

Comprensión de frecuencias asociadas a las tablas de contingencia por estudiantes de psicología

Gustavo R. Cañadas

Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

María del Carmen Batanero Bernabeu

Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

María Magdalena Gea Serrano

Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

José Miguel Contreras García

Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

Las tablas de contingencia son un instrumento necesario en el trabajo de los profesionales de psicología y educación. Pero la investigación muestra dificultades en la emisión de juicios de asociación a partir de estas tablas. Una posible explicación de estos errores es que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de los distintos tipos de frecuencias involucradas en la tabla de contingencia y de sus interrelaciones. En este artículo se explora esta posibilidad mediante un cuestionario aplicado a una muestra de estudiantes después de la enseñanza del tema.

Palabras claves: tablas de contingencia, frecuencias, comprensión, estudiantes de psicología.

Understanding frequencies associated with contingency tables for psychology students

Abstract

Contingency tables are a necessary tool in the work of professionals in psychology and education. But research shows difficulties in expressing judgments of association from these tables. One possible

explanation for these errors is that students have difficulties in understanding the different types of frequencies involved in contingency tables and their interrelations. This article explores this possibility through a questionnaire applied to a sample of students after being thought this subject.

Key words: contingency tables, frequencies, understanding, psychology students.

1. Introducción

La comprensión de la distribución bidimensional en un estudio estadístico es primordial para el desarrollo posterior del análisis, en particular, para el estudio de la posible relación entre las dos variables que forman la distribución bidimensional (Crocker, 1981).

En el caso de que las variables del estudio sean cualitativas, la forma usual de presentación es una *tabla de doble entrada o tabla de contingencia*. Dicho tipo de tablas aparece con frecuencia para presentar la información estadística en la prensa o Internet, por lo que algunos autores (Arteaga *et al.*, 2011) indican que la interpretación correcta de estas tablas son parte de la cultura estadística que todo ciudadano requiere en la sociedad de la información.

En el campo de la psicología, estas tablas se usan con frecuencia en el diagnóstico y evaluación psicológica (Díaz & Gallego, 2006). Estos autores sugieren organizar los datos de diagnóstico en una tabla de contingencia (ver tabla 1), donde *A* representaría una posible patología, y *B*, un síntoma. La emisión de un diagnóstico requiere evaluar si existe o no asociación entre las correspondientes variables.

Tabla 1. **Tabla de contingencia de 2 x 2.**

	A	No A	Total
B	a	b	a + b
No B	c	d	c + d
Total	a + c	b + d	

A pesar del interés del tema, se presta poca atención a su enseñanza, suponiendo que su interpretación es intuitiva. Por el contrario, la tabla 1 es un objeto semiótico complejo, pues en ella subyacen varios conceptos implícitos y sus interrelaciones.

Por un lado, aunque todas las celdas *a*, *b*, *c*, *d* presentan el mismo tipo de datos (frecuencias absolutas de los valores de la variable correspondiente a su fila y su columna), desde el punto de vista psicológico no se perciben por igual. Una frecuencia alta en las celdas *a* (presencia del carácter *A*, presencia del carácter *B*) y en las *d* (ausencia del *A*, ausencia del *B*) indicaría una asociación positiva entre las variables, mientras que una frecuencia alta en las otras dos celdas (*b* y *c*) sugeriría una asociación negativa.

Además, de una celda dada (por ejemplo, *a*) se pueden deducir tres frecuencias relativas diferentes (Díaz & Fuente, 2005):

- Frecuencia relativa doble: $\frac{a}{a+b+c+d}$
- Frecuencia relativa con respecto a su fila: $\frac{a}{a+b}$
- Frecuencia relativa con respecto a su columna: $\frac{a}{a+c}$

Más aún, es posible calcular las frecuencias relativas marginales de filas y columnas:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} \text{ y } \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Supuestos equiprobables todos los sujetos de la muestra, y aplicando la regla de Laplace como cociente entre casos favorables y posibles, se puede también obtener una probabilidad diferente de cada una de las frecuencias relativas anteriores:

- Probabilidad de que ocurran simultáneamente *A* y *B*: $P(A \cap B) = \frac{a}{a+b+c+d}$
- Probabilidad condicional de *A*, sabiendo que ha ocurrido *B*: $P(A | B) = \frac{a}{a+b}$

- Probabilidad condicional de B , sabiendo que ha ocurrido A : $P(B|A) = \frac{a}{a+c}$

- Probabilidades simples de A y B :

$$P(A) = \frac{a+c}{a+b+c+d} \text{ y } P(B) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$$

Todos estos objetos matemáticos coexisten y pueden ser confundidos por el estudiante al realizar la interpretación de los datos de una tabla de contingencia para estudiar la asociación entre las variables A y B . De hecho, la investigación didáctica (por ejemplo, Estepa, 1994; Estepa & Batanero, 1995; Cañadas *et al.*, 2011 y Cañadas, 2012) ha mostrado la enorme dificultad de los estudiantes al juzgar la asociación en las tablas de contingencia.

La hipótesis que analizamos en este artículo es que parte de esta dificultad puede ser debida a la confusión al interpretar las diferentes frecuencias de la tabla de contingencia y sus relaciones en caso de independencia. Nos apoyamos para formular esta hipótesis en un trabajo previo de Falk (1986) sobre probabilidad condicionada, que muestra que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos probabilidades condicionales $P(A|B)$ y $P(B|A)$, denominando a este error *falacia de la condicional transpuesta*. Pensamos que este error u otros relacionados se pueden también producir al interpretar las frecuencias conjuntas y condicionadas.

El objetivo del trabajo es estudiar esta hipótesis. Para ello se evalúa la comprensión de los diferentes tipos de frecuencias y sus relaciones en caso de independencia o de asociación después de la enseñanza del tema, pues los errores en este punto pueden influenciar sus juicios de asociación.

2. Fundamentos

2.1. Marco teórico

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático son los conceptos y propiedades involucrados en la resolución de los problemas. Conocimiento conceptual y procedimental son polos de un continuo, aunque el conocimiento conceptual es más flexible y generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema, sino que incluye la comprensión implícita o explícita de los principios de un dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Sfard (1991) describe un concepto como una idea matemática en su forma “oficial”, es decir, un constructo teórico correspondiente al universo matemático formal. La autora indica que se pueden definir de forma estructural (describiendo sus condiciones o propiedades) u operacional (mediante una operación o fórmula). En nuestro análisis tendremos en cuenta los dos tipos de definiciones.

Godino (2002) indica que un objeto matemático se caracteriza por su definición y el enunciado de sus propiedades (teoremas, proposiciones), pero estas pueden variar según las distintas instituciones en que se trate. Por lo tanto, hemos de concederles un carácter relativo. En nuestra evaluación aplicamos tanto las definiciones como las propiedades que fueron enseñadas a los estudiantes en el desarrollo del tema, para tener en cuenta el significado institucional de la tabla de contingencia en la enseñanza que ellos recibieron.

El autor denomina *significado de un objeto matemático* (en nuestro caso, la tabla de contingencia) al conjunto de prácticas matemáticas realizadas para la resolución de problemas ligados a dicho objeto y diferencia entre *significado institucional* (el aceptado en una institución, por ejemplo, de enseñanza) y *significado personal* (el dado al objeto por una persona, que puede variar con respecto al significado institucional). Como componentes del significado institucional y personal incluye los problemas, lenguaje, definiciones de conceptos asociados, propiedades, procedimientos y argumentos relacionados.

Godino (1996) propone un modelo de comprensión en el que considera que la comprensión se produce cuando hay una correspondencia entre los significados institucionales y personales para un objeto dado. También considera que la comprensión es gradual y se incrementa en la medida que la persona acepta o adquiere mayor número de elementos del significado institucional del objeto que se pretende enseñar. En nuestro trabajo analizaremos la comprensión de las frecuencias en las tablas de contingencia adquirida a partir de un proceso de estudio matemático del tema.

2.2. Antecedentes

Las investigaciones sobre comprensión de tablas de contingencia las inician Inhelder & Piaget (1955), quienes describen las estrategias usadas por chicos de diferentes edades en los juicios de asociación a partir de tablas de 2×2 similares a la tabla 1. Cuando se pide estudiar la posible asociación entre las variables

A y B a partir de los datos de la tabla, el razonamiento más simple es usar solo la celda a para juzgar la asociación, es decir, consideran que hay asociación solo si el número de casos en que se presentan a la vez A y B es suficientemente elevado.

En el segundo nivel de razonamiento, los sujetos comparan celdas dos a dos (por ejemplo, comparan la celda a con la celda b), sin entender que las celdas a y d tienen el mismo peso en relación con la asociación. Otro nivel posterior sería comprender cuáles son los casos favorables ($a + d$) y desfavorables ($b + c$) a la asociación, comparándolos entre sí o con el total ($a + b + c + d$).

Estos mismos resultados se repiten en investigaciones con sujetos adultos, donde Jenkins & Ward (1965) indican que la estrategia de comparar las diagonales ($a + d$) y ($b + c$) solo es válida cuando las frecuencias marginales para una de las variables son iguales, y proponen para casos generales como estrategia correcta comparar la diferencia entre las probabilidades $P(B|A)$ y $P(B|No A)$.

En España la investigación más extensa sobre este tema es la de Estepa (1994), quien estudió las concepciones sobre la asociación en estudiantes del último curso de secundaria. Describió la *concepción causal*, según la cual el sujeto solo considera la asociación entre variables si puede atribuirse a la presencia de una relación de causa y efecto entre las mismas. También definió la *concepción unidireccional*, donde el estudiante no admite la asociación inversa, considerándose la asociación inversa como independencia. En un estudio posterior (Batanero, Estepa & Godino, 1997), los autores mostraron que la concepción causal no mejora con la enseñanza.

Nuestro trabajo continúa el de estos últimos autores; más concretamente, tratamos de analizar la comprensión de las frecuencias en la tabla de contingencia, sus relaciones y las condiciones que han de cumplir en caso de asociación, que es un punto no estudiado en los trabajos previos. Nuestro contexto es, además, el de estudiantes que han recibido enseñanza en el tema, mientras que los anteriores trabajos se han realizado con estudiantes sin instrucción previa.

3. Método

3.1. Muestra y contexto educativo

En el estudio participaron 104 estudiantes españoles del primer curso de Psicología, divididos en dos

grupos: 51 estudiantes en el primer grupo (8 hombres y 43 mujeres) y 53 en el segundo (16 hombres y 37 mujeres). La mayoría se encontraba en un rango de edad comprendido entre 19 y 20 años, con algún estudiante aislado que superaba esta edad.

La evaluación se llevó a cabo como un componente de la enseñanza, dentro de la asignatura Técnicas de Análisis en la Investigación Psicológica, obligatoria en el grado de Psicología y que cuenta con 6 créditos (cada crédito supone 25 horas de trabajo del estudiante).

El tiempo dedicado a la enseñanza fue de seis sesiones de una hora de duración. Cuatro de dichas sesiones se llevaron a cabo en el aula tradicional en los grupos mencionados y se dedicaron a la presentación de los temas. También se dedicaron dos sesiones prácticas en el laboratorio de informática, en las cuales cada alumno trabajó independientemente con el ordenador utilizando unas hojas de Microsoft Excel, preparadas para realizar las actividades prácticas.

Cada grupo de teoría se dividió en tres subgrupos de aproximadamente 15 alumnos, todos atendidos por el mismo profesor. Cada estudiante trabajó independientemente con el ordenador utilizando, además de las mencionadas hojas de Excel, unos programas elaborados por el equipo de investigación, que permitían el cálculo y representación gráfica de las tablas de contingencia. Se aseguró la validez de la observación realizada de la enseñanza mediante la presencia de observadores y la grabación en audio de las sesiones. Los profesores habituales de los cursos también asistieron a las sesiones.

El contenido se ha organizado en cuatro temas:

1. *Tablas de contingencia, lectura e interpretación*. El objetivo es que los alumnos aprendieran a:
 - a. Resumir datos sobre dos variables estadísticas en una tabla de contingencia.
 - b. Identificar las frecuencias dobles.
 - c. Calcular las frecuencias relativas dobles, marginales y condicionales e interpretarlas.
 - d. Representar gráficamente los datos mediante diagramas de barras adosadas, diagramas de barras apiladas y gráficos tridimensionales.
 - e. Calcular probabilidades simples, compuestas y condicionales a partir de datos de una tabla de contingencia.

2. *Asociación estadística, dependencia funcional e independencia.* Se trató de que los alumnos aprendieran a:

- Diferenciar la asociación estadística, dependencia funcional e independencia.
- Reconocer el tipo de relación entre dos variables comparando las frecuencias condicionales.
- Calcular las frecuencias esperadas en caso de independencia.
- Analizar posibles explicaciones de una asociación estadística: relación causal, interdependencia, tercera variable explicativa o asociación espuria.

3. *El estadístico chi-cuadrado y contrastes asociados.* Se dedicó a:

- Dar una medida de la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas en caso de independencia.
- Calcular e interpretar el estadístico chi-cuadrado y sus grados de libertad.
- Comprender los pasos para llevar a cabo el contraste de independencia y el contraste de homogeneidad.
- Comprender los supuestos del contraste chi-cuadrado.

4. *Medidas de asociación.* Se trató de que los alumnos aprendieran a:

- Interpretar la intensidad de la dependencia entre dos variables en una tabla de contingencia.
- Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas de 2×2 : coeficiente phi de Pearson, riesgo relativo y razón de productos cruzados.
- Calcular e interpretar medidas de asociación en tablas de $r \times c$: coeficiente de contingencia de Pearson y V de Cramer.
- Calcular e interpretar medidas de reducción del error de predicción de una variable, cuando se conoce el valor de la otra: lambda de Goodman y Kruskal.

Para asegurar la validez del estudio, como se dijo, las sesiones fueron observadas. Las interacciones en la clase también fueron grabadas en audio, para posteriormente poder comparar con la observación y anotar

las principales incidencias y dudas planteadas por los estudiantes. Estos materiales fueron colocados en Internet para su acceso.¹

En lo que sigue se describe el cuestionario que se pasó individualmente a los estudiantes como parte de la evaluación de la asignatura.

3.2. Cuestionario y resultados por ítem

El cuestionario estuvo formado por 10 ítems que recogían los contenidos más importantes incluidos en la enseñanza del tema. Para elaborarlo, se siguieron una serie de recomendaciones psicométricas para asegurar la calidad de los instrumentos (Martínez, 1995):

- En primer lugar, se delimitó el contenido que se ha de evaluar con este instrumento, a partir del análisis del proceso de estudio diseñado.
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo incluir ítems con varios apartados, cada uno de los cuales tiene dos opciones: Verdadero o Falso, que permiten en poco tiempo acceder a la evaluación de un contenido amplio.
- El número de ítems (10) se fijó teniendo en cuenta el tiempo disponible, el tipo de evaluaciones a las que estaban acostumbrados los estudiantes y el deseo de cubrir el máximo de contenidos.
- Se procedió a la elaboración de una colección de ítems iniciales. A partir de ellos, mediante una serie de revisiones por parte de los autores del trabajo, así como de dos profesores del área de metodología de las ciencias del comportamiento, y analizando en cada una los contenidos evaluados, se seleccionaron los que forman el cuestionario.

Los ítems se componen de un enunciado inicial y varias opciones, cada una de las cuales puede ser Verdadera o Falsa. A continuación se analiza cada ítem y se describe resumidamente sus resultados, marcando en negrita las opciones que corresponden a enunciados verdaderos.

Este ítem evalúa la comprensión de las diferencias entre dos representaciones posibles de los datos de una tabla de contingencia: el diagrama de barras adosado y el apilado. La opción *b* es verdadera, pues los dos diagramas sirven para representar las distribuciones condi-

¹ cf. <http://www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html>

cionales de una de las variables (por ejemplo, la X) con respecto a cada uno de los valores de la otra (en este caso, la Y). La opción a es falsa, pues ambos diagramas

pueden construirse con frecuencias absolutas, relativas o porcentajes, y también es falsa la c , porque lo que se representa son frecuencias condicionales y no marginales.

Ítem 1. La principal diferencia entre el diagrama de barras apilado y el adosado es:

- El diagrama de barras apilado solo se puede construir con frecuencias absolutas, mientras que el adosado se puede construir con frecuencias absolutas o porcentajes.
- En el diagrama de barras apilado las frecuencias condicionales de cada valor de X para un mismo valor de Y se representan en una misma barra y en el adosado se representan la una al lado de la otra.
- En el diagrama de barras apilado las frecuencias marginales de cada valor de X se representan en una misma barra y en el adosado se representan la una al lado de la otra.

Los resultados (ver tabla 2) indicaron que fue sencillo reconocer que se puede usar diferentes tipos de frecuencias en los gráficos (opción a : 75% de respuestas correctas) y que fue algo más difícil diferenciar el tipo de información que se representa en las barras adosadas o en las apiladas (opciones b y c , con 44.7% y 53.2% de respuestas correctas, respectivamente).

Esta respuesta podría implicar que, al menos para el ítem propuesto, estos estudiantes no alcanzaron el nivel de extracción de datos en la interpretación de gráficos. Este nivel de interpretación consiste en poner en relación un elemento de un eje con otro elemento de otro eje en un mismo gráfico, en este caso, leer la frecuencia asociada con un valor de la variable (Bertin, 1967).

Ítem 2. En una tabla de contingencia, la suma de las frecuencias relativas marginales por filas es:

- Igual a la suma de frecuencias relativas marginales por columnas.
- Igual al total de la muestra.
- Igual a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra.

Este ítem evalúa la comprensión de la relación entre frecuencias relativas marginales por filas y columnas; el total de la muestra y la existente entre las frecuencias relativas marginales, y frecuencias absolutas marginales (Nortes, 1993).

La opción a es verdadera: la suma de frecuencias relativas marginales por filas o columnas es igual a la unidad, y la c es también verdadera: las frecuencias relativas marginales se calculan dividiendo las frecuencias absolutas marginales por el tamaño de la muestra. La b es falsa, pues la suma

de las relativas marginales es 1 y no el total de la muestra.

En este ítem (ver tabla 2) fue sencillo reconocer que la suma de las frecuencias relativas marginales por filas no es igual al total de la muestra, pero sí igual a las frecuencias relativas marginales por columna (opciones a y b , con 56.4% y 64.9% de respuestas correctas, respectivamente); hubo más dificultad en ver que estas frecuencias son iguales a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra (opción c , con solo 39.4% de aciertos).

Ítem 3. Las frecuencias dobles absolutas y relativas están relacionadas entre sí mediante:

- Las frecuencias condicionales.
- Las frecuencias marginales.
- El tamaño de la muestra.

Se analiza la comprensión de la relación de las frecuencias dobles absolutas y relativas en una tabla de

contingencia. La opción c es verdadera, ya que las frecuencias dobles relativas se obtienen al dividir las

frecuencias dobles absolutas por el tamaño de la muestra. La *a* es falsa: las frecuencias condicionales se obtienen dividiendo las frecuencias dobles absolutas ó relativas por la frecuencia marginal absoluta ó relativa, y la *b* es también falsa: las frecuencias marginales se obtienen sumando las frecuencias dobles absolutas ó relativas.

En este ítem se obtuvieron muy buenos resultados en todos sus apartados (ver tabla 2), por lo que se deduce que los estudiantes adquirieron la relación entre las frecuencias absolutas y relativas. El porcentaje de aciertos fue igual al 69% o superior en las tres opciones.

Ítem 4. Para calcular las frecuencias relativas condicionadas se necesitan:

- Las frecuencias absolutas dobles de la fila o columna por las que se condicionan las frecuencias relativas condicionadas.
- Las frecuencias relativas de la fila o columna por las que se condicionan las frecuencias relativas condicionadas y el total de la muestra.
- Las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por las que se condicionan las frecuencias relativas condicionadas.

Este ítem considera el cálculo de las frecuencias relativas condicionales (Amón, 1993). La opción *a* es verdadera: la frecuencia condicional se obtendría dividiendo las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por las que se condicionan las frecuencias relativas condicionadas, y también la *c* es verdadera,

por el mismo motivo. La *b* es falsa, pues no se requiere el uso del total de la muestra. En este ítem (ver tabla 2) se obtuvo bastante diferencia de dificultad, según el apartado. Fueron algo más difíciles los apartados *a* (18.1% de aciertos) y *c* (36.2%); fue algo más sencillo, no demasiado, el *b*, con 53.2% de respuestas correctas.

Ítem 5. Las frecuencias de una tabla de $r \times c$ se pueden representar en los gráficos:

- Únicamente en el diagrama de barras apilado y en el adosado.
- Únicamente en el gráfico tridimensional y en el diagrama de barras adosado.
- En los mismos gráficos que una tabla de 2×2 .

Este ítem evalúa la comprensión de la relación del tamaño de la tabla de contingencia con los distintos tipos de gráficos que se pueden utilizar. La opción verdadera es la *c*, ya que no existen unos gráficos específicos para las tablas de 2×2 y otros gráficos para las tablas de $r \times c$; en ambos casos se puede utilizar el diagrama

de barras apilado, el diagrama de barras adosado y el gráfico tridimensional. Las opciones *a* y *b* son falsas.

Fue en general muy sencillo, como se ve en los altos porcentajes de respuestas correctas a todos los apartados, siempre por encima del 62% (ver tabla 2).

Ítem 6. El objetivo de construir una tabla de contingencia es:

- Resumir los datos de dos variables cuantitativas.
- Resumir los datos de dos variables cualitativas.
- Resumir los datos de dos variables cualitativas o también numéricas con pocos valores diferentes.

Este ítem evalúa los conocimientos del estudiante sobre el objetivo de estas tablas y la diferencia entre los tipos de variables (cuantitativo y cualitativo). La opción *b* es verdadera: un objetivo es resumir los datos, de manera que se pueda trabajar con ellos, y este tipo de tablas se emplean para variables cualitativas, y la *c* es también verdadera, aunque el

uso de las tablas es más generalizado en variables cualitativas. La *a* es falsa, pues la tabla no sería conveniente si la variable numérica tuviese muchos valores diferentes.

Tuvieron dificultad moderada los dos primeros apartados (56.4% y 54.3% de respuestas correctas),

pero fue difícil (19.1% de aciertos) el tercero, por lo que bastantes estudiantes parecen no reconocer la posibilidad de usar tablas de contingencia con variables numéricas si el número de valores es pequeño.

Los ítems siguientes evalúan el conocimiento que el estudiante adquiere de propiedades sencillas que permiten evaluar la asociación o independencia entre las dos variables de una tabla de contingencia (Bata-nero & Díaz, 2008).

Ítem 7. Para que dos variables de una tabla de contingencia sean independientes, han de ser iguales:

- a. Las frecuencias relativas condicionales por columnas.
- b. Las frecuencias relativas condicionales por filas.
- c. Las frecuencias relativas condicionales y las relativas marginales.

En este ítem todas las opciones son verdaderas: en caso de independencia, todas las distribuciones condicionales por fila o columna coinciden o, lo que es lo mismo, la distribución de X no cambia cuando se condiciona por un valor de Y ni la distribución de Y cambia cuando se condiciona por un valor de X . Además, frecuencias condicionales y marginales relativas coinciden.

En este ítem (ver tabla 2) fueron sencillos los dos primeros apartados, que se refieren a la igualdad de frecuencias relativas condicionales por filas o columnas en caso de independencia, con más del 70% de respuestas correctas. Fue más difícil reconocer que también tienen que ser iguales las frecuencias relativas condicionales y las relativas marginales (la opción c), donde hubo un pequeño porcentaje de aciertos.

Ítem 8. Las frecuencias esperadas se calculan mediante:

- a. Las frecuencias absolutas dobles y el total de la muestra.
- b. Las frecuencias relativas dobles y el total de la muestra.
- c. Las frecuencias absolutas marginales y el total de la muestra.
- d. Las frecuencias relativas marginales.

Con este ítem se deseaba evaluar el conocimiento del estudiante del procedimiento de cálculo de las frecuencias esperadas en una tabla de contingencia. La opción c es verdadera, pues las frecuencias esperadas se calculan multiplicando las frecuencias marginales de la fila y columna entre sí y dividiendo este producto

por el total de la muestra, es decir:
$$e_j = \frac{f_i \cdot f \cdot j}{n}$$

El resto de opciones son falsas: la a indica que se confunde las frecuencias absolutas dobles con las frecuencias absolutas marginales en el cálculo de las frecuencias esperada; en la b se cambia en la fórmula las frecuencias relativas dobles por las frecuencias absolutas marginales, y en la d , en fin, se confunde las frecuencias relativas y las absolutas marginales, además de no dividir por el total de la muestra.

Los resultados muestran (ver tabla 2) que el ítem fue sencillo: los estudiantes reconocieron las fórmulas erróneas de cálculo de las frecuencias esperadas (opciones b y d); fue algo más difícil, no demasiado,

recordar que estas frecuencias se calculan también mediante las frecuencias marginales (opción c), posiblemente porque los estudiantes no llegaron a realizar personalmente los cálculos, salvo en ocasiones aisladas, sino que utilizaron la hoja de Excel. Todas las opciones tienen más del 62% de aciertos.

Este ítem evalúa el conocimiento del estudiante de la relación entre las frecuencias relativas y las marginales en caso de independencia en una tabla de contingencia. La opción verdadera es la b : en caso de asociación podría darse la igualdad en un caso, pero no en todas las celdas. La a es falsa, ya que describe una propiedad de la independencia y no de la asociación, y también es falsa la c , puesto que puede ocurrir que, en caso de asociación, en unos casos se cumpla esta igualdad, y en otros, no.

En este ítem hubo mucha diferencia de dificultad, según la opción. Los estudiantes recordaron que en caso de asociación podrían ser iguales, en alguna celda, los productos de las frecuencias relativas marginales por fila y columna que les corresponda y la

frecuencia esperada (opción *c*, con 62% de respuestas correctas); paradójicamente rechazaron la forma afir-

mativa de la misma proposición (opción *b*), que fue muy difícil.

Ítem 9. En caso de que haya asociación entre variables, las frecuencias relativas dobles:

- a. En todas las celdas son iguales al producto del total por fila y columna que les corresponda a esas frecuencias, es decir: $h_{i,j} = h_i \cdot h_j$
- b. Puede ocurrir que coincida en alguna celda al producto del total por fila y columna que les corresponda, es decir: $h_{i,j} = h_i \cdot h_j$
- c. Nunca son iguales al producto del total por fila y columna que les corresponda, es decir, nunca se cumple $h_{i,j} = h_i \cdot h_j$

Ítem 10. En las siguientes tablas de 2 x 2 indicamos el tipo de asociación que informan las diferentes celdas ¿Cuál de las siguientes tablas es correcta?

a.		
	B	No B
A	Dep. directa	Dep. directa
No A	Dep. directa	Dep. inversa

b.		
	B	No B
A	Dep. directa	Dep. inversa
No A	Dep. inversa	Dep. directa

c.		
	B	No B
A	Dep. directa	Dep. inversa
No A	Dep. inversa	Dep. inversa

El último ítem evalúa el conocimiento de la relación existente entre diferentes celdas en la tabla de 2 x 2 y el signo de la asociación. Las celdas *a* y *d* (presencia-presencia y ausencia-ausencia) **indican asociación directa**, y las *d* y *c*, referidas a la presencia-presencia (*A-B*) y la ausencia-ausencia (*No A-No B*), **asociación inversa**, según Inhelder & Piaget (1955). Por lo tanto, la opción verdadera es la *b*; las restantes son falsas. Este ítem se ha incluido porque en investigaciones previas (Smedlund, 1965; Shaklee & Mins, 1982; Estepa, 1994) se ha comprobado que muchos individuos basan sus juicios de asociación directa únicamente en la celda *a*.

Resultó sencillo en los tres apartados, con más del 95% de respuestas correctas: reconocieron los estudiantes que las celdas de la diagonal principal, es decir, las celdas correspondientes a presencia de los dos caracteres o ausencia de los dos caracteres informan de una dependencia directa y las celdas con presencia de uno de los dos caracteres y ausencia del otro informan de una dependencia inversa.

Por lo tanto, alcanzarían un nivel de razonamiento sobre la asociación *alto* en la teoría de Inhelder & Piaget (1955).

4. Síntesis de resultados y discusión

Una vez analizados los resultados por ítem, usaremos la tabla 2, donde se resumen las respuestas, para comparar la dificultad relativa. Observamos también pocas respuestas en blanco, lo que indica el interés de los estudiantes al completar la tarea.

Como vimos, en cada ítem el alumno debe dar tres o cuatro respuestas, una por cada opción, cada una de las cuales puede ser correcta o incorrecta, por lo que hay un total de 30 subítems, que evalúan la comprensión de diferentes propiedades. Los podemos clasificar en sencillas (si la respuesta correcta la da el 70% o más de los estudiantes) o difíciles (si solo acierta el 40% o menos); el resto de preguntas, con índice de dificultad entre los límites anteriores, tendría una dificultad moderada.

Tabla 2. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en los ítems (n = 94).

	Apartado	Correcto	Incorrecto	En blanco
Ítem 1	a (Falsa)	71 (75.5)	14 (14.9)	9 (9.6)
	b (Verdadera)	42 (44.7)	44 (46.8)	8 (8.5)
	c (Falsa)	50 (53.2)	35 (37.2)	9 (9.6)
Ítem 2	a (Verdadera)	53 (56.4)	41 (43.6)	0 (0)
	b (Falsa)	61 (64.9)	33 (35.1)	0 (0)
	c (Verdadera)	37 (39.4)	57 (60.6)	0 (0)
Ítem 3	a (Falsa)	76 (80.9)	15 (16)	3 (3.2)
	b (Falsa)	73 (77.7)	18 (19.1)	3 (3.2)
	c (Verdadera)	65 (69.1)	26 (27.7)	3 (3.2)
Ítem 4	a (Verdadera)	17 (18.1)	74 (78.7)	3 (3.2)
	b (Falsa)	50 (53.2)	40 (42.6)	4 (4.3)
	c (Verdadera)	34 (36.2)	56 (59.6)	4 (4.3)
Ítem 5	a (Falsa)	83 (88.3)	3 (2.9)	8 (8.5)
	b (Falsa)	64 (68.1)	22 (23.4)	8 (8.5)
	c (Verdadera)	59 (62.8)	27 (28.7)	8 (8.5)
Ítem 6	a (Falsa)	53 (56.4)	40 (42.6)	1 (1.1)
	b (Verdadera)	51 (54.3)	42 (44.7)	1 (1.1)
	c (Verdadera)	18 (19.1)	75 (79.8)	1 (1.1)
Ítem 7	a (Verdadera)	67 (71.3)	24 (25.5)	3 (3.2)
	b (Verdadera)	69 (73.4)	22 (23.4)	3 (3.2)
	c (Verdadera)	27 (28.7)	64 (68.1)	3 (3.2)
Ítem 8	a (Falsa)	74 (78.7)	18 (19.1)	2 (2.1)
	b (Falsa)	80 (85.1)	12 (12.8)	2 (2.1)
	c (Verdadera)	59 (62.8)	33 (35.1)	2 (2.1)
	d (Falsa)	87 (92.6)	5 (5.3)	2 (2.1)
Ítem 9	a (Falsa)	39 (41.5)	51 (54.3)	4 (4.3)
	b (Verdadera)	17 (18.1)	73 (77.7)	4 (4.3)
	c (Falsa)	59 (62.8)	31 (33)	4 (4.3)
Ítem 10	a (Falsa)	91 (96.8)	1 (1.1)	2 (2.1)
	b (Verdadera)	90 (95.7)	2 (2.1)	2 (2.1)
	c (Falsa)	91 (96.8)	1 (1.1)	2 (2.1)

Preguntas sencillas

Si ordenamos las preguntas de más a menos sencilla, obtenemos la siguiente ordenación de preguntas por grado de comprensión:

1. Comprender la relación existente entre diferentes celdas en la tabla de 2 x 2 y el signo de la asociación (ítem 10, en todos sus apartados).
2. Diferenciar las frecuencias relativas marginales y las absolutas marginales y la relación entre ellas (ítem 8, apartado d).
3. Reconocer las representaciones gráficas para las tablas de r x c (ítem 5, apartado a).
4. Reconocer la fórmula correcta de cálculo de las frecuencias esperadas (ítem 8, apartado b).

5. Descartar las frecuencias condicionales para transformar frecuencias absolutas dobles en relativas (ítem 3, apartado a).
6. Diferenciar las frecuencias absolutas dobles y marginales en el cálculo de las frecuencias esperadas (ítem 8, apartado a).
7. Descartar las frecuencias marginales para transformar frecuencias absolutas dobles en relativas (ítem 3, apartado b).
8. Reconocer que se pueden representar diferentes tipos de frecuencias en los gráficos (ítem 1, apartado a).

Preguntas difíciles

Por el contrario, si ordenamos de más a menos difícil los ítems con menos del 40% de aciertos, obtenemos

el siguiente orden en las propiedades menos comprendidas por los estudiantes:

1. Reconocer que puede ocurrir que aunque exista asociación, en alguna celda aislada la frecuencia esperada puede coincidir con la observada, es decir: $h_{ij} = h_{i.} \cdot h_{.j}$ (ítem 9, apartado *b*).
2. Reconocer que en el cálculo de las frecuencias relativas condicionales son necesarias solo las frecuencias absolutas dobles de la fila o columna por las que se condicionan dichas frecuencias relativas (ítem 4, apartado *a*).
3. Entender que el objetivo de construir una tabla de contingencia es resumir los datos de dos variables cualitativas o también numéricas con pocos valores (ítem 6, apartado *c*).
4. No comprender que la independencia implica relación de igualdad entre las frecuencias condicionales y las marginales (ítem 7, apartado *c*).
5. No reconocer que para el cálculo de las frecuencias relativas condicionales son necesarias las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por las que se condicionan dichas frecuencias relativas (ítem 4, apartado *c*).
6. Entender que la suma de las frecuencias relativas marginales por filas son iguales a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra (ítem 2, apartado *c*).

El resto de propiedades tuvo una dificultad moderada, entre el 41% y 69% de aciertos. En definitiva, esta síntesis muestra que la enseñanza fue efectiva en la adquisición de un gran número de propiedades de las frecuencias de una tabla de contingencia y de sus relaciones en caso de asociación e independencia, pues se obtuvo un gran número de apartados de los ítems con poca o moderada dificultad (más del 40% de estudiantes los adquirieron).

Al mismo tiempo, la relación de preguntas que resultaron difíciles revela un grado de complejidad de la tabla de contingencia no descrita en investigaciones previas y apoya nuestra hipótesis inicial de que el fallo en la realización de los juicios de asociación descrito en las investigaciones previas (por ejemplo, Estepa & Batanero, 1995, Cañadas *et al.*, 2011 y Cañadas, 2012) pudiera ser debido a la no adquisición de estas propiedades, como se muestra en algunos participantes en nuestro estudio.

5. Conclusión

Nuestros resultados indican que, a pesar de una enseñanza planificada con cuidado, una proporción importante de los estudiantes de psicología de la muestra tuvieron dificultad en entender ciertos aspectos básicos de las tablas de contingencia necesarios para realizar juicios de asociación, que posiblemente tengan que abordar en su futura vida profesional. Estas dificultades podrían extenderse a otras carreras donde se manejan estas tablas por necesidad en su campo.

Nuestros resultados indican también los puntos sobre los cuales se debería incidir con mayor profundidad en futuras experiencias de aulas y líneas de investigación didáctica o mejorar el diseño de la enseñanza. Consideramos, por lo tanto, necesario profundizar el estudio de este tema en futuras investigaciones.

El interés de este tema es también claro; las tablas de contingencia aparecen con frecuencia para representar datos en Internet o los medios de comunicación, por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de comprender e interpretar este objeto matemático. Todas estas razones indican la necesidad de continuar la investigación didáctica al respecto para comprender mejor las variables que guían los juicios de asociación de los estudiantes y las acciones didácticas que debemos tomar para mejorar dichos juicios.

Agradecimientos al proyecto EDU2010-14947, la beca FPI BES-2011-044684 (MCINN-FEDER) y el grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

- AMÓN, Jesús (1993). *Estadística para psicólogos 2*. Madrid: Pirámide.
- ARTEAGA, Pedro, BATANERO BERNABEU, María del Carmen, CAÑADAS, Gustavo R. y CONTRERAS GARCÍA, José Miguel (2011). «Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales». En: *Números*, Vol. 76, pp. 55-67. La Laguna: Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas.
- BATANERO BERNABEU, María del Carmen y DÍAZ BATANERO, Carmen (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

BATANERO BERNABEU, María del Carmen, ESTEPA, Antonio y GODINO, Juan D. (1997). «Evolution of stu-

dents' understanding of statistical association in a computer based teaching environment». En: GARFIELD, Joan B. y BURRILL, Gail (Eds.). *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, pp. 191-206. Minnesota: International Statistical Institute.

BERTIN, Jacques (1967). *Sémiologie graphique*. París: Gauthier-Villars.

CAÑADAS, Gustavo R. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en estudiantes de psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

CAÑADAS, Gustavo R., BATANERO BERNABEU, María del Carmen, CONTRERAS GARCÍA, José Miguel y ARTEAGA, Pedro (2011). «Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología». En: *Educación Matemática*, Vol. 23, N.º 2, pp. 5-32. México: Grupo Santillana México.

CROCKER, Jennifer (1981). «Judgment of covariation by social perceivers». En: *Psychological Bulletin*, Vol. 90, N.º 2, pp. 272-278. Washington: American Psychological Association (APA).

DÍAZ BATANERO, Carmen y FUENTE, Inmaculada de la (2005). «Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada». En: *Biaix*, N.º 24, pp. 85-91. Barcelona: Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya.

DÍAZ NOVÁS, José y GALLEGU MACHADO, Bárbara (2006). «Algunas medidas de utilidad en el diagnóstico». En: *Revista Cubana de Medicina General Integrada*, Vol. 22, N.º 1. La Habana: Editorial Ciencias Médicas.

FALK, Ruma (1986). «Conditional probabilities: insights and difficulties». En: DAVIDSON, Roger y SWIFT, Jim (Eds.). *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, pp. 292-297. Victoria, Canada: International Statistical Institute.

INHOLDER, Bärbel y PIAGET, Jean (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France.

ESTEPA CASTRO, Antonio (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

ESTEPA CASTRO, Antonio y BATANERO BERNABEU, María del Carmen (1995). «Concepciones iniciales sobre la asociación estadística». En: *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 13, N.º 2, pp. 155-170. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Institut de Ciències de l'Educació (ICE).

GODINO, Juan D. (1996). «Mathematical concepts, their meanings, and understanding». En: PUIG, Luis y GU-TIÉRREZ, Ángel (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 2-417-424. Valencia: Universidad de Valencia, Departamento de Didáctica de la Matemática.

GODINO, Juan D. (2002). «Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática». En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22, N.ºs 2-3, pp. 237-284. París: La Pensée Sauvage.

JENKINS, Herbert M. y WARD, William C. (1965). «Judgment of the contingency between responses and outcomes». En: *Psychological Monographs*, Vol. 79, N.º 1, pp. 1-17. Washington: American Psychological Association (APA).

MARTÍNEZ ARIAS, Rosario (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis.

NORTES CHECA, A. (1993). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.

RITTLE-JOHNSON, Bethany, SIEGLER, Robert S. y ALIBALI, Martha W. (2001). «Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process». En: *Journal of Educational Psychology*, Vol. 93, N.º 2, pp. 343-362. Washington: American Psychological Association (APA).

SFARD, Anna (1991). «On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin». En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, N.º 1, pp. 1-36. New York: Springer.

SHAKLEE, Harriet y MINS, Michael (1982). «Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands». En: *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition*, Vol. 8, N.º 3, pp. 208-224. Washington: American Psychological Association (APA).

SMEDLUND, Jan (1963). «The concept of correlation in adults». En: *Scandinavian Journal of Psychology*, Vol. 4, N.º 1, pp. 165-174. Malden, Massachusetts: John Wiley & Sons.