van Dooren et ál., 2006).

En el presente estudio, consideramos que el razonamiento proporcional involucra tres condiciones: 1) distinguir las relaciones de naturaleza proporcional de aquellas que no lo son (Cramer y Post, 1993; Lamon, 1995); 2) comprender la naturaleza multiplicativa de las relaciones proporcionales (Cramer, Post y Currier, 1993); y 3) ser capaz de resolver varios tipos de problemas (Carpenter et ál., 1999; Cramer, Post y Currier, 1993; Heller et ál., 1989; Karplus, Steven y Stage, 1983; Lamon, 1993; Post, Behr y Lesh, 1988; Steinthorsdottir, 2006), revelando flexibilidad mental para usar diferentes abordajes sin ser afectado por los datos numéricos y el contexto (Post, Behr y Lesh, 1988) y por la forma como los problemas son presentados (principalmente en forma de texto, gráficos, tablas y razones).

La investigación en educación matemática ha venido identificando varios factores que influyen en el desarrollo del razonamiento proporcional, entre los cuales destacamos los que resultan de la complejidad del concepto de *proporcionalidad directa* y del aprendizaje escolar del alumno. La complejidad de este concepto involucra el hecho de estar estrechamente relacionado con otros tópicos matemáticos, como *razón, proporción, fracciones equivalentes, conversión de unidades de medida* y *escalas,* conceptos propios del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. A cada uno de estos tópicos podemos asociar diferentes niveles de complejidad, de acuerdo con la diversidad del contexto de los problemas y a la naturaleza de los números involucrados (Tourniaire y Pulos, 1985; Steinthorsdottir, 2006), así como al modo como los problemas son presentados.

Reconocemos también factores condicionantes del desarrollo del razonamiento proporcional específicos del contexto escolar. Por ejemplo, Greer (1997) y Nesher (1980) plantean que un aprendizaje con énfasis en el entrenamiento de procedimientos y la verbalización de reglas, sin una comprensión de la estructura matemática, tiene consecuencias negativas sobre el desarrollo de este razonamiento matemático. Además, una perspectiva de enseñanza basada en la aplicación de reglas de cálculo a problemas estereotipados lleva a los alumnos a sobrevalorar las relaciones proporcionales, lo que ha sido designado como "ilusión de linealidad" (Van Dooren et ál., 2006; Verschaffel, Greer y Corte, 2000).

Problemas de valor desconocido y problemas pseudoproporcionales

Los problemas de valor desconocido son probablemente los más conocidos y estudiados. Estos problemas presentan tres valores numéricos y piden el cuarto valor, designado por "valor desconocido" (Cramer y Post, 1993; Lesh, Post y Behr, 1988). Su complejidad resulta de los números involucrados, del contexto y del dominio que cada alumno tiene de estos dos factores.

Por otro lado, hay problemas que se refieren a una situación de relación no proporcional, pero que generan en los alumnos una fuerte sensación de tal relación; son llamados *problemas pseudoproporcionales.* He aquí un ejemplo:

> […] si un grupo de *a* músicos demora *b* minutos interpretando una pieza musical, ¿cuánto tiempo demoran *c* músicos ejecutando la misma pieza? (Van Dooren et ál., 2006: 308).

Usualmente, los alumnos no consideran la posibilidad de que los músicos ejecuten la pieza en simultáneo y son condicionados por la estructura lingüística de los problemas sobre relaciones proporcionales (Verschaffel, Greer y Corte, 2000). Con base en estudios realizados con alumnos de 13 a 15 años de edad sobre la utilización incorrecta de estrategias proporcionales, para ellos, "ser proporcional" es algo profundamente enraizado, natural y con carácter incuestionable, y sugieren la organización de situaciones didácticas capaces de lidiar con este error común en los alumnos.

Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad directa

Varios estudios identifican y caracterizan las estrategias usadas por los alumnos para resolver estos problemas. Por ejemplo, Post, Behr y Lesh (1988) y Cramer, Post y Currier (1993) identificaron cuatro estrategias.

1. La *razón unitaria,* también conocida como "cuanto para uno", es una estrategia intuitiva usada desde los primeros años de escolaridad, involucrando el cálculo de razón unitaria en problemas de división y el cálculo de múltiplos de la razón unitaria en problemas de multiplicación.
2. El *factor de cambio* o *factor escalar* conocido por "tantas veces como", es una estrategia condicionada a aspectos numéricos de los problemas, pero que está presente en el repertorio de los alumnos.
3. La *comparación de las razones* es una estrategia asociada a problemas de comparación que permite comparar razones unitarias a través de dos divisiones.
4. El *algoritmo del producto cruzado* o *regla de tres simple* es un proceso mecánico que, aunque eficiente, está desprovisto de significado en el contexto de los problemas.

Post, Behr y Lesh (1988) identifican, además, la estrategia de *interpretación gráfica,* en la medida en que los gráficos pueden ser usados para identificar razones equivalentes o para identificar el valor desconocido en problemas de valor desconocido. Otra estrategia es *componer / descomponer (building-up / building-down)* (Christou y Philippou, 2002) siendo, en todo caso, necesario tener en cuenta que esta estrategia, además de razonamientos multiplicativos, involucra frecuentemente también razonamientos aditivos.

Por su lado, Lamon (1993; 1995) clasifica las estrategias de razonamiento dentro y entre variables, como son presentadas en la literatura sobre razonamiento proporcional y estructuras multiplicativas, distinguiendo entre razonamientos de naturaleza escalar y funcional. El *razonamiento escalar* ocurre cuando se realizan transformaciones dentro de una misma variable y el *raciocinio funcional* se presenta cuando se establecen relaciones entre dos variables diferentes. Según esta investigadora, la distinción entre estos dos tipos de relación es importante, pues se trata de procesos de pensamiento diferentes. Sin embargo, la correcta utilización de cada estrategia depende de factores como el tipo de problema y las relaciones aritméticas entre los datos (Kaput y West, 1994; Lamon, 1993; 1995).

Metodología

Experiencia de enseñanza

Este estudio constituye una experiencia de enseñanza y sigue un abordaje cualitativo e interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994). Esta experiencia está marcada por la formulación de una hipótesis de aprendizaje (Steffe y Thompson, 2000), que incluye las metas de aprendizaje de los alumnos, la planificación de las actividades de enseñanza y la formulación de una hipótesis sobre el proceso de aprendizaje referente al razonamiento de los alumnos. En este caso, la hipótesis de aprendizaje involucra la formulación de una trayectoria que 1) comienza por la identificación, por el alumno, de relaciones de proporcionalidad directa, a través de la investigación de regularidades numéricas entre variables y dentro de las variables; 2) pasa por el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas utilizando las relaciones multiplicativas entre y dentro de las variables y, paralelamente, empleando diferentes representaciones; y 3) culmina en el establecimiento de conexiones entre las regularidades numéricas y los conceptos asociados a la proporcionalidad directa. De este modo, la apropiación con comprensión de las regularidades multiplicativas proporcionales permite a los alumnos, por un lado, la construcción del concepto matemático de *proporcionalidad directa,* de un modo progresivamente más formal; y, por otro lado, la utilización de estrategias generales para investigar la existencia de relaciones proporcionales y resolver problemas sobre estas relaciones (véase tabla 1).

Una parte esencial de la experiencia de enseñanza son las tareas que se proponen a los alumnos, así como el modo como son realizadas en el salón de clase. En este estudio, la mayoría de las tareas son problemas, dado que su resolución es una poderosa metodología de trabajo para aprender y hacer matemática (Ministério da Educação —ME—, 2007). Otras tareas son exploraciones e investigaciones, que constituyen contextos favorables para la construcción de conceptos a través de un abordaje intuitivo. Ponte (2005) refiere que, mientras los problemas se caracterizan por presentar datos y objetivos definidos, las investigaciones tienen un punto de partida con algún aspecto indefinido, correspondiéndole al alumno volver la pregunta más precisa. Las exploraciones son tareas abiertas, pero menos complejas que las investigaciones.

En este estudio, las dos primeras tareas están basadas en el cuento *El conejo y la tortuga* y las restantes utilizan también estos personajes en el enunciado de los problemas, aunque relacionados con situaciones cotidianas, de tal forma que se creen contextos generadores de curiosidad y afectividad en los alumnos. Se pretende que los problemas de la experiencia de enseñanza sean emocionantes y relacionados con la vivencia de los alumnos, para que estos se sientan naturalmente motivados a resolverlos (Weidermann, 1995).

Tabla 1.
Elementos centrales de la experiencia de enseñanza

<table>
<tr><th colspan="5">Experiencia de enseñanza</th></tr>
<tr><th colspan="2">Trayectoria de aprendizaje</th><th>Tareas</th><th colspan="2">Salón de clase</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Identificación de relaciones de proporcionalidad directa:
— Investigar regularidades numéricas entre variables y dentro de las variables
— Utilizar diferentes representaciones (tablas, gráficos)
— Comprender el significado de los valores numéricos, en particular el de la constante de proporcionalidad
— Comprender la naturaleza multiplicativa de la relación proporcional y operar sobre ella
— Distinguir las relaciones proporcionales de las no proporcionales: contexto; datos numéricos</td><td>1. El conejo y la tortuga (tarea de investigación)
2. El secreto de la tortuga (tarea de exploración)</td><td rowspan="4">Trabajo en grupo (primer momento)</td><td rowspan="4">Discusión de la tarea en colectivo (segundo momento)</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>Utilización de las relaciones multiplicativas en la resolución de problemas:
— Relación entre variables: razón; constante de proporcionalidad
— Relación escalar
— Comprender el significado de la constante de proporcionalidad en el contexto de los problemas</td><td>3. En el país de las tortugas (problemas)
4. Maratón de los conejos y más problemas (problemas)
5. Pista prohibida a conejos y otras historias (problemas)</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Utilización de las diferentes representaciones en la resolución de problemas:
— Utilizar de forma flexible diferentes representaciones
— Comprender las características gráficas de las relaciones proporcionales</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Establecimiento de conexiones entre regularidades numéricas entre variables y los conceptos de razón, proporción y constante de proporcionalidad</td><td></td></tr>
</table>

La resolución de las tareas incluye dos momentos principales: el *trabajo en grupo* y la *discusión colectiva.* El trabajo en grupo es privilegiado en esta experiencia de enseñanza, porque permite la discusión de la tarea por los alumnos, por el grupo y por el profesor, y entre los grupos, contribuyendo a mejorar la confianza de los alumnos en la matemática. Leer, escribir, oír y comunicar durante la resolución de problemas ayuda a los alumnos a desarrollar la comprensión (Tsuruda, 1994). Por su lado, la discusión colectiva de la tarea en el salón constituye un momento en que los alumnos perciben que el profesor valora su forma de pensar. Según Weidermann (1995) y Tsuruda (1994), cuando los alumnos presentan su trabajo, transmitiendo informaciones y argumentando con los colegas y el profesor, tienen antes que reflexionar sobre el modo como piensan para resolver los problemas. Además, los alumnos que escuchan tienen una oportunidad de aprender otras estrategias de resolución de problemas y de presentación de los resultados.

El grupo colaborativo y la recolección de los datos

Para desarrollar este estudio fue constituido un grupo colaborativo (Boavida y Ponte, 2002), formado por la primera autora, en calidad de investigadora, y por tres profesoras más. Las profesoras se dispusieron a trabajar en el grupo y poner en práctica la experiencia de enseñanza, que, en su globalidad, representa una alteración con respecto al modo como acostumbran enseñar la proporcionalidad directa. En su realización, adaptaron los aspectos necesarios hacia las características de sus cursos.

La recolección de los datos incluye un pretest, un test intermedio y un postest, realizados antes, durante y después de la experiencia de enseñanza. Fueron, además, filmadas todas las clases y recogidos los registros producidos por los alumnos. Presentamos algunas situaciones de clase y analizamos las respuestas de los alumnos de un curso a problemas "pseudoproporcionales" y a problemas de valor desconocido en el pretest, en el test intermedio y en el postest, buscando percibir la influencia de la experiencia de enseñanza en el desarrollo de su razonamiento proporcional. Dicha experiencia contempló los cuatro tipos de problemas enunciados por Lamon (1993); sin embargo, en este artículo sólo presentamos la evolución de las alumnas en problemas con medidas bien definidas (distancia y tiempo).

El curso

Está constituido por 26 alumnos, con edades entre 11 y 13 años, de una escuela básica de la zona limítrofe de Lisboa. El consejo de profesores considera que los alumnos tienen comportamiento adecuado, pero rendimiento escolar poco satisfactorio. A su vez, la profesora de matemática considera bueno el aprovechamiento de los alumnos, teniendo en cuenta que nunca rechazan el trabajo en el salón, aunque la mayoría revele dificultades en resolver problemas y escribir razonamientos, situación que atribuye, en gran parte, a una experiencia de aprendizaje de matemática anterior basada en el entrenamiento de algoritmos. La profesora refiere, además, que hay alumnos cuyo "primer impulso es buscar una operación", para dar una respuesta, "muchas veces sin comprender la pregunta".

Las dos primeras tareas de la experiencia de enseñanza

La primera tarea fue realizada en tres clases y la segunda en dos clases, siendo las sesiones de 90 minutos.

Tarea 1

Esta tarea requiere que los alumnos interpreten una situación del cuento *El conejo y la tortuga,* basando sus respuestas en argumentos matemáticos (véase figura 1).

Tarea 1

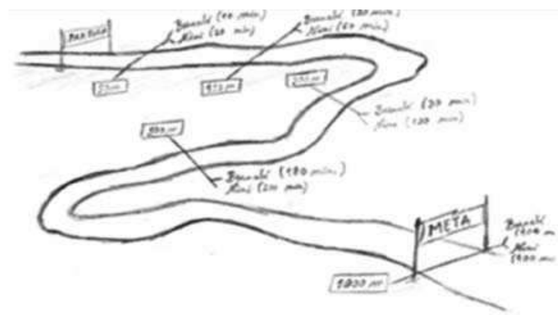
El conejo y la tortuga

Todos los años se realiza la carrera más famosa del mundo. En la selva, los animales esperan ansiosos por el día de la carrera y se ríen de la somnolencia de la tortuga y de los disparates del conejo. Esta carrera es la más conocida por los líos que por las medallas.

El presidente de los conejos estaba seguro de que este año ganaría y así su atleta estaría presente en los Juegos Olímpicos de los bichos. Él mismo había entrenado a su conejo corredor y por eso ganaría la carrera por primera vez. Su esfuerzo fue tanto que fue a inspeccionar el trayecto días antes de la prueba. Mientras tanto, el entrenador de la tortuga se divertía andando en patines.

Y en el día acordado allá estaban los atletas listos para una prueba más. La tortuga Nini y el conejo Barnabé habían sido los atletas escogidos este año y estaban ansiosos por comenzar la prueba.

El esquema muestra la prueba realizada por el conejo y por la tortuga



Una vez más la historia se repite…

— ¿Son capaces de investigar lo que habrá ocurrido durante la carrera?

— Si el transcurso de la carrera tuviese 2.000 m, ¿será posible prever el tiempo que cada uno de los atletas necesitaría para concluir la prueba?

Sugerencias:

— Observen los datos con atención.
— Hagan registros de su trabajo (ej.: recontar la situación, escribir el modo como relacionan los datos, escribir el significado de los números en el problema) de modo que se facilite la escritura de su relatoría.
— Utilicen la hoja de cálculo de *Excel* para representar los datos y para probar sus conjeturas.

Figura 1 Tarea *El conejo y la tortuga*

En la primera clase, los alumnos entran al salón y se agrupan de acuerdo con las instrucciones de la profesora, juntando las mesas. La profesora abre la sala anexa, donde se encuentran guardados los computadores portátiles, y un alumno de cada grupo va a buscar uno, registrando su nombre y el número del computador (procedimiento obligatorio en la escuela). Los alumnos prenden los computadores, mientras la profesora distribuye el enunciado de la tarea.

Antes de que los grupos comiencen el trabajo, la profesora recuerda a los alumnos que tienen que entregar una relatoría al final de la tarea, por lo que deben hacer un registro detallado sobre el modo como pensaron para responder las preguntas asignadas. Subraya que, al final, todos los cálculos deben tener una explicación o justificación. Responde, además, preguntas de los alumnos, esclareciendo que cada grupo entrega solamente una relatoría, que puede ser escrita en el computador, como sucedió en trabajo anteriores. Todo este proceso lleva cerca de 30 minutos.

Los grupos comienzan a trabajar y surgen las primeras dificultades, ya esperadas, de interpretación de la tarea, traducidas en la pregunta "¿Qué hay que hacer?". La profesora, consciente de que esta situación podría ocurrir, una vez que eso había sido discutido en el grupo colaborativo, opta por orientar los grupos en función de las preguntas específicas, buscando llevar a los alumnos a pensar en la acción descrita en la tarea, incentivándolos a discutir y a aceptar o declinar la conjeturas que los colegas presentan. Aunque las tareas de investigación no sean una novedad para estos alumnos, el grupo colaborativo (investigadora y maestras) se pone en una situación de incertidumbre sobre lo que se espera de su trabajo. En esta tarea, los alumnos tienen que conjeturar lo que habría ocurrido durante la carrera y justificar dichas suposiciones. Esta fase inicial es demorada, porque los alumnos tienen que definir el problema y revelan dificultad en expresarlo de forma simple a los demás colegas.

Por último, cinco de los siete grupos optan por organizar la información proporcionada en la hoja de cálculo *Excel* y volver después a la discusión sobre la carrera. Otro grupo, después de 60 minutos, llama a la profesora:

> Inés: Profesora. Nosotros ya acabamos.
> Profesora: ¿Ya? Humm… entonces, ¿qué concluyeron?
> Inés: Quien ganó fue la tortuga.
> Profesora: Sí…. Pues eso es verdad. Y…
> Inés: *(mira los colegas de grupo que permanecen callados).*
> Profesora: Lee aquí…Qué…
> Pedro: ¿Son capaces de investigar lo que habrá ocurrido durante la carrera?
> Profesora: ¿Entonces? ¿Su respuesta responde a lo que se les está pidiendo?
> Pedro: ¿Aquí en el medio, no es? *(apunta al esquema de la ficha de trabajo)* Si es durante, es aquí también.
> Profesora: Piénsenlo mejor.
> Inés: Pero… al inicio [de la carrera] Barnabé fue más rápido y Nini no, pero después él menos [deprisa] y Nini ganó.
> Profesora: Humhum… ¿Cómo saben eso? Tienen que demostrar matemáticamente esa idea. Vamos… continúen…

Los alumnos revelan una tendencia inicial a aceptar como respuesta aquella que surge usualmente en un problema común, es decir, lo que sucedió al final (y no lo que sucedió durante la prueba). A pesar de esto, muestran haber explorado la carrera mediante el análisis de la velocidad de los animales. Sin embargo, la profesora siente la necesidad de focalizar la atención de los alumnos en lo que se pretende conocer, reforzando la idea de que tienen que analizar matemáticamente la variación en la velocidades, que los lleva a reformular su respuesta y a utilizar los datos numéricos.

Con los datos organizados, los grupos comienzan a formular conjeturas sobre lo que puede estar en el origen del atraso del conejo. La mayoría dice que él se durmió o paró, aunque no consiga llegar a acuerdos sobre cómo justificar tal situación. En los últimos veinte minutos de la clase, tres grupos empiezan a investigar de forma organizada posibles relaciones entre los valores de distancia y del tiempo. Algunos de los alumnos identifican regularidades numéricas: los valores referentes a la distancia son iguales para el conejo y la tortuga; en el caso de ésta, cuando se triplica la distancia, el tiempo también aumenta del mismo modo. Dos grupos experimentan establecer esas relaciones a través de la multiplicación y de la división, pero los restantes utilizan la adición o la sustracción. Finalmente, la profesora indica a los alumnos que guarden en el computador y en una memoria externa electrónica lo que habían hecho, escribiendo en el tablero cómo proceder. Entretanto, y cuando la mayoría de los grupos organiza los computadores y las mesas, el grupo de Margarida llama a la profesora:

> Margarida: Oh, profesora. Yo… ya sabemos aquí que es división.
> Profesora: ¿Y por qué? *(se vuelve para*

> *atrás y les dice a algunos alumnos que organicen los computadores en el salón anexo).*
> Margarida: Nini va siempre de la misma manera y por eso ella ganó. Aquí… Siempre está el mismo número. Dividimos los metros por el tiempo.
> Profesora: Escriban eso para que no lo olviden. Continuamos en la próxima clase, ¿está bien?

Los alumnos tenían que descubrir, explorando las relaciones entre las variables, aquella que indica la velocidad del conejo y de la tortuga, de forma que se justifique la conjetura inicial de que el conejo había parado o desacelerado. Algunos alumnos usan la relación entre tiempo y distancia (tiempo: distancia), que designan por "ritmo"; otros dividen la distancia por el tiempo de cada uno de los animales. Descubren así que la tortuga hace la carrera a una velocidad constante y confirman la irregularidad de la prueba del conejo. Con la evidencia de los datos concluyen que la victoria de la tortuga se debe al hecho de que ella se movió siempre al "mismo ritmo", mostrando gran resistencia, mientras que el conejo se cansó rápidamente y fue obligado a "disminuir el ritmo".

En la segunda clase de la tarea 1, los alumnos siguen la misma rutina de colocar las mesas en grupo, yendo uno de ellos a buscar el computador del grupo. Algunos tienen hojas de borrador sobre la clase anterior y las ponen encima de las mesas. Una vez más, debido a los computadores, esta preparación lleva cerca de 15 minutos. La profesora dice a los alumnos que tienen que terminar la relatoría en aquella clase, por lo que es necesario que no pierdan tiempo discutiendo cosas sin importancia, como los colores de las tablas. Insiste de nuevo para que describan de forma detallada el modo como pensaron.

Cerca de 30 minutos después del inicio de la clase, es posible observar que el grupo de Margarida ya tiene ideas definidas sobre lo que ocurrió en la carrera, escribiendo en su relatoría que Nini corrió de forma regular y Barnabé de forma irregular. Es probable que la naturaleza afirmativa de lo que escriben esté relacionada con la conversación con la profesora al final de la clase anterior. A pesar de esto, y contrario de lo que habían dicho a la profesora, el grupo divide el tiempo por la distancia, refiriendo que la tortuga demora siempre 0,4 minutos para recorrer un metro ("ritmo de la carrera", según el grupo).

Otros dos grupos efectuaron la división y constataron que, en el caso de la tortuga, el valor obtenido es siempre igual, independientemente del pedazo de la prueba, pero no saben explicar el significado de esa división.

Carla levanta su mano, indicando que el grupo necesita ayuda de la profesora, y cuando ésta llega le pide, con cierto desespero, que le explique a João lo que es el 2,5, porque él continúa sin entender. La profesora cuestiona a los tres integrantes sobre lo que estaban haciendo, a lo que Carla y André explican su trabajo. João dice entonces no percibir por qué es que "cuando se divide metros por minutos el resultado 2,5 es metros" y en coro los dos colegas completan "por un minuto". João es un alumno con dificultad en el curso, no es fácil conseguir que él comunique lo que no comprende. La profesora le pregunta sobre lo que sucede cuando divide 50 metros por 20 minutos, pero el estudiante permanece callado, por lo que Carla se apresura a decir que está repartiendo "los mismos metros para cada minuto". El alumno parece confuso y la profesora pregunta a todo el grupo: "vamos a imaginar que tenías 50 *pizzas* y 20 personas", ¿qué se obtiene si dividimos 50 entre 20? Esta vez João responde de inmediato que es 2,5, lo que a la profesora a cuestionar si sería 2,5 personas. Los alumnos se ríen y la profesora le dice a João que haga un esquema, para lo que éste hace un círculo (*pizzas*), que distribuye por pedazos (personas). Después de alguna demora, el alumno percibe que cada persona recibe dos *pizzas* y media. Esta idea es reforzada por la profesora: "podemos decir

2,5 *pizzas* por 1 persona". João responde con un ¡Ahh! y después dijo: "percibir por qué es metros por cada minuto". Con preguntas de este tipo hechas por la profesora, otros alumnos consiguen igualmente superar esta dificultad.

El grupo de Celia está atrasado, debido a un desentendimiento entre esta alumna y los demás colegas, lo que obliga a la profesora a intervenir como mediadora. Esta fricción es consecuencia de que la idea correcta de la estudiante no haya sido aceptada por los otros tres integrantes de este grupo y de ella no querer participar en un trabajo que no considera correcto. Por un lado, la estudiante no consigue mostrar a los colegas la validez de su abordaje, y por otro, a ellos les falta paciencia. La intervención de la profesora refuerza la idea de que en un trabajo de grupo es preciso aceptar las ideas de los otros y decide quedarse algún tiempo junto al grupo, dándole a Celia la oportunidad de hablar, ayudándola a explicar lo que quería decir con "no vamos a sumar todos estas distancias, porque eso va a dar más que toda la carrera y lo mismo del tiempo […] eso no tiene lógica" y como "nadie suma minutos con metros, eso no da nada, ¿cierto profesora? Y menos [sustraer], tampoco". Con asombro, los tres colegas que se oponen a Celia constatan que las operaciones que realizaron no tienen sentido. La profesora se queda algún tiempo con el grupo, pero sin intervenir.

En esta clase, los alumnos no solicitan tanto apoyo de la profesora como en la clase anterior, pues hasta los grupos que estaban más atrasados prestaban atención a los cuestionamientos que iban siendo planteados y a los diálogos entre los colegas de los otros grupos. Sensiblemente, en la mitad de la clase, dos grupos terminan su relatoría y la profesora los desafía a construir un gráfico para cada uno de los animales. Los alumnos responden con gran entusiasmo a este desafío, aunque la elección del tipo de gráfico haya exigido la ayuda de la profesora.

En la figura 2 presentamos un ejemplo de una relatoría. Al final de la clase, sólo un grupo no presentó su relatoría, porque una alumna apagó su computador sin grabar el trabajo.

En la tercera clase, la profesora proyecta, en una diapositiva de *Power Point,* partes de diferentes relatorías de los alumnos y discute con los grupos el modo como pensaron. Los alumnos presentan sus ideas y dudas, teniendo en cuenta los argumentos dados por otros grupos. Dos asuntos de intensa discusión son: 1) el significado del valor numérico obtenido por la división de la distancia por el tiempo y por la división del tiempo por la distancia; y 2) la posibilidad de hacerse estimaciones para Nini, dado que durante toda la carrera existe una relación proporcional entre la distancia y el tiempo.

En la segunda parte de la clase, la profesora pide a los alumnos que se enfoquen en los valores numéricos referentes a la carrera de Nini e intente explicar por qué motivo se obtiene siempre un valor constante con su división. Varios alumnos dicen que los valores de la distancia son 2,5 veces mayores que el tiempo y, por eso, la división da siempre 2,5. Un grupo dice que había dividido el tiempo por la distancia (la constante de proporcionalidad es 0,4) y había concluido que el tiempo es 0,4 o 4 décimas de la distancia. Los alumnos también exploraron las relaciones dentro de las magnitudes y verificaron que la distancia y el tiempo varían de la misma manera. Al final, la profesora explica que en la carrera de Nini existe una relación proporcional entre la distancia y el tiempo. Es aun subrayado que, a pesar de ser el mismo contexto (una carrera), los valores numéricos indican que sólo en el caso de Nini existe una relación proporcional, siendo necesario el sentido crítico sobre el contexto y los valores numéricos de los problemas.

> Después de ver el problema y de ver el esquema, llegamos a la conclusión de que el conejo Barnabé pudo, en medio de la carrera, haber pensado que ya había ganado la carrera y por eso comenzó a desacelerar. Ahora vamos a hacer los cálculos en la hoja de Excel.
> Ahora usamos la hoja de Excel.
>
> 1.er paso. Comenzamos por hacer una tabla como en los otros trabajos.
> 2.° paso. Después colocamos todos los datos de los metros que recorrieron y los minutos que demoraron para recorrerlos.
> 3.er paso. Observamos los números con atención y percibimos que no podemos comparar a Barnabé con Nini, porque Nini es más lenta; entonces, hicimos la división de los metros con los minutos.
> 4.° paso. Dividimos los metros con los minutos.
>
> Finalmente percibimos que Barnabé iba deprisa y después lento, y Nini fue siempre a la misma velocidad.

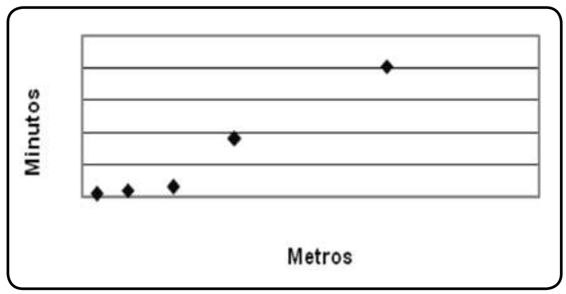
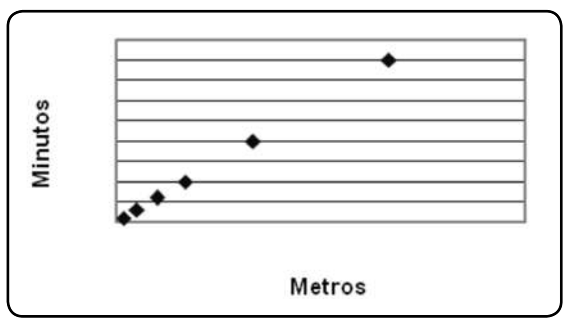
	Metros	**Minutos**	**División**	**Carrera de Barnabé**
Barnabé	50	10	5	
	150	20	7,5	
	300	30	10	
	500	180	2,78	
	1.000	404	2,475	
Nini	50	20	2,5	**Carrera de Nini**
	150	60	2,5	
	300	120	2,5	
	500	200	2,5	
	1.000	400	2,5	
	2.000	800	2,5	

Figura 2 Relatoría del grupo de Tiago

Tarea 2

El secreto de la tortuga es una tarea de exploración que desafía a los alumnos a averiguar la posibilidad del conejo ganar la carrera utilizando la estrategia de la tortuga. Los alumnos también utilizan la hoja de cálculo de *Excel* para resolver esta tarea y la rutina de organización del salón y recepción del computador vuelve a ser la misma.

De modo general, los alumnos saben que el conejo tenía que mantener la velocidad (relación proporcional entre la distancia y el tiempo), pero se debaten con dos cuestiones: 1) escoger el valor de la constante; y 2) escoger la operación aritmética para determinar el tiempo a través de la distancia y de la constante de proporcionalidad. La primera cuestión es difícil de resolver, porque los alumnos comienzan por no aceptar que tienen que ser ellos los que proponen un valor y después de plantear una hipótesis (generalmente velocidad alta) se interrogan si el conejo consigue mantener tal velocidad. La segunda cuestión se revela más fácil, porque los alumnos verifican cuál operación es la que, en la tarea 1, en el caso de Nini, involucra la distancia y la constante de proporcionalidad. Los alumnos revelan apropiarse del significado de esta constante, usando el término "constante" en las conversaciones entre sí y la profesora con el significado de ser "siempre el mismo número".

La segunda clase de esta tarea es destinada a la discusión colectiva. La profesora utiliza los registros de los alumnos y los cuestiona, mostrando los valores en las relatorías, sobre el valor mínimo (hasta dos cifras decimales) de la constante de proporcionalidad para el conejo ganar. Después, son analizadas las relaciones multiplicativas (multiplicación y división) entre las magnitudes y la constante.

Desempeño de los alumnos antes, durante y después de la experiencia

En este estudio fueron realizados tres test, uno antes, uno durante y uno después de la experiencia de enseñanza. En la tabla 2 se presenta una caracterización de los test en lo que respecta a los problemas de valor desconocido y los problemas pseudoproporcionales que incluyen.

Problemas de valor desconocido

Presentamos la resolución de diversas preguntas de dos alumnas. Los problemas de valor desconocido propuestos exponen contextos familiares para las alumnas, en lo que se refiere a la relación entre la distancia y el tiempo, tal y como en la primera tarea de la experiencia de enseñanza (véase figura 3).

Tabla 2 Tipos de problema por tipo de test

Tipo de problemas		
	Valor desconocido	**Pseudoproporcionales**
Pretest	P 3a P 3b P 6 P 7 P 10b	P 1 (Relación aditiva) P 2 (Proporcionalidad inversa) P 3 (Sin ninguna relación)
Test intermedio	P 1 P 2	P 6c (Proporcionalidad inversa) P 6a (Sin ninguna relación)
Postest	P 4 P 5a P 5b P 7 (Escala)	P 1d P 1e P 1f (Representación gráfica) P 1g
P = Problema		

Pretest (P 7). Un automóvil lleva 30 minutos recorriendo 50 kilómetros. Si permanece a la misma velocidad, ¿cuanto tiempo le toma recorrer 125 kilómetros?	
Respuesta de Carolina* 50 Km - 30 m. 25 Km - 15 m. 50 quilómetros - 30 minutos 100 quilómetros - 60 minutos 125 quilómetros - 75 minutos levará 75 minutos a percorrer 125 minutos * "Le llevará 75 minutos para recorrer 125 minutos".	Respuesta de Celia ~~minutos quilómetros~~ minutos quilómetros ~~minutos quilómetros~~ 15 25 75 125 30 50 60 100 37,5 62,5 90 150 18,75 31,25 9,375 15,625

Figura 3 Problema del automóvil (pretest)

La respuesta de Carolina ilustra la opción por la estrategia componer / descomponer. Parece existir un primer momento de trabajo, centrado en el componer; pero para obtener el tercer par numérico (125 km - 75 minutos) la alumna utiliza una estrategia secundaria de descomponer, que coloca en la esquina superior derecha. Aquí la alumna ya utiliza las abreviaturas de las palabras "kilometro" y "metro", que escribe por extensión en todos los pares numéricos de la estrategia central. No es evidente el modo como calcula los pares numéricos, y es probable que haya empleado razonamientos aditivos para conjugar los valores (por ejemplo: 100 km y 25 km, 60 minutos y 15 minutos).

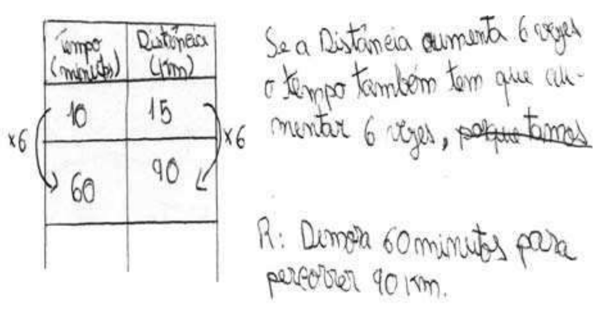
Celia utiliza una estrategia semejante. De hecho, el modo como organiza los datos que va obteniendo es típico de la estrategia componer. La alumna posiblemente obtuvo los pares numéricos iniciando los cálculos en las columnas (minutos y kilómetros) que se sitúan más a la derecha. Cuando percibe que el par numérico (90, 150), es decir, que 90 minutos superaban los 75 minutos pretendidos, detiene ese primer momento de trabajo. En seguida, parece iniciar una segunda etapa, dos columnas más a la izquierda, siendo probable que el valor 75 resulte de la suma de 15 y 60 de la estructura tabular más a la derecha. El mismo proceso debe haber sido usado para calcular 125. Después, escribe un conjunto sucesivo de valores que son mitad de los valores anteriores en la tabla (de arriba abajo), pero no se percibe lo que pretendía con esos cálculos.

En el test intermedio, la respuesta de Carolina muestra una mejoría en la organización de los datos del problema y en la comunicación escrita sobre el modo como pensó. La alumna opta por una estrategia escalar (factor entero) que identifica entre los valores numéricos de la variable distancia (véase figura 4).

Por su lado, la respuesta de Celia manifiesta también una mejoría en la organización de los datos. La alumna opta por una estrategia funcional, aunque el factor no sea un número entero. El valor numérico 1,5 es obtenido por la división de la distancia por el tiempo y no como ella indica (tiempo / distancia), siendo probable que haya optado por esta relación porque es más fácil comprender el significado de 1,5 que de 0,7 (redondeando a las décimas). Sin embargo, tiene necesidad de explorar las relaciones multiplicativas entre los datos, tal vez para certificar la veracidad de los valores de las variables. Nótese que la estudiante continua revelando dificultad para explicitar con palabras la forma en la que piensa.

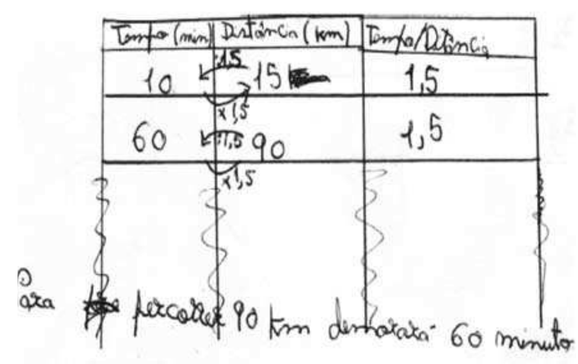
Test intermedio (P 1). Un automóvil que circula a una velocidad constante demora 10 minutos para recorrer 15 km. ¿Cuánto tiempo demora en recorrer 90 km?

Respuesta de Carolina*



* "Si la distancia aumenta 6 veces, el tiempo también tiene que aumentar 6 veces". R: "Demora 60 minutos para recorrer 90 km".

Respuesta de Celia**



** "Para recorrer 90 km demorará 60 minutos".

Figura 4 Problema del automóvil (test intermedio)

En el postest, las alumnas revelan una tendencia a mantener el tipo de estrategia que usaron en el test intermedio (véase figura 5). Así, Carolina formula estrategias escalares y las justifica de acuerdo con el modo como comprende la proporcionalidad directa (las magnitudes aumentan o disminuyen de la misma manera). Por su lado, Celia parece preferir las estrategias funcionales, independientemente de los números que encuentra en los problemas.

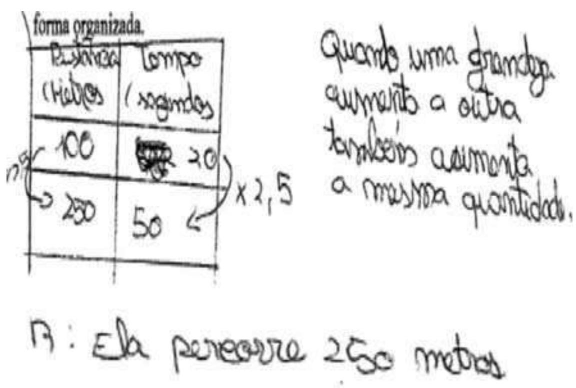
Problemas pseudoproporcionales

En estos problemas, el desempeño de las alumnas es bastante diferente (véase tabla 3). Carolina y Celia resolvieron correctamente el problema sobre una relación aditiva, planteado en el pretest. Lo mismo ocurre con la mayoría de los alumnos del curso. Sin embargo, revelan una tendencia para utilizar una estrategia proporcional cuando tal relación no existe. Aun en el pretest, Carolina no responde al problema que involucra proporcionalidad inversa y escribe que no comprende el problema.

A lo largo de la experiencia de enseñanza fueron exploradas las relaciones multiplicativas proporcionales, pero también fueron analizadas situaciones de contexto que es necesario considerar para decidir sobre la existencia de

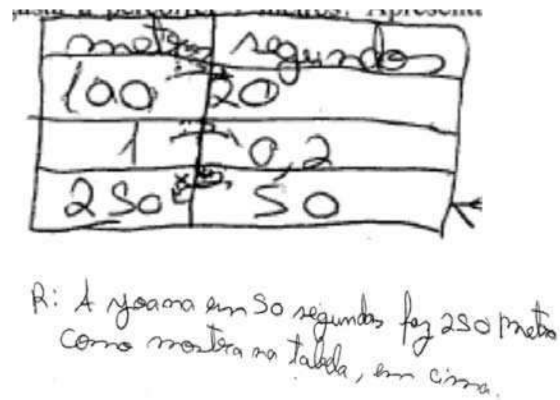
Postest (P 5b). Joana, en la clase de educación física, corre 100 metros en 20 segundos, con una velocidad constante. Calcula la distancia recorrida por Joana en 50 segundos. Presenta tus registros de forma organizada

Respuesta de Carolina*



* "Cuando una magnitud aumenta la otra también aumenta la misma cantidad". R: "Ella recorre 250 metros".

Respuesta de Celia**



** "Joana en 50 segundos hace 250 metros como muestro en la tabla de arriba".

Figura 5 Problema de la carrera

Tabla 3 Desempeño de las alumnas en los problemas pseudoproporcionales

		Alumnas	
	Problemas pseudoproporcionales	**Carolina**	**Celia**
Pretest	P 1 (Relación aditiva)	Acertó	Acertó
	P 5 (Proporcionalidad inversa)	No responde	Erró (pd)
	P 9 (Sin ninguna relación)	Erró (pd)	Erró (pd)
Test intermedio	P 6a (Sin ninguna relación)	Acertó	Acertó
	P 6c (Proporcionalidad inversa)	Acertó	Erró (pd)
Postest	P 1d (Proporcionalidad inversa)	Erró (pd)	Acertó
	P 1e (Sin ninguna relación)	Acertó	Acertó
	P 1f (Representación gráfica)	Acertó	Acertó
	P 1g (Sin ninguna relación)	Acertó	Acertó
pd = utilización incorrecta de estrategias proporcionales			

proporcionalidad directa. En el test intermedio son presentados los problemas indicados en la figura 6.

Carolina y Celia revelan en sus respuestas una mayor atención al contexto de los problemas. De hecho, a pesar de los datos sugerir una relación proporcional, las alumnas responden utilizando argumentos diferentes. En el problema 6a ambas afirman que no existe una relación proporcional. Sin embargo, en el problema 6b, que involucra una relación de proporcionalidad inversa, Celia asume que se trata de una relación de proporcionalidad directa. Eso ocurre tal vez porque sólo considera la parte numérica del problema, como sugiere la ausencia de una respuesta escrita con palabras, contrariamente a lo que hizo en 6a, pues se limita a presentar una tabla en que muestra las relaciones proporcionales dentro de las variables. Por el contrario, Carolina intuitivamente plantea la hipótesis de que se trata de una relación inversa, pues escribe que "lleva menos tiempo" cuando existen más personas para pintar un muro.

Test intermedio (P6). Indica si cada frase es verdadera o falsa.

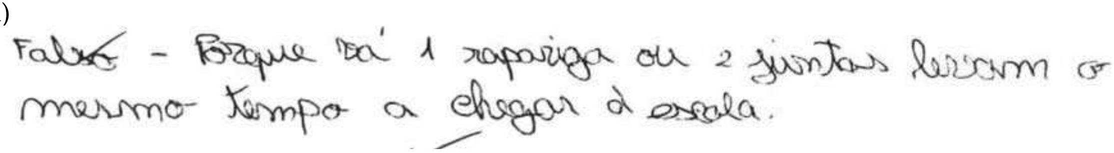
a) Si una niña llega a la escuela en 10 minutos, dos demoran 20 minutos.

[...]

c) Si Hugo pinta un muro en 2 días, Hugo, Tiago y otro amigo demoran 6 días (Costa, 2007: 130)

Respuesta de Carolina

6a)



"Falso, porque 1 niña o 2 juntas llevan el mismo tiempo para llegar a la escuela".

6c) Falso. Lleva menos tiempo

Respuesta de Celia

6a) Falso, porque si fueran a la misma velocidad, llegan las dos al mismo tiempo.

6c)

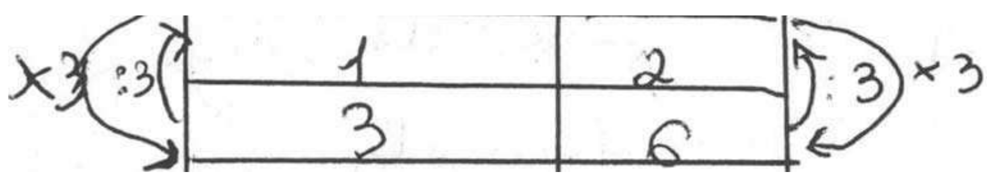
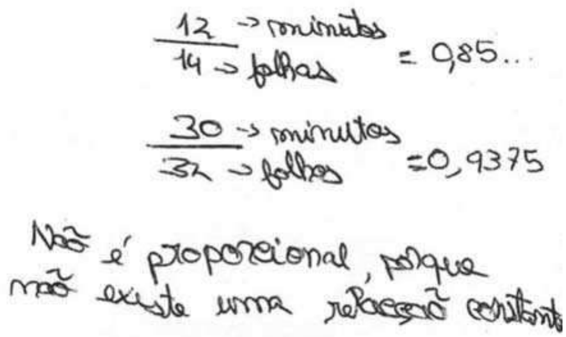


Figura 6 Problemas pseudoproporcionales del test intermedio

En el postest, las alumnas mejoraron su desempeño en la distinción de relaciones proporcionales de aquellas que no lo son y se muestran capaces de utilizar términos específicos y otras representaciones. Se pedía en el primer problema investigar la existencia de proporcionalidad en un conjunto de situaciones (sólo presentamos dos de ellas). En el problema 1d (véase figura 7), Carolina utiliza la representación de razón y determina la razón unitaria. Como las razones unitarias son diferentes, la alumna concluye que no existe proporcionalidad. Celia opta por averiguar la existencia de la relación proporcional a través de la relación escalar (el valor 2,5 fue determinado a través de la magnitud tiempo).

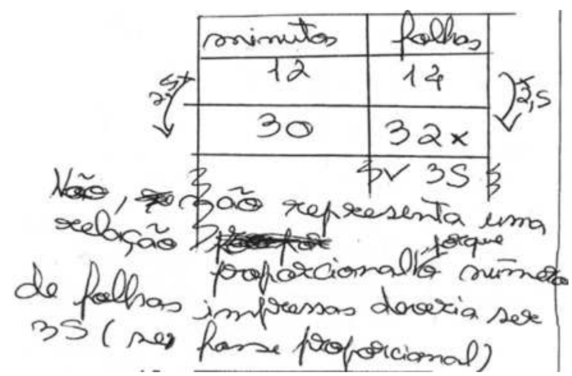
Postest (P1d). Investiga si es una relación de proporcionalidad directa: si la impresora de Rita demora 12 minutos para imprimir 14 hojas, entonces demora 30 minutos imprimiendo 32 hojas.

Respuesta de Carolina*



* "No es proporcional porque no existe una relación constante".

Respuesta de Celia**



** "No, no representa una relación proporcional porque el número de hojas impresas debería ser 35 (si fuese proporcional)".

Figura 7 Problema de la impresora

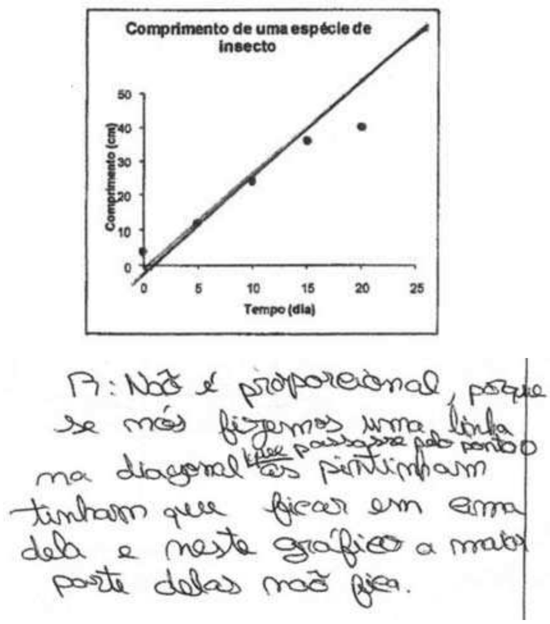
El problema 1f muestra los datos representados en un gráfico, preguntando si se trata de una relación proporcional (véase figura 8). Ambas alumnas respondieron correctamente, justificando que la relación no es proporcional, con base en la interpretación gráfica.

Conclusión

La experiencia de enseñanza mostró tener efectos visibles en el razonamiento de Carolina y Celia. Antes de la experiencia, las dos alumnas revelaron ser ya capaces de resolver correctamente diversos problemas de valor desconocido, usando estrategias intuitivas que resultan de su experiencia personal y escolar. En el pretest ambas resuelven el problema del automóvil, contexto que aparentemente es cercano para ellas, formulando una estrategia de componer / descomponer, sin que sea posible verificar si usan razonamientos aditivos o multiplicativos.

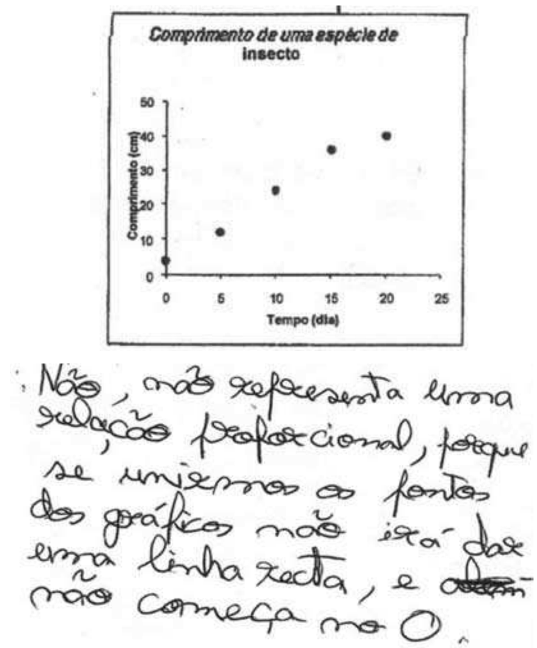
Las estrategias utilizadas por las alumnas, en el test intermedio y en el postest, revelan que ambas comprenden las relaciones multiplicativas escalares y funcionales inherentes a las relaciones proporcionales y, con base en esto, determinan el valor desconocido de los problemas. La explicitación de estas relaciones multiplicativas, expresadas tanto en el test intermedio como en el postest, parece resultar del conocimiento que construyeron durante la experiencia de enseñanza. En particular, las dos primeras tareas llevan a las alumnas a pensar sobre una situación común (una carrera entre dos concursantes). Discutiendo

Respuesta de Carolina*



* " No es proporcional porque si nosotros hiciéramos una línea en la diagonal que pasase por el punto 0, los puntos tendrían que quedar encima de ella y en este gráfico la mayor parte de ellos no quedan".

Respuesta de Celia**



** "No, no representa una relación proporcional, porque si unimos los puntos de los gráficos no darían una línea recta, y no comienza en 0".

Figura 8 Justificaciones de Carolina y Celia de que una relación representada gráficamente no es proporcional

conjeturas y argumentos, exploraron la situación desde el punto de vista matemático, descubriendo que la tortuga había corrido a una velocidad constante (relación de proporcionalidad directa). Estas dos tareas permiten también que las alumnas comprendan que no "todo es proporcional". La carrera de la tortuga hace emerger regularidades numéricas multiplicativas entre variables que son objeto de discusión colectiva durante la tercera clase de la primera tarea, haciendo que las alumnas generalicen que en una relación de proporcionalidad directa una variable crece / decrece de la misma manera que la otra (si el tiempo crece 2,5 veces, la distancia lo hace 2,5 veces), que existe una constante (entendida como un "mismo número") cuando se divide una variable por la otra y, además, que en su gráfico los puntos se disponen sobre un recta que pasa por el origen (el "punto cero de los dos ejes"). Para resolver los problemas de las tareas siguientes las alumnas utilizan relaciones multiplicativas que existen en las relaciones proporcionales.

Las estrategias usadas en los test intermedio y final revelan que las alumnas sofisticaron su conocimiento intuitivo, en la medida en que la tabla no difiere mucho de la representación componer / descomponer. La representación en tabla es una sofisticación de la representación presentada inicialmente, siendo aceptada como una evolución natural en la eficiencia de la representación de los datos, es decir, sin ruptura con el conocimiento que las alumnos ya tenían. Por otro lado, la comprensión de las relaciones multiplicativas les permite resolver el problema con un solo cálculo, determinando el factor escalar o la constante de proporcionalidad, y evitando así la realización de varios cálculos, como en la estrategia componer / descomponer.

Además de esto, la experiencia de enseñanza parece haber contribuido también para desarrollar en las alumnas la capacidad de resolución de problemas, así como el razonamiento y la comunicación matemáticas, ya que fueron confrontadas con una diversidad de situaciones problemáticas objeto de discusión en grupo. Esta discusión obligó a la movilización del conocimiento matemático de cada estudiante, lo que no siempre fue generador de consenso, pero permitió negociar y construir de forma participativa el significado de proporcionalidad directa y de constante de proporcionalidad. Este modo de trabajo en la clase permitió también confrontar las generalizaciones sobre las regularidades numéricas, descubiertas por los alumnos, habiendo sido encontrada una manera consensual para comunicarlas matemáticamente, utilizando diferentes representaciones. Por otro lado, las alumnas continuaron desarrollando su capacidad de resolución de problemas, identificando variables y datos numéricos y formulando estrategias de resolución. Ambas revelaron alguna mejoría en la presentación escrita de sus estrategias, pero sólo Carolina fue capaz de describir con algún detalle su razonamiento.

En lo relacionado con los problemas pseudoproporcionales, verificamos que, antes de la experiencia, los alumnos revelan una fuerte tendencia para aceptar la existencia de proporcionalidad directa en problemas donde esta relación no existe. A pesar de esto, la experiencia de enseñanza parece haber influenciado su capacidad de resolución de problemas, pues desde el comienzo puso en confrontación una relación proporcional con una relación no proporcional, ambas en un mismo contexto problemático, estimulando la construcción del concepto por los alumnos, evidenciando, desde luego, que no todas las relaciones son proporcionales. El trabajo de los alumnos en grupo y después de la discusión en colectivo permitió el análisis de los problemas, mostrando la importancia de la lectura atenta y una interpretación cuidadosa de los valores numéricos. Este hecho parecer ser importante para contrariar la tendencia a aceptar que "todo es proporcional".

Los resultados alcanzados sugieren que las ideas centrales de esta experiencia de enseñanza —en que los alumnos pueden desarrollar su razonamiento proporcional realizando actividades de naturaleza exploratoria e investigativa y resolviendo problemas, en un contexto educativo marcado por la articulación entre el trabajo de grupo y la discusión colectiva— contribuyeron de modo determinante para el aprendizaje de los alumnos. El papel del profesor es fundamental en la propuesta de tareas y en la monitorización del trabajo de los grupos, pero sin quitarles a éstos la responsabilidad por su trabajo. Este papel es aún más decisivo en los momentos de trabajo colectivo, cuando los alumnos son llamados a presentar sus resoluciones, eventualmente interpelándose unos a otros, y donde los significados de los conceptos matemáticos son negociados y finalmente institucionalizados.

Referencias biblio y cibergráficas

Ben-Chaim, D. et ál., 1998, "Proportional reasoning among seventh grade students with different curricula experiences", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 36, pp. 247-273.

Boavida, A. M. y J. P. Ponte, 2002, "Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas", en: GTI, org., *Reflectir e investigar sobre a prática profissional,* Lisboa, APM, pp. 43-55.

Carpenter, T. P. et ál., 1999, *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction,* Portsmouth, NH, Heinemann.

Christiansen, B. y G., Walther, 1986, "Task and activity", en: B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte, eds., *Perspectives on Mathematics Education,* Dordrecht, D. Reidel, pp. 243-307.

Cramer, K. y T. Post, 1993, "Connecting research to teaching proportional reasoning", *Mathematics Teacher,* vol. 86, núm. 5, pp. 404-407.

Cramer, K., T. Post y S. Currier, 1993, "Learning and teaching ratio and proportion: Research implications", *Universidad de Minnesota,* [en línea], disponible en: http://education.umn.edu/rationalnumberproject/93_4.html

Christou, C. y G. Philippou, 2002, "Mapping and development of intuitive proportional thinking", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 20, pp. 321-336.

Denzin, N. K. y Y. S. Lincoln, 1994, "Introduction: Entering the field of qualitative research", en: N. K. Denzin e Y. S. Lincoln, eds., *Handbook of Qualitative Research,* Londres, Sage, pp. 1-17.

Greer, B., 1997, "Modelling reality in the mathematics classroom: The case of word problems", *Learning and Instruction,* vol. 7, pp. 293-307.

Heller, P. et ál., 1989, "Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting2, *Journal of Research in Science Teaching,* vol. 26, núm. 3, pp. 205-220.

Kaput, J. y M. M. West, 1994, "Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns", en: J. Confrey y G. Harel, eds., *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics,* Albany, NY, State University of New York Press, pp. 181-234.

Karplus, R., P. Steven y E. Stage, 1983, "Proportional reasoning of early adolescents", en: R. Lesh y M. Landau, eds., *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes,* Orlando, FL, Academic Press, pp. 45-90.

Lamon, S. J., 1993, "Ratio and proportion: Connecting and children's thinking", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 24, pp. 41-61.

_, 1995, "Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology", en: J. T. Sowder y B. P. Schappelle, eds., *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades,* Albany, NY, State University of New York Press, pp. 167-198.

Lesh, R., T. Post y M. Behr, 1988, "Proportional reasoning", en: J. Hiebert y M. Behr, eds., *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, pp. 93-118.

Ministério da Educação (ME), 2007, *Programa de Matemática do ensino básico,* Lisboa, ME.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, Virginia, NCTM.

Nesher, P., 1980, "The stereotyped nature of school word problems", *Learning of Mathematics,* vol. 1, núm. 1, pp. 41-48.

Noelting, G., 1980, "The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1, Differentiation of stages", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 11, pp. 217-253.

Ponte, J. P., 2005, "Gestão curricular em Matemática", en: GTI, Ed., *O professor e o desenvolvimento curricular,* Lisboa, APM, pp. 11-34.

Post, T., M. Behr y R. Lesh, 1988, "Proportionality and the development of prealgebra understandings", en: *Algebraic Concepts in the Curriculum K-12*, Yearbook, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 78-90.

Steffe, L. P. y P. W. Thompson, 2000, "Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements", en: R. Lesh y A. E. Kelly, eds., *Research Design in Mathematics and science Education,* Hillsdale, NJ, Erlbaum, pp. 267-307.

Steinthorsdottir, O. B., 2006, "Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies", *Proceedings of the 30th PME International Conference,* vol. 5, pp. 169-176.

Tourniaire, F. y S. Pulos, 1985, "Proportional reasoning: A review of the literature", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 16, pp. 181-204.

Tsuruda, G., 1994, *Putting it together,* Portsmouth, NH, Heinemann.

Vergnaud, G., 1983, "Multiplicative structures", en: R. Lesh y M. Landau, eds., *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* New York, Academic Press, pp. 127-174.

Van Dooren, W., D. de Bock, M. Evers y L. Verschaffel, 2006, "Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions", *Proceedings of the 30th PME International Conference,* vol. 5, pp. 305-312.

Verschaffel, L., B. Greer y E. de Corte, 2000, *Making sense of word problems,* Lisse, The Netherlands, Swets y Zeitlinger.

Weidermann, W., 1995, "Problem solving in math class: Word problems were never like this", *Middle School Journal,* vol. 27, núm. 1, pp. 11-17.

Wood, T., 1999, "Creating a context for argument in mathematics class", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 30, núm. 2, pp. 171-191.

Referencia

Ana Isabel Silvestre y João Pedro da Ponte, "Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional", traducción del portugués por Diego Alejandro Pérez y Diana Jaramillo, *Revista Educación y Pedagogía,* Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011, pp. 137-158.

Original recibido: noviembre 2009
Aceptado: marzo 2010