

INFORMES DE INVESTIGACIÓN Y ENSAYOS INÉDITOS

Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados

*Jhonattan Medina Orellán*¹

*José Ortiz Buitrago*²

Universidad de Carabobo

Resumen

Con una enseñanza de la matemática basada en el desarrollo de competencias matemáticas se podría lograr que los estudiantes aprendan a usar matemáticas en diversas situaciones reales, más que saber simplemente el dominio formal de los conceptos matemáticos. Tomando esto como premisa, se planificó y desarrolló un programa educativo para el aprendizaje de la matemática, donde se integró la modelización matemática y la calculadora gráfica, para que los estudiantes, en situación de repitencia de la asignatura Introducción a la Matemática, correspondiente al primer semestre de las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de una universidad pública venezolana, logren competencias matemáticas vinculadas a las funciones reales. Participaron 17 estudiantes voluntarios. El estudio se abordó como una investigación de campo con carácter evaluativo a través de la metodología de evaluación de programas. Se analizaron las producciones de los estudiantes y se encontró que lograron resolver problemas con el apoyo de la calculadora y adquirir tales competencias matemáticas.

Palabras claves: calculadora gráfica, modelización matemática, funciones reales.

1 Profesor de Matemáticas. Magíster en Educación Matemática. Investigador adscrito a la Unidad de Investigación del Ciclo Básico, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay, Venezuela. Correo electrónico: jhonattanmedina@gmail.com

2 Profesor de Matemáticas. Doctor en Didáctica de la Matemática. Investigador adscrito a la Unidad de Investigación del Ciclo Básico, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay, Venezuela. Correo electrónico: ortizbuitrago@gmail.com

Mathematical skills and the use of graphing calculator in solving applied problems

Abstract

By teaching mathematics with a focus on the development of mathematic skills, students may learn to use math in various real situations rather than simply mastering formal mathematical concepts. Having this in mind, we planned and developed an educational program for the learning of mathematics, by integrating mathematical modeling and graphing calculators so that freshman students repeating the Introduction to Mathematics course in the Social and Economic Sciences School at a Venezuelan public university, would achieve mathematical skills connected to real functions. 17 volunteer students participated in this study, carried out as a field research project with an evaluative nature through the methodology program assessment. The students' productions were analyzed, finding out that they were able to solve problems with the help of a calculator and to gain such mathematical skills.

Key words: graphing calculator, mathematical modeling, real functions.

Introducción

En la educación universitaria se ha venido incrementando el interés por las tasas de repitencia académica en cada una de las distintas asignaturas del currículo y se ha tomado en cuenta que su magnitud y crecimiento constituye un riesgo de fracaso universitario. Este trabajo surge como una preocupación de los investigadores, al observar las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de habilidades y destrezas para aplicar los conocimientos matemáticos, específicamente los relacionados con las funciones reales. Los estudiantes sujetos de estudio cursaron por lo menos una vez, sin aprobar, la asignatura Introducción a la Matemática, la cual forma parte del plan de estudios en el primer semestre de las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Estado de Aragua, Venezuela.

Entre las dificultades mostradas por los estudiantes resultan relevantes las siguientes: la noción de *variable*, como «una letra que representa un número» o «el valor desconocido en una ecuación» (Fey & Steen, 2003: 77). La noción de *crecimiento* y de *valores óptimos de una función*: «algunos alumnos tienden a definir los intervalos de crecimiento en el eje y» (Alson, 1996: 53). En el tratamiento de las representaciones, los estudiantes y las personas en general «leen con dificultad las curvas e interpretan deficientemente

las gráficas y las propiedades comunes que de ellas se derivan» (Lacasta & Pascual, 1998: 12). Estas dificultades son *a posteriori* barreras que impiden al estudiante de ciencias económicas y sociales aplicar los conocimientos de funciones reales en su presente y futuro como profesional del área.

Para el aprendizaje de funciones reales en las ciencias económicas y sociales se debe desarrollar competencias matemáticas vinculadas a:

1. El concepto de función: regla de formación, variables dependientes e independientes, dominio y rango.
2. Los sistemas de representación de funciones: expresiones algebraicas, tablas de valores numéricos y gráficas.
3. El comportamiento de una función: crecimiento, decrecimiento, simetría.
4. La aplicación de funciones en el mundo real.

Para contribuir al desarrollo de las competencias mencionadas anteriormente, se podría gestionar el aprendizaje de las funciones reales basado en las aplicaciones más que en el dominio formal de los conceptos matemáticos. Se debería procurar una enseñanza que contemple no solo la «presentación de los conceptos y resultados con las correspondientes técnicas de cálculo, sino también un entrenamiento de la intuición y el

desarrollo del sentido crítico, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones» (García, Martínez & Miñano, 1995: 20).

En este sentido, se acude a la modelización matemática porque conduce a que los estudiantes resuelvan problemas no escolarizados, propios de su mundo físico y social, lo cual coadyuvará a su apropiación de conceptos y propiedades matemáticas y además a comprender y valorar la aplicabilidad de la matemática en sus actividades cotidianas y en su preparación profesional. Es decir, la modelización matemática es una estrategia de enseñanza, que vincula la matemática con el mundo real (Niss, Blum & Galbraith, 2007).

Además de una enseñanza basada en la modelización matemática, también se incorpora la calculadora gráfica (CG), ya que presenta la oportunidad de construir, analizar y conjeturar propiedades matemáticas en forma interactiva y además visualizar situaciones referidas a los objetos matemáticos estudiados y sus relaciones con el contexto que le sirve de referencia a la situación problemática, ayudando así a mejorar la visión y actitud del estudiante hacia las matemáticas.

La CG es un recurso didáctico muy fácil de llevar al aula, comparado con la factibilidad que proporcionan otros recursos tecnológicos al docente, como por ejemplo el computador. Además, es útil para la comprensión del tema de las funciones, porque a través de ella, como se dijo, se puede graficar, explorar y formular conjeturas, así como visualizar de inmediato las funciones reales en sus tres formas de representación: algebraica, por gráfica y por tabla de valores numéricos, y a su vez reducir los largos cálculos que muchas veces fatigan a los estudiantes. La CG, en el sentido motivacional, proporciona «al estudiante una manera más actualizada y amena de realizar su actividad de aprendizaje» (Rodríguez & Flores, 2004: 137), incluso «puede revolucionar la manera en que los

estudiantes “ven” y “sienten” la matemática» (Berry & Francis, 2000: 4).

Incorporando al currículo estos organizadores y gestionando la implementación de un programa educativo mediante un curso-taller, se plantearon las siguientes interrogantes de investigación: ¿Cuáles son las competencias matemáticas que muestran los estudiantes cuando usan la CG en el aprendizaje de funciones reales? ¿Cuáles son los niveles de aplicación en el proceso de modelización matemática que muestran los estudiantes cuando resuelven problemas de funciones reales con la CG?

Para dar respuesta a las interrogantes se diseñó e implementó un programa para la enseñanza y aprendizaje de funciones reales, que tiene como organizadores curriculares la modelización matemática y la CG. Así, los objetivos de investigación son los siguientes:

1. Analizar las competencias matemáticas mostradas por los estudiantes cuando estudian funciones reales con la CG.
2. Analizar los niveles de aplicación del proceso de modelización matemática por parte de los estudiantes en el aprendizaje de funciones reales con la CG.

Competencias y modelización matemática

La potencialidad de la CG y la modelización en la enseñanza de las matemáticas han sido un tema de interés en las últimas décadas. Los trabajos de Ortiz (2002), Planchart (2001), Fey & Steen (2003), Cross & Moscardini (1985), Blum & Niss (1991), Townend & Pountney (1995), Ríos (1995), entre otros, proponen que el proceso de modelización matemática, en síntesis, debe llevarse en cuatro fases abiertas ejecutadas como un proceso cíclico, cuyas características se resumen en el cuadro 1:

Cuadro 1. Descripción de las fases del proceso de modelización matemática.

Fase 1 Análisis	Fase 2 Traducción	Fase 3 Resolución	Fase 4 Devolución
El estudiante analiza, define patrones, visualiza, identifica, representa, relaciona.	El estudiante determina, abstrae, sintetiza, generaliza.	El estudiante calcula, resuelve, usa herramientas.	El estudiante reflexiona, compara, interpreta, comunica, argumenta, constata.

Con el proceso de modelización matemática se busca adicionalmente que los estudiantes logren competencias matemáticas relacionadas con los conceptos matemáticos modelizados, entendiendo la competencia matemática como «la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundamentados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano» (Rico, 2005: 2). De acuerdo con los fines de la presente investigación, se adoptó el modelo de competencias usado en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA), el cual consta de los siguientes tipos de competencias:

- *Pensar y razonar* (PR). El estudiante es capaz de plantear cuestiones propias de la matemática y de conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones planteadas.
- *Argumentar* (AR). El estudiante es capaz de conocer lo que son las formas matemáticas para resolver cuestiones y seguir implicaciones lógicas.
- *Comunicar* (CO). El estudiante es capaz de expresarse en contextos matemáticos en forma oral o escrita.
- *Modelar* (MO). El estudiante es capaz de llevar a cabo un proceso de modelización en la resolución de problemas del mundo real.
- *Plantear y resolver problemas* (RP). El estudiante es capaz de resolver problemas por diversas vías y plantear problemas de diferentes tipos.
- *Representar* (RE): El estudiante es capaz de distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y de usar la representación mas ajustada a la situación planteada.
- *Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones* (LS). El estudiante es capaz de hacer uso del lenguaje simbólico y formal, además de manejar enunciados y comprender formulas y cálculos.
- *Usar herramientas y recursos* (HE). El estudiante es capaz de utilizar herramientas en diferentes situaciones problemáticas que le planteen.

Metodología

El diseño de investigación está basado en la metodología de evaluación de programas. Se asume que la investigación es de campo con carácter evaluativo. La

recogida de información se llevó a cabo mediante la implementación de un curso-taller con 17 estudiantes voluntarios y en situación de repitencia de la asignatura Introducción a la Matemática.

Los objetivos específicos del programa implementado fueron los siguientes:

1. Aportar elementos básicos para el manejo de la calculadora gráfica (CG).
2. Estudiar en forma general el dominio y el rango de una función real de variable real.
3. Estudiar propiedades de la función lineal con calculadora gráfica.
4. Estudiar propiedades de la función cuadrática con calculadora gráfica.
5. Modelizar, a través de la función lineal y la cuadrática, situaciones relacionadas con administración, contaduría y economía.

El curso-taller se estructuró en seis sesiones y tuvo una duración de dieciocho horas —a razón de tres horas por cada sesión de trabajo—. En el grafico 1 se visualiza el contenido abordado en la implementación del programa.

En general, los contenidos del programa fueron los siguientes:

1. *En relación con las funciones reales*. Definición de función. Variables dependiente, independiente. Representación a través de tablas, sistema de coordenadas cartesianas y en forma algebraica. Dominio y rango de funciones en general: función lineal, cuadrática, logaritmo, exponencial, por parte o a trozos, valor absoluto, seno, coseno. Función lineal, ecuación de la recta, pendiente de la recta, paralelismo, perpendicularidad. Estudio de la función cuadrática: crecimiento, decrecimiento, simetría, máximos y mínimos.
2. *En relación con la calculadora gráfica*. Se utilizó la CG Voyage 200 de Texas Instruments. Se dio introducción al manejo de la calculadora gráfica. Encendido y apagado. División de pantallas. Ajuste de las escalas en los ejes cartesianos. Uso del escritorio APPS. Resolución de ecuaciones, factorización, sumas algebraicas, obtención de la expresión decimal de un número racional. Uso de los comandos para introducir una función,

graficar una función, obtener una tabla de valores de la función. Ejercicios y problemas con el apoyo de la calculadora gráfica.

3. *En relación con la modelización matemática.* Resolución de problemas vinculados a las ciencias económicas y sociales.

La secuencia de las actividades llevadas a cabo durante cada una de las seis sesiones de trabajo del curso-taller fue la siguiente:

1. Entrega de materiales y comentarios acerca de los propósitos de la sesión.
2. Mención y explicación de los conceptos para estudiar.
3. Desarrollo de las actividades propuestas en las hojas de trabajo.
4. Reflexión grupal acerca de las experiencias encontradas durante el desarrollo de las actividades.
5. Cierre de la sesión.

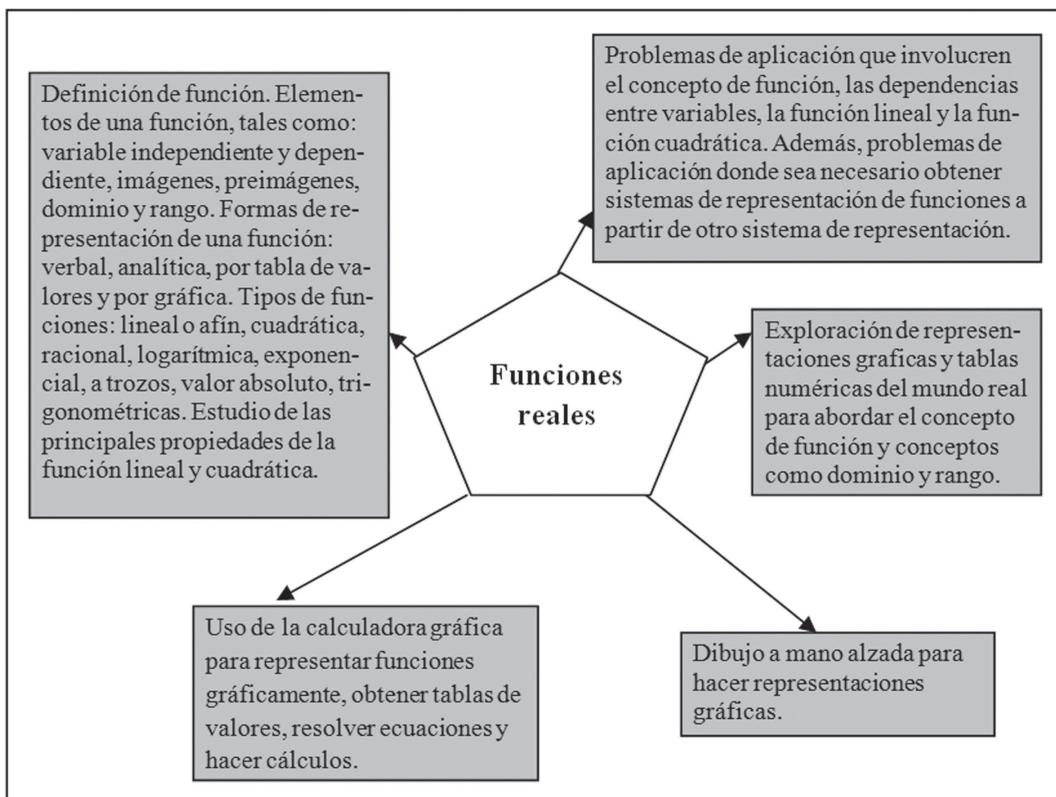


Figura 1. Contenido matemático para enseñar.

Las actividades para el logro de los objetivos del programa se diseñaron tomando en cuenta los propósitos de cada actividad y las discusiones, sugerencias y comentarios surgidos en el grupo de investigación.

A efecto de recoger los datos, se utilizaron los instrumentos siguientes: hoja de notas diarias, guión de observación participante y cuaderno de notas. Todos fueron elaborados en discusiones colectivas del grupo de investigación y posteriormente validados por otros expertos. En particular, el cuaderno de notas permitió recoger información amplia acerca del conocimiento

matemático puesto en práctica por los estudiantes, los procedimientos para resolver determinadas actividades, las dificultades que pudieron presentarse, los errores cometidos, la evolución del estudiante durante cada sesión de trabajo y hasta las posibles sugerencias de los estudiantes para las mejoras del programa.

El análisis de los datos se hizo a partir de las producciones de los participantes, tanto las pantallas realizadas en las calculadoras —se guardaron en archivos de computadora— como lo realizado en cada cuaderno de notas y los vídeos de cada sesión.

Resultados

Para el análisis de datos se tomaron en cuenta las producciones de los 17 estudiantes participantes del curso-taller al resolver veintiuna actividades en las seis sesiones de trabajo.

Los estudiantes manejaron nueve tipos de funciones diferentes con la CG: función afín, cuadrática, racional, radical, exponencial, logarítmica, valor absoluto, a trozos y trigonométricas. Además se usaron las diversas formas de representación de funciones: por tabla de valores, analítica y **gráfica**, así como también el tránsito de una representación a otra. Y se plantearon actividades de modelización en el campo de las ciencias económicas y sociales con funciones lineales y cuadráticas.

Los niveles de logro previstos para cada uno de los indicadores asociados a las competencias adquiridas por los estudiantes son los siguientes:

- *Mucho* (M). Se alcanza este nivel cuando el estudiante muestre argumentos matemáticos o verbales sólidos en el momento de emitir una respuesta o de abordar una actividad.
- *Poco* (P). Se alcanza este nivel cuando el estudiante muestre argumentos matemáticos o verbales más o menos aceptables en el momento de emitir una respuesta o de abordar una actividad.

- *Nada* (N). Se alcanza este nivel cuando el estudiante no resuelva la actividad o muestre argumentos matemáticos o verbales fuera de contexto.

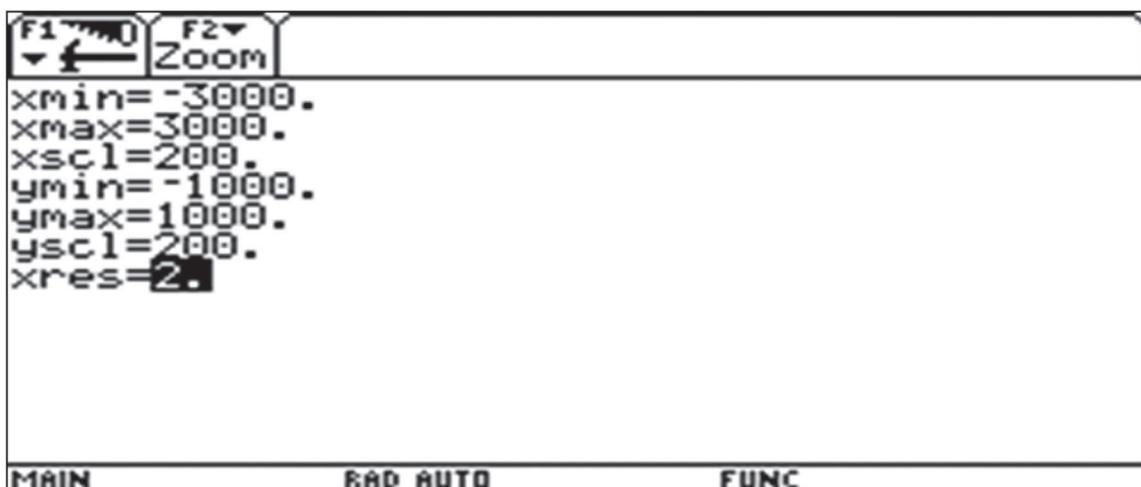
Competencias en funciones reales

En este apartado se mostrará el análisis de algunas producciones que reflejan la estrategia de análisis seguida en la investigación.

La actividad número 10 se enunciaba de la siguiente forma:

Costos por alquiler de automóviles. El costo mensual por el alquiler de un automóvil depende de la cantidad de kilómetros recorridos. Luisa observa que en mayo el costo de manejo fue de 380 BF (bolívares fuertes) por 768 kilómetros y que en junio el costo fue de 460 BF por 1.280 kilómetros. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual y por manejar un automóvil y la distancia recorrida x .

1. Encuentre la función lineal entre x e y .
2. ¿Cuánto sale manejar 2.400 kilómetros al mes?
3. ¿Qué representa la ordenada en el origen de la gráfica? Obtenga la gráfica y realice el siguiente ajuste:



4. ¿Por qué una función lineal es un modelo apropiado para esta situación?

Esta actividad fue abordada por los estudiantes en la sesión 4. Se buscaba que fueran capaces de encontrar variables dependientes e independientes, de determinar la ecuación de la recta que modelaba la situación planteada, de graficar la función y de hacer ajuste de

las escalas, para así vincular un concepto matemático con problemas del mundo real. El siguiente cuadro muestra una descripción de los indicadores asociados con cada una de las competencias desarrolladas por los estudiantes en esta actividad:

Los resultados en términos de las competencias perseguidas se muestran en el cuadro 3:

Cuadro 2. Competencias alcanzadas por los estudiantes en la actividad número 10.

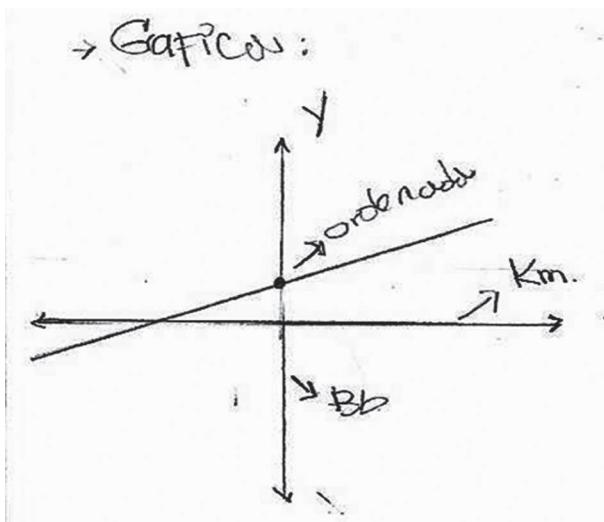
Competencia	Indicador	Descripción
Pensar y razonar	Reconoce la variable dependiente e independiente en una expresión.	El estudiante es capaz de señalar en una expresión cuál es la variable dependiente e independiente.
	Determina la ecuación general de una recta a partir de otros elementos conocidos.	El estudiante es capaz de encontrar la ecuación de una recta por los métodos algebraicos conocidos.
Argumentar	Argumenta cuando un punto pertenece a la gráfica de una función.	El estudiante es capaz de interpretar en forma matemática o verbal cuándo un punto de una gráfica satisface la relación de dependencia entre dos variables.
Representar	Representa una función mediante su expresión analítica, verbal, por tablas numéricas o gráficas.	El estudiante muestra capacidades en determinados momentos para construir gráficas en el plano cartesiano, construir tablas o usar la expresión analítica.
	Representa variables dependientes e independientes en la construcción de una gráfica.	El estudiante es capaz de ver una relación de dependencia entre dos variables y representarlas gráficamente.

Cuadro 3. Nivel de logro de los estudiantes en la actividad número 10.

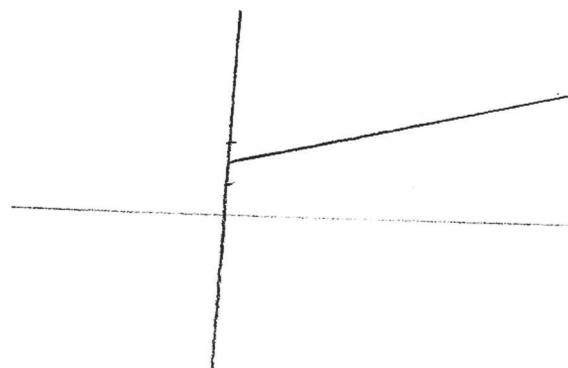
Competencia	Indicador	Número de estudiantes		
		M	P	N
Pensar y razonar	Reconoce la variable dependiente e independiente en una expresión.	15		02
	Determina la ecuación general de una recta a partir de otros elementos conocidos.	14	01	02
Argumentar	Argumenta cuando un punto pertenece a la gráfica de una función.	11	04	02
Representar	Representa una función mediante su expresión analítica, verbal, por tablas numéricas o gráficas.	15		02
	Representa variables dependientes e independientes en la construcción de una gráfica.	13	02	02

Estos resultados permiten ver que, entre 17 estudiantes del taller, solo 15 abordaron la actividad. Se destaca que 14 de ellos (93.3%) lograron el fin primordial de la actividad, que era determinar la ecuación de la recta vista como modelo matemático. Ciertos estudiantes (26.6%) no lograron totalmente argumentar sobre lo que significa que un

punto pertenezca a dicho modelo matemático. Este problema tenía la particularidad de que el dominio de la función eran todos los reales, pero tomando en cuenta el contexto de la función, el dominio de la función solo admite valores mayores que cero. En este sentido, el estudiante 17 (E17) mostró la gráfica siguiente:



Como puede verse, el estudiante distingue correctamente la ubicación de la ordenada al origen —sin embargo, la gráfica representa solo la función lineal, sin expresar el contexto de aplicación al problema—; también representa o asocia los ejes cartesianos con las variables dependientes e independientes inmersas en el problema.



Caso contrario al anterior es el estudiante 5 (E5), que mostró la gráfica correcta adaptada a la situación. Sin embargo, no asocia los ejes cartesianos con las variables dependiente e independiente.

A su vez expone:

3) No tiene parte negativa respecto al eje y - ya que no existe -165F ni -1 Km.

Por lo que se evidencia un dominio adecuado por parte del estudiante con respecto a la inclusión de la función lineal en este tipo de problemas.

El estudiante 14 (E14) resolvió de forma correcta el problema, destacándose la manera adecuada de abordar dicha actividad:

Organiza los datos:

Resuelve:

La Calculadora Gráfica en la Enseñanza

Datos

x	y
Km	P
(768, 380)	
(1280, 460)	

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2000-4

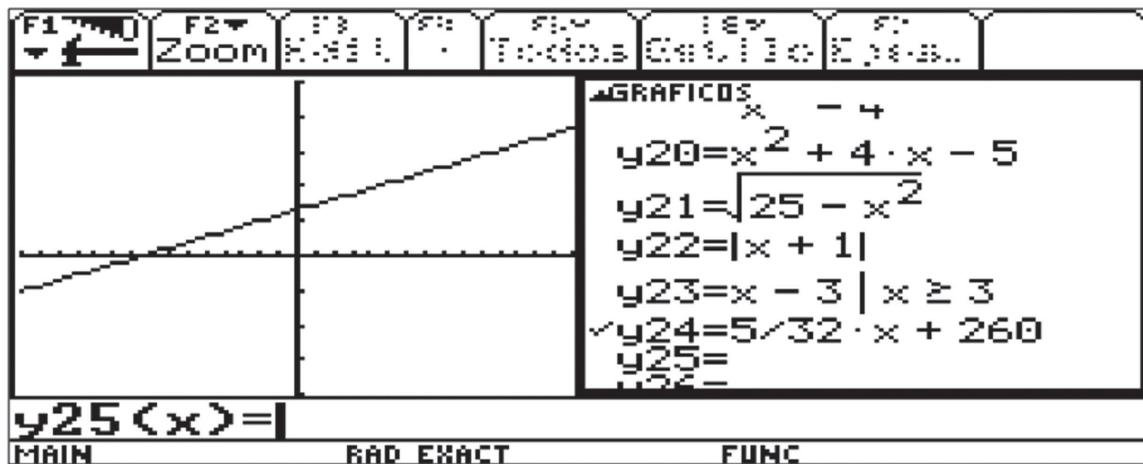
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 380 = \frac{5}{32}(x - 768)$$

$$y = \frac{5}{32}x - 120 + 380$$

$$R_1 = \left\{ y = \frac{5}{32}x + 260 \right\}$$

Hace uso de la CG:



Por otra parte, en la pregunta: ¿Por qué una función lineal es un modelo apropiado para esta situación?, hay que destacar la respuesta de la estudiante 1 (E1) —entre otros estudiantes que respondieron acer-

tadamente, vinculando este problema con dos aspectos muy significativos: lo económico y lo matemático; la vinculación entre los conceptos creciente y decreciente con ganancias y pérdidas, respectivamente—:

④ Porque a mayor cantidad de Km recorridos, mayor es el pago mensual del uso del automóvil. Esto demuestra que al ser creciente la recta siempre hay ganancia a medida que se recorren kilómetros.

Para finalizar este análisis sobre las competencias en funciones reales, se muestran a continuación los logros cognitivos alcanzados por los estudiantes en re-

lación con las funciones reales y con las competencias planteadas por Rico (2005), que se constataron y se observaron en general:

Cuadro 4. Capacidades logradas por los estudiantes durante la ejecución de las actividades del curso-taller.

Competencias	Capacidades
Pensar y razonar	Determinan qué es y no es una función.
	Reconocen la variable dependiente e independiente en una expresión.
	Analizan gráficamente el dominio y el rango de una función.
	Determinan el dominio de una función.
	Determinan el rango de una función.
	Encuentran puntos de corte de la gráfica de una función con los ejes cartesianos.
	Encuentran intervalos de crecimiento de una función.
	Encuentran intervalos de decrecimiento de una función
	Determinan la ecuación general de una recta a partir de otros elementos conocidos.
	Determinan puntos de intersección entre gráficas de funciones.
	Encuentran el mínimo o el máximo en determinadas funciones.
	Reconocen las gráficas según su expresión analítica.
	Reconocen cuándo dos rectas son paralelas.
	Argumentar
Argumentan cuándo un valor forma parte o no del dominio de una función.	
Argumentan cuándo un valor forma parte o no del rango de una función.	
Argumentan cuándo un punto pertenece a la gráfica de una función.	
Argumentan cuándo una gráfica corta a los ejes de coordenadas rectangulares.	
Justifican sus hallazgos.	
Representar	Representan variables dependientes e independientes en la construcción de una gráfica.
	Trazan verticales y horizontales para la determinación del dominio y el rango, respectivamente.
	Representan una función mediante su expresión analítica, verbal, por tablas numéricas o gráficas.
	Hacen la vinculación entre sistemas de representación de funciones.
Comunicar	Interpretan el comportamiento de ciertas gráficas y lo discuten con sus compañeros.
	Muestran sus resultados al grupo mediante la CG.
	Expresan a otros sus razonamientos en la solución de un problema.
	Utilizan los sistemas de representación gráfica para hacerse entender con los otros.
Modelar	Trasladan un problema de funciones en el mundo real al contexto matemático.
	Aplican el concepto de función para determinar si una relación de dependencia entre cuestiones del mundo real representa una función.
	Usan la función lineal y la función cuadrática para resolver problemas del mundo real.
Plantear y resolver problemas	Resuelven problemas relacionados con la aplicación de las funciones en el mundo real.
Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico	Manejan un lenguaje natural y un lenguaje técnico.
	Manejan enunciados de funciones donde se incorpora un lenguaje técnico.
	Hacen cálculos, resuelven ecuaciones y usan variables en el estudio de funciones.
Usar herramientas y recursos	Usan la CG en el estudio de funciones.
	Manejan diversos sistemas de representación de funciones.

Niveles de aplicación del proceso de modelización matemática

Tomando en cuenta los esquemas del proceso de modelización matemática presentados por autores como Blum & Niss (1991), Ríos (1995), Townend & Pountney (1995) y Niss, Blum & Galbraith (2007), en el presente trabajo se consideran los siguientes niveles de aplicación del proceso de modelización matemática:

- Nivel I: *Análisis*. El estudiante es capaz de analizar el problema, definir patrones de comportamiento y visualizar la relación hipótesis-tesis. Es decir, podría realizar las siguientes actividades: analizar los elementos involucrados en el problema, definir patrones de comportamiento, visualizar las hipótesis planteadas, identificar conceptos inherentes al problema, representar el problema en forma diferente y relacionar el problema con problemas ya conocidos resueltos anteriormente.
- Nivel II: *Traducción*. El estudiante es capaz de determinar el modelo matemático que se ajusta a la situación planteada y relacionarlo con el contexto matemático y no matemático. Por lo general, se logra hallar la función real que modela el problema planteado.
- Nivel III: *Resolución*. El estudiante en el ámbito matemático es capaz de utilizar los conceptos matemáticos relacionados con funciones reales y resuelve el problema en forma matemática. Es decir, utiliza la función lineal en la resolución de cuestiones del contexto, modela el equilibrio entre las funciones demanda y oferta, haciendo uso de la intersección de gráficas de funciones, utiliza la función cuadrática en la resolución de cuestiones del contexto, integra la calculadora gráfica en la resolución de problemas contextualizados, utiliza

diferentes representaciones, además del lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, ajusta el modelo matemático y combina e integra con otros modelos.

- Nivel IV: *Devolución*. El estudiante es capaz de interpretar hallazgos matemáticos desde el ámbito del problema, así como comprobar la veracidad de los resultados. Es decir, reflexiona sobre los argumentos matemáticos usados para interpretar las soluciones encontradas en la resolución del problema y constata que efectivamente la solución encontrada es confiable.

A continuación se detalla el análisis realizado a una de las actividades resueltas por los estudiantes, la cual también fue abordada por Medina, Ortiz & Mendible (2012), pero solamente desde la perspectiva de la modelación matemática. En este artículo se analiza esta actividad y se muestra el número de estudiantes que se encuentran en un determinado nivel de aplicación del proceso de modelización matemática y su dominio del nivel entre mucho (M), poco (P) y nada (N).

Problema: La Fosforera Maracay

Enunciado: La Fosforera Maracay C.A. vende sus paquetes de fósforos a 2 BF (bolívares fuertes) cada paquete. Si x (en miles) es el número de paquetes producidos por semana, entonces el administrador sabe —según el mercado— que los costos de producción están dados en BF por: $y = 1.000 + 1.300x + 100x^2$. Determine el nivel de producción en que la compañía no obtiene ni utilidades ni pérdidas. ¿Hasta cuántas cajas semanales puede producir de manera que se obtenga siempre ganancias? Explique.

Discusión: En el siguiente cuadro se muestran los contenidos abordados, el contexto de ubicación del problema y las competencias logradas en relación con este problema.

Cuadro 5. Descripción del problema La Fosforera Maracay C.A.

Problema	Contenido	Contexto	Competencia
La Fosforera Maracay C.A.	<ul style="list-style-type: none"> • Función lineal y cuadrática • Proporcionalidad • Crecimiento y decrecimiento • Costos de producción y punto de equilibrio 	Administración y economía	<ul style="list-style-type: none"> • Pensar y razonar • Argumentar • Comunicar • Modelar • Lenguaje simbólico y las operaciones • Herramientas y recursos • Resolver problemas

Al resolverlo, los estudiantes necesitaron determinar la función ingresos $f(x) = 2.000x$, para luego, con la función costos $g(x) = 1.000 + 1.300x + 100x^2$, buscar la intersección entre ambas y así encontrar el nivel de producción de paquetes de fósforos donde no se producen ni ganancias ni pérdidas, es decir, el punto de equilibrio. Para hallar este punto, plantearon en la CG la ecuación $1.000 + 1.300x + 100x^2 = 2.000x$ y encontraron dichos puntos de intersección en la solución de esta ecuación. Otros se limitaron a usar la tabla de valores y comparar ambas funciones hasta encontrar el punto de intersección. Ningún estudiante usó la opción de la gráfica para encontrar la intersección, ya que para este problema la representación gráfica presentaba un obstáculo en el momento de encontrar la intersección entre ambas gráficas —aunque ya

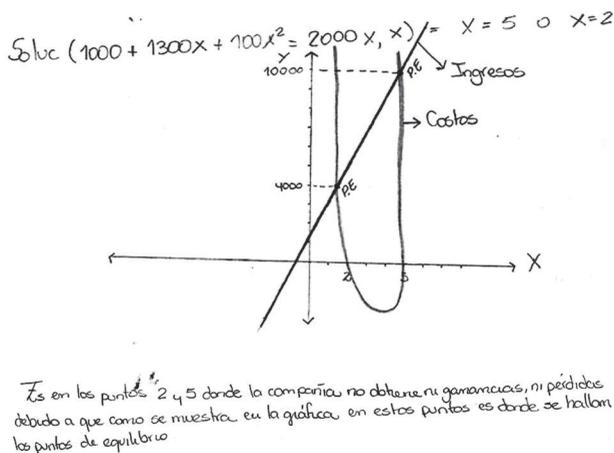


Figura 2. Uso de la representación de la situación problemática.

En esta gráfica se evidencia que las representaciones visuales tienen, por un lado, tareas de comunicación, pero, por otro, otras tareas significativas, como la de favorecer la formación de las representaciones internas, principalmente las imágenes mentales y conceptuales del objeto matemático (Planchart, 2001). En concordancia con este autor, el estudiante basa sus respuestas y argumentos en la representación visual y hace una vinculación conceptual del modelo matemático analítico de los ingresos ($f(x) = 2.000x$) con el gráfico (la recta); asimismo, relaciona los costos, la función cuadrática y la parábola. Puso en evidencia entonces capacidades para usar la CG, razonar y entender un problema, usar escalas en los ejes de coordenadas,

habían usado la intersección de gráficas en anteriores actividades del taller—, de ahí la importancia que tiene manejar los diferentes sistemas de representación de funciones. Se muestra a continuación la solución que dejó por escrito el estudiante E9 y la imagen de la CG donde desarrolló en forma analítica la resolución del problema, apoyándose en la situación gráfica con lápiz y papel, y se destaca que usó correctamente las escalas en los ejes de coordenadas cartesianas e interpretó y argumentó con la visualización gráfica para señalar la ubicación de los puntos de equilibrio, además de señalar cuál es el modelo matemático asociado a los costos y al ingreso por ventas. Usó, pues, esta gráfica como esquema mental a la situación problemática: en la auténtica gráfica, el vértice de la parábola es $(-B/2, -3.225)$.

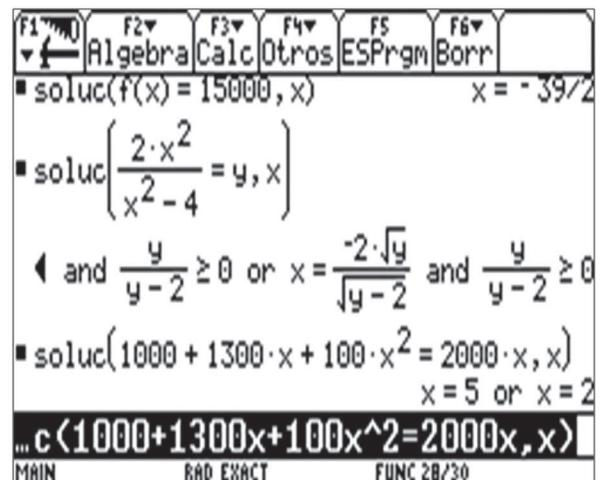


Figura 3. Solución del modelo gráfico y analítico matemático con la CG.

comunicar, aplicar representaciones gráficas y argumentar sus hallazgos.

Este mismo problema fue resuelto por el estudiante E1, como se puede observar en la figura 4.

Se observa, en comparación con el estudiante anterior, que el E1 es más expresivo, evidenciando que ha logrado un nivel considerable para la competencia de comunicar y argumentar sus hallazgos, aun cuando interpretó erradamente que «se deben producir 3.000 o 4.000 cajas para obtener ganancias», pues la realidad es que para obtener ganancias se deben producir entre 2.001 cajas y 4.999 cajas. Asimismo, se evidencia que fue capaz de llevar a cabo un proceso de mo-

delización matemática, pasando por sus distintas fases e interrelacionándolas entre sí, a pesar de que en su escrito no se evidencia que haya seguido las fases de acuerdo a como las razona o las aplica. Por otra parte, al igual que el estudiante anterior y otros estudiantes, el E1 encontró la intersección entre las funciones de manera analítica con la CG, lo que prueba la preferencia del grupo en general para usar la representación analítica de la función en este problema. Por último,

el E1 mostró capacidades para determinar la variable dependiente e independiente, usar la proporcionalidad “x en miles”, encontrar el modelo matemático, asociar gráficamente los modelos costos e ingresos, manejar entre sistemas de representación de funciones y argumentar sus respuestas.

Los resultados de esta actividad en términos de todos los participantes se presentan en el cuadro 6.

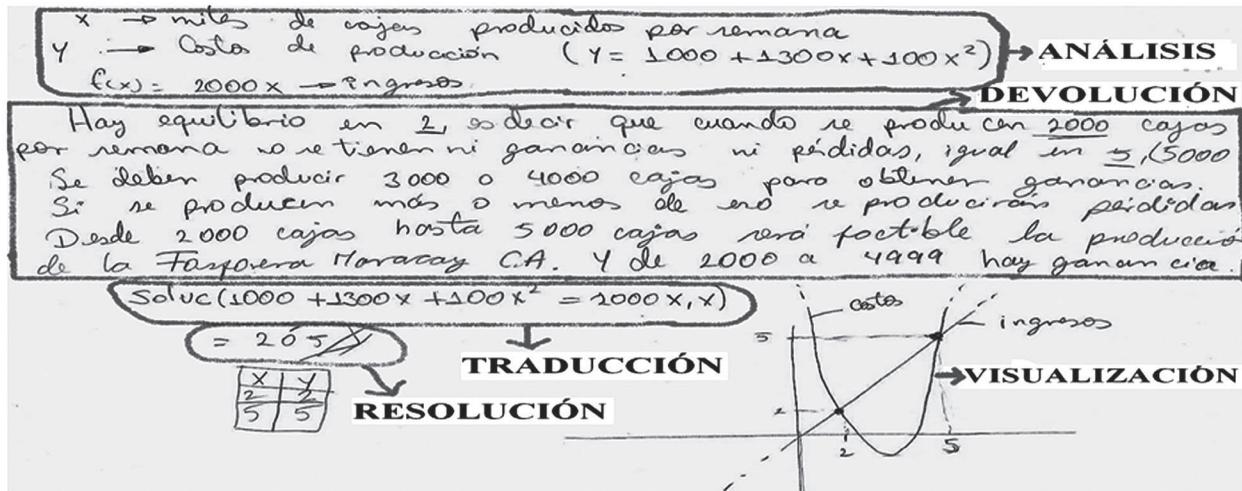


Figura 4. Proceso de modelización de un estudiante en la resolución del problema La Fosforera Maracay C.A.

Cuadro 6. Logros del proceso de modelización matemática para el problema la Fosforera Maracay A.C.

Niveles	Indicador	Número de estudiantes		
		M	P	N
Nivel I	Analiza los elementos de un determinado problema contextualizado.	12		05
	Define patrones de comportamiento.	12		05
	Visualiza las hipótesis planteadas.	12		05
Nivel II	Lleva un problema de un contexto no matemático al contexto matemático y viceversa.	11	01	05
Nivel III	Integra la calculadora gráfica en la resolución de problemas contextualizados.	12		05
	Utiliza la función lineal en la resolución de cuestiones del contexto.	12		05
	Utiliza la función cuadrática en la resolución de cuestiones del contexto.	12		05
	Modela el equilibrio entre las funciones demanda y oferta, haciendo uso de la intersección de gráficas de funciones.	11	01	05
Nivel IV	Interpreta las soluciones encontradas en la resolución de problemas contextualizados.	07	05	05
	Constata que efectivamente la solución encontrada es confiable.			17

Conclusiones

A continuación se presentan los aportes de la investigación:

1. Se analizaron las competencias logradas por los 17 estudiantes participantes en la investigación cuando estudiaron funciones reales con la calculadora gráfica (CG) en correspondencia con lo propuesto por Rico (2005). En general, sobre el aprendizaje de funciones reales, se destaca que:

- a. Los estudiantes lograron distinguir si una relación era o no una función, cuando fue mostrada mediante una tabla de valores, por pares ordenados y en contextos del mundo real.
- b. Los estudiantes mostraron capacidades para hallar el dominio y el rango de funciones a través de la gráfica.
- c. Fueron capaces de interpretar gráficas para hallar el dominio y el rango.
- d. Reconocieron el nombre del tipo de función y fueron capaces de completar tablas de valores.
- e. Analizaron tendencias de valores en las tablas numéricas para responder a situaciones planteadas en determinados momentos.
- f. Encontraron puntos de intersección con los ejes de coordenadas cartesianas y entre gráficas de funciones lineales o cuadráticas.
- g. Usaron los sistemas de representación de funciones para estudiar situaciones que ayudaran a comprender algunos principios de graficación.
- h. Determinaron puntos mínimos o máximos para funciones cuadráticas.

2. Se caracterizó el conjunto de competencias y habilidades que desarrollaron los 17 estudiantes en cada una de las fases del proceso de modelización matemática, a saber:

- *Fase de análisis.* Los estudiantes fueron capaces de construir gráficas y tablas numéricas para visualizar hipótesis, interpretar datos de la realidad y usarlos en forma matemática, identificar variables dependientes e independientes, asociar las funciones lineales y cuadráticas con modelos matemáticos válidos para la resolución de un problema, establecer relaciones entre crecimiento y decrecimiento de funciones con los aspectos económicos de ganancias y pérdidas.

- *Fase de traducción.* Los estudiantes mostraron que son capaces de hacer uso del lenguaje formal y natural para encontrar funciones reales y aplicarlas como modelos matemáticos, además de desenvolverse entre lo intramatemático y extramatemático presente en un problema de funciones reales con mucha facilidad.
- *Fase de resolución.* Los estudiantes utilizaron la función lineal en la resolución de cuestiones del contexto, modelaron el equilibrio entre las funciones demanda y oferta, haciendo uso de la intersección de gráficas de funciones, utilizaron la función cuadrática en la resolución de cuestiones del contexto, además de las tablas de valores y gráficas en la CG para resolver funciones reales en un contexto de economía.
- *Fase de devolución.* Los estudiantes fueron capaces de pensar, desarrollar y concluir razonable y justificadamente un problema del contexto de las ciencias económicas y sociales usando funciones reales y los sistemas de representación de funciones, además de constatar ciertos hallazgos en el mismo contexto.

En este trabajo, con la incorporación de la modelización matemática y la calculadora gráfica para el aprendizaje de funciones, se han obtenido algunos hallazgos que se relacionan con otras investigaciones, como la de Serpico (2006), quien encontró que «los estudiantes demostraron habilidades para escoger los valores de interés de acuerdo con la tendencia que se esté trabajando» y «fueron capaces de manejar los diversos sistemas de representación de funciones», además «extraen información importante de la representación gráfica» (2006: 245-246); esto fue mostrado también por la mayoría de los participantes. Por su parte, Azcárate & Deulofeu (1996) encontraron que los estudiantes cometen «errores en la graduación de los ejes» y tienen una «concepción discreta de los puntos de una recta o de un segmento» (1996: 78) —tal como se presentó en algunos participantes para estudiar el concepto de función—. Además, un error que se presentó muy poco, pero visto en otras investigaciones, es que «los alumnos tienden a dar un punto como respuesta a cuestiones referidas a intervalos» (1996: 79). En cuanto a Lacasta & Pascual (1998), encontraron que «muchos alumnos no eran capaces de dar un significado a las características globales de las gráficas tomadas de la vida real» (1998: 84). Sin embargo, los participantes no presentaron mayores dificultades para interpretar estas gráficas, pero sí para

escribir en determinados problemas de manera formal la respectiva argumentación y constatar resultados. Se coincide con Planchart (2001): «algunos estudiantes trasladaron los valores a dos conjuntos (diagrama de Venn) e hicieron corresponder un elemento de un conjunto al otro como lo establecía la tabla» (2001: 161), para luego señalar si la relación era función. Además, «se puede considerar que los estudiantes coordinaron sistemas de representación en la estructura de las actividades de modelación planteadas» (2001: 164).

Finalmente, en cuanto a los estudiantes en situación de repitencia, se abre un camino a explorar, el cual está orientado a la posibilidad de mejorar su situación cognitiva, sus actitudes y aptitudes con respecto al aprendizaje de la matemática y, por consiguiente, el rendimiento académico, incorporando nuevos organizadores del currículo en la planificación y gestionando programas educativos específicos junto con una adecuada implementación en el aula.

Referencias bibliográficas

- ALSON, Pedro (1996). *Métodos de graficación*. 3.ª ed. Caracas: Ediciones ERRO.
- AZCÁRATE GIMÉNEZ, Carmen y DEULOFEU PIQUET, Jordi (1996). *Funciones y graficas*. De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Síntesis.
- BERRY, John y FRANCIS, Bob (2000). «Descubrir las matemáticas avanzadas a través de actividades con calculadora». En: GÓMEZ, Pedro y WAITS, Bert (Comps.). *Papel de las calculadoras en el salón de clases*, pp. 3-14. Bogotá: Universidad de los Andes.
- BLUM, Werner y NISS, Mogens (1991). «Applied Mathematical Problem Solving Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction». En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, N.º 1, pp. 37-68. Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- CROSS, Mark y MOSCARDINI, Alfredo O. (1985). *Learning the Art of Mathematical Modelling*. Chichester, UK: Ellis Horwood Limited.
- FEY, James T. y STEEN, Lynn Arthur (2003). «Cantidad». En: STEEN, Lynn Arthur (Ed.). *La enseñanza agradable de las matemáticas*, pp. 67-101. México: Limusa.
- GARCÍA, Alfonso, MARTÍNEZ, Alfredo y MIÑANO, Rafael (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- LACASTA ZABALZA, Eduardo y PASCUAL BONIS, José Ramón (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.
- MEDINA ORELLÁN, Jhonattan, ORTIZ BUITRAGO, José y MENDIBLE, Arnaldo (2012). «Aprendizaje de funciones reales en ciencias económicas y sociales en un ambiente de innovación». En: *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, Vol. 23, pp. 671-679. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).
- NISS, Mogens, BLUM, Werner y GALBRAITH, Peter L. (2007). «Introduction». En: BLUM, Werner et ál. (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education*, pp. 3-32. 14.ª ed. New York: Springer.
- ORTIZ BUITRAGO, José (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- PLANCHART MÁRQUEZ, Orlando (2001). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. Tesis doctoral. Cuernavaca, México: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
- RICO, Luis (2005). «La competencia matemática en PISA». En: Fundación Santillana (Ed.). *La enseñanza de las matemáticas y el informe PISA*, pp. 21-40. Madrid: Santillana.
- RÍOS, Sixto (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza.
- RODRÍGUEZ, Jesús Rodolfo y FLORES LÓPEZ, Luis Felipe (2004). «Una propuesta didáctica para el cálculo usando calculadoras Voyage 200». En: *Memorias de la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. Hermosillo, México: Universidad de Sonora.
- SERPICO RUSSO, Ana (2006). *Calculadora gráfica y representaciones en la enseñanza del cálculo*. Trabajo de grado de maestría en Educación Matemática. Maracay, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- TOWNEND, M. Stewart y POUNTNEY, David C. (1995). *Learning Modelling with Derive*. Londres: Prentice Hall.