Descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración para los niveles de Van Hiele cuando se estudian las razones trigonométricas

Danny Luz Algarín Torres[1]
Jorge Enrique Fiallo Leal[2]
Universidad Industrial de Santander

Resumen

En el presente artículo se muestran algunos resultados parciales de una investigación llevada a cabo con estudiantes de décimo grado de una institución educativa pública de Bucaramanga, Santander, que tiene por objetivo caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas. Partimos de la utilización de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un sistema de geometría dinámica (SGD) y del modelo de Van Hiele, que nos ha permitido analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes. En una primera etapa de la investigación elaboramos una caracterización *a priori* de los procesos enmarcados en cada uno de los niveles de Van Hiele y diseñamos la unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. Mostramos los descriptores para la primera actividad junto con algunos ejemplos de las actuaciones de los estudiantes frente a las tareas planteadas.

Palabras claves: descripción, definición, demostración, modelo de Van Hiele, razones trigonométricas.

---

1 Estudiante de maestría en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander. Correo electrónico: dannyalgarin@gmail.com

2 Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor titular de la Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Correo electrónico: jfiallo@uis.edu.co

Descriptors of the processes of description, definition, and demonstration for van Hiele levels when studying trigonometric ratios

Abstract

This article presents some partial results of a research project conducted on 10th grade students from a school in Bucaramanga, Santander, in order to characterize Van Hiele reasoning levels that are specific to the processes of description, definition, and demonstration of trigonometric ratios. We first use a teaching unit of trigonometric ratios in a Dynamic Geometry System (DGS) and the Van Hiele model, which allowed us to analyze the evolution of students' reasoning. During the first stage of our study, we made an a *priori* characterization of the processes on each Van Hiele level, and we designed the teaching unit of trigonometric ratios. We show the descriptors for the first activity along with some examples of the students' actions before the proposed tasks.

Key words: Description, definition, demonstration, Van Hiele model, trigonometric ratios.

Introducción

Diversos estudios han contribuido al análisis de las dificultades en el campo de la trigonometría, pero no han sido tenidas en cuenta, tampoco se han seguido las sugerencias de los planes curriculares nacionales e internacionales. Por ejemplo, realizando una revisión de esta tema en los documentos orientadores del currículo, se observa que en los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia (MEN, 1998) no se específica el estudio de la trigonometría, aunque podría considerarse incluido en los conocimientos básicos correspondientes al pensamiento espacial y los sistemas geométricos y en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. En los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) se referencia las siguientes competencias: «Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas, modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas», pero no se dan orientaciones para el logro de las mismas. De igual manera, en los *Principios y estándares para la educación matemática* (NCTM, 2003), para las etapas 9-12 solamente se menciona que «todos los estudiantes deberían usar las relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares» y se da un ejemplo en el estándar de geometría que requiere del conocimiento de las razones trigonométricas para resolverlo, pero no se dice cómo enseñar la trigonometría, es decir, no se profundiza en el tema ni se dan propuestas concretas para abordar el problema. Esta situación, unida a la necesidad de promover el desarrollo de procesos de razonamiento matemático y de abordar los temas relacionados con la trigonometría, nos lleva a plantear este trabajo, que puede ofrecer a los docentes de bachillerato y de universidad herramientas que les permitan a sus estudiantes la comprensión de conceptos trigonométricos y el desarrollo de procesos matemáticos como la descripción, definición y demostración, por medio de los cuales puedan avanzar en sus niveles de razonamiento matemático.

Para contribuir al aprendizaje de la trigonometría y al desarrollo de procesos matemáticos de los estudiantes, planteamos una unidad de enseñanza con un enfoque geométrico apoyado en el modelo de Van Hiele y nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los descriptores que caracterizan los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes cuando se estudian las razones trigonométricas?

Para dar la respuesta a la pregunta nos trazamos como objetivo general caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas. Alcanzar este objetivo nos lleva a establecer un marco conceptual basado en el estudio de los procesos matemáticos, el modelo de Van Hiele y el componente matemático de las razones trigonométricas, de modo que primero establezcamos qué se entiende por cada proceso para luego integrarlos en cada uno de los niveles de Van Hiele. De esta forma, la importancia del trabajo radica en como lo expresa de la Torre (2003): al conocer los descriptores de los niveles, el docente puede mejorar sus prácticas y asimismo puede ayudar a que todos los estudiantes aprendan lo que tienen que aprender, pero con un alto nivel de calidad, pues contar con unos descriptores claros, precisos, permite saber cómo deben ayudarles a avanzar en su nivel de razonamiento.

Una vez elaborada la caracterización inicial, basada en investigaciones previas (Fiallo, 2010), se registra cómo se organizan las observaciones que se hacen al aplicar las actividades planeadas, las cuales cuentan con archivos dinámicos que les permiten visualizar, explorar y analizar las relaciones y propiedades trigonométricas. Dichas observaciones son relativas a las actuaciones de los estudiantes cuando interactúan con el *software*, con sus compañeros de clase y con el docente. Así, el trabajo que describimos puede ayudarnos a construir los descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de Van Hiele relativos al aprendizaje de las razones trigonométricas, a partir de la resolución de las actividades diseñadas en la unidad de enseñanza planteada en un SGD.

Marco conceptual

El propósito de este apartado es establecer las bases teóricas que sustentan la investigación, las cuales se fundan en los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración, que se desarrollarán a partir de las actividades planteadas, y en el modelo de Van Hiele, como organizador de la enseñanza, fundamental en la elaboración de los descriptores y los contenidos matemáticos de las razones trigonométricas que constituyen nuestro objeto de estudio.

Procesos matemáticos

En la actividad matemática desarrollada en el aula de clase intervienen procesos que se articulan en la medida en que los estudiantes interactúan con las diversas situaciones planteadas. Los procesos se entienden como unas actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y el uso de los conocimientos. En tanto estudiante desarrolla las habilidades necesarias para desarrollar procesos, avanza en la consecución de sus conocimientos y competencias matemáticas. A continuación hacemos una breve descripción de los tres procesos que nos proponemos estudiar en esta investigación.

Proceso de descripción

«La palabra describir en todos los niveles de razonamiento de Van Hiele puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos» (Guillén, 2004: 118). En el primer nivel de razonamiento, un estudiante incluye propiedades visuales o funcionales al describir; no quiere decir que no pueda señalar propiedades matemáticas, sino que cuando las usa son a menudo incorrectas, poco precisas o inadecuadas. En el segundo nivel, empieza a reconocer la presencia de las propiedades matemáticas de los objetos. En su trabajo, Guillén considera que el segundo nivel es propio de la descripción en el sentido matemático.

El proceso de reconocimiento y descripción se manifiesta con acciones como la observación de ejemplos, la identificación de propiedades y la verbalización, que dan como resultado la creación de imágenes conceptuales. De hecho, la utilización de un entorno de geometría dinámica facilita la creación de imágenes conceptuales mediante la invención de situaciones en que intervienen ejemplos y contraejemplos (Gutiérrez, 2007b: 11).

Proceso de definición

La definición, según Flores (s.f.), «es una afirmación que tiene como propósito dar a conocer y fijar con claridad la extensión y la comprensión de un objeto. La definición se concibe generalmente como un enunciado de las características y propiedades inherentes de un objeto» (s.f.: 3). Gutiérrez (2007a) plantea que los estudiantes *usan o construyen definiciones* según el nivel de razonamiento de Van Hiele en que se encuentren. Las acciones para formular una definición son: observar ejemplos, identificar propiedades, generalizar propiedades, verbalizar una definición; como resultado se obtiene una creación de definiciones conceptuales (Gutiérrez, 2007b: 15). La *construcción* es propia del nivel de deducción informal (nivel 3).

Las acciones para usar una definición son: comprenderla, identificar las propiedades y usar las mismas propiedades para tomar decisiones. Así, se obtiene el resultado de la resolución de problemas (Gutiérrez, 2007b: 17).

De los párrafos anteriores se deduce que en el modelo de Van Hiele las definiciones son el resultado del análisis de ejemplos y del análisis de propiedades, entre otras acciones; además, no se puede dar una definición si no se ha descrito las figuras ni se ha familiarizado con sus elementos. Por lo que se debe perseguir los siguientes tipos de definición: nivel 1: definiciones visuales; nivel 2: definiciones no económicas; nivel 3: definiciones correctas y económicas (Villiers, 1996: 15); nivel 4: definiciones equivalentes (Gutiérrez, 2007a: 7).

Proceso de demostración

El proceso de demostración ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, que han llevado a la existencia de diversos puntos de vista sobre el concepto de demostración. En nuestro trabajo tomamos la caracterización de Fiallo, donde se considera la demostración como «el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática» (Fiallo, 2010: 48). De acuerdo con esta estructura, se identifican los siguientes tipos de demostración:

a. *Demostraciones deductivas*. Caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, las operaciones mentales y las deducciones lógicas y apuntan a validar la conjetura de una manera general. Se reconocen como demostraciones deductivas el *experimento mental* y la *deducción formal*; en las demostraciones del tipo experimento mental se usa un ejemplo para organizar la demostración, mientras que las demostraciones deductivas formales implican operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

b. *Demostraciones empíricas o inductivas*. Caracterizadas por el uso de ejemplos como el principal o único elemento de convicción. Los tipos de demostraciones inductivas son: el *empirismo ingenuo inductivo*, en que se usan ejemplos escogidos sin ningún criterio, basados en argumentos perceptivos, elementos o relaciones detectadas en el ejemplo; el *experimento crucial*, en que se escoge cuidadosamente un ejemplo porque se presume que en cualquier otro caso se obtendrá el mismo resultado, y el *ejemplo genérico*, que corresponde al caso en que se usa un ejemplo representante de una clase y se incluyen razonamientos abstractos en la demostración.

Modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele consta de dos componentes: un componente descriptiva y un componente instructiva.

La descriptiva está formada por los niveles de razonamiento que detallan la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema. Estos niveles de razonamiento van desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal.

La instructiva está constituida por las fases de aprendizaje. Dichas fases orientan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

El modelo planteado inicialmente considera cinco niveles de razonamiento matemático: reconocimiento, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor. En nuestra investigación tendremos en cuenta solamente los cuatro primeros, ya que son los más pertinentes a la escuela secundaria y a los niveles introductorios en la universidad. Es característico de la teoría el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje propio de cada uno de los niveles. En el modelo se considera que pasar de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad, y solo alcanzado un nivel, se puede pasar al siguiente. Además, dos personas que razonan en niveles diferentes no se pueden entender.

A continuación se presentan las características que tendremos en cuenta para cada proceso en los diferentes niveles:

Nivel 1: *Reconocimiento*. En este nivel se da la percepción de los objetos matemáticos en su totalidad y como unidades. Los estudiantes no reconocen explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

- Proceso de descripción: los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo (Burger & Shaughnessy, 1986: 31).
- Proceso de definición: los estudiantes describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.
- Proceso de demostración: no hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007a: 16).

Nivel 2: *Análisis*. Se perciben los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican relaciones. Los estudiantes deducen propiedades a partir de la experimentación.

- Proceso de descripción: los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades; se establecen las propiedades necesarias del concepto (Burger & Shaughnessy, 1986: 31).
- Proceso de definición: los estudiantes describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas (Gutiérrez, 2007a: 7-8).
- Proceso de demostración: los estudiantes realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010: 90-92).

Nivel 3: *Deducción informal*. En este nivel se observan las propiedades y relaciones ya conocidas. Se detecta la necesidad de justificar.

- Proceso de descripción: se considera que en este nivel no se da la descripción, dado que los estudiantes que están en este nivel son capaces de reconocer las propiedades necesarias y suficientes para establecer una definición, es decir, ya están en capacidad de comprender, usar y construir sus propias definiciones.
- Proceso de definición: los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto (Burger & Shaughnessy, 1986: 1). Así, ellos usan cualquier tipo de definición (Gutiérrez, 2007a: 7).
- Proceso de demostración: los estudiantes realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual y experimento mental transformativo (Fiallo, 2010: 92-94).

Nivel 4: *Deducción formal*. Aceptación de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o de diferentes formas.

- Proceso de descripción: se considera que en este nivel no se da la descripción, dado que un estudiante que está en este nivel ya está en capacidad de definir.
- Proceso de definición: el estudiante razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas (Burger & Shaughnessy, 1986: 31). Se admite la existencia de definiciones equivalentes y se puede demostrar la equivalencia de definiciones (Gutiérrez, 2007a: 7).
- Proceso de demostración: los estudiantes realizan demostraciones de tipo experimento mental estructurado, deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurada (Fiallo, 2010: 87-90).

Con relación a las fases de aprendizaje, según las cuales se han organizado las actividades de la unidad de enseñanza, tenemos:

Fase 1: *Información*. En esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los objetos de estudio de este nivel.

Fase 2: *Orientación dirigida*. Los estudiantes exploran el tema de estudio con los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

Fase 3: *Explicitación*. Apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de vista acerca de las estructuras que han observado.

Fase 4: *Orientación libre*. Los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas.

Fase 5: *Integración*. Los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones (Crowley, 1987: 4-5).

Por otro lado, tal como lo expresa de la Torre (2003), la fase de explicitación no debe confundirse con las explicaciones del docente. Lo primordial en esta fase son las observaciones y análisis que los estudiantes intercambian con los compañeros y el docente, más que las lecciones que reciben. La ayuda del docente es indirecta; es resultado de la situación didáctica creada por él.

Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica

Se plantea una unidad de enseñanza conformada por cuatro actividades: 1) razones trigonométricas para triángulos rectángulos; 2) razones trigonométricas para ángulos en posición normal; 3) representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas; 4) identidades pitagóricas (Fiallo, 2010). Con estas actividades se busca principalmente la comprensión de conceptos trigonométricos y de relaciones matemáticas, acorde con las propuestas curriculares y textos de matemáticas, y además la iniciación de los estudiantes en los procesos de descripción, definición y demostración.

La unidad de enseñanza se caracteriza por la enseñanza basada en el descubrimiento guiado con el uso de *software* de geometría dinámica. A partir de las interacciones con el *software*, los estudiantes pueden hacer descripciones de lo que observan en la pantalla y realizar generalizaciones que los lleven a usar y comprender definiciones con las cuales paulatinamente elaboren demostraciones cada vez más formales. Cada actividad cuenta con un archivo dinámico construido en GeoGebra, para que el estudiante lo use como herramienta de visualización, exploración, conjeturación y análisis y comprobación de relaciones y propiedades trigonométricas.

En la fase de integración de cada una de las cuatro actividades de la unidad de enseñanza, se propone completar un mapa conceptual, de modo que los estudiantes puedan organizar los conceptos, sus relaciones y propiedades. Según Jaramillo & Esteban (2006), los mapas conceptuales les permiten ampliar su estructura de pensamiento, agregando otros conceptos para la creación de nuevas estructuras más amplias, abundantes y complejas en que el lenguaje desempeña un papel principal. Por consiguiente, la utilización de esta herramienta se convierte en un recurso valioso para el intercambio de puntos de vista, el establecimiento de vínculos y conexiones, detectar y corregir concepciones erróneas, etc.

Aspectos metodológicos

La investigación, de tipo cualitativo, se hizo con 35 estudiantes de décimo grado (entre 14 y 16 años de edad) de la institución educativa Luis Carlos Galán, de Bucaramanga, Santander. La implementación de la unidad se realizó durante un semestre en el horario normal de clases; semanalmente se ejecutaban dos sesiones de dos horas y una sesión de una hora. Todas las clases se trabajaron en el aula de informática, en grupos de dos estudiantes por computador. La recolección de los datos se consiguió con la videograbación a dos parejas de estudiantes y lo escrito en las hojas de trabajo por todos los estudiantes. A partir de las actuaciones de los estudiantes y su interacción con el computador, con los compañeros de clase y con el investigador y lo escrito, se obtuvieron datos cualitativos que fueron analizados para construir la caracterización de los descriptores de los niveles de razonamiento. La investigadora fue a la vez la docente del grupo; orientó las actividades a todo el curso, con la colaboración de un auxiliar (estudiante de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander), quien conocía las actividades y el objetivo de la investigación.

Aunque se diseñaron las cuatro actividades mencionadas en un párrafo anterior, solamente se pudieron aplicar las dos primeras durante el primer semestre de 2013.

Avances

Basados en los descriptores generales de los niveles de Van Hiele, en los resultados encontrados por Fiallo (2010) y teniendo en cuenta los contenidos matemáticos de la unidad de enseñanza, la investigadora organiza una lista inicial de los descriptores específicos para las razones trigonométricas, que está siendo perfeccionada y completada como resultado de la investigación. Mostramos a continuación los descriptores para la primera actividad (razones trigonométricas para triángulos rectángulos), junto con algunos ejemplos de las actuaciones de los estudiantes frente a las tareas planteadas.

Descripción

Nivel 1

- Describen los elementos y las propiedades de los triángulos rectángulos e identifican los ángulos internos y externos del triángulo.
- Identifican las seis razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describen como “cocientes” entre los lados del triángulo rectángulo.

- Describen en forma estática lo que observan en la pantalla.

Por ejemplo, a los estudiantes se les propone la siguiente actividad:

2.1 Abre el archivo ACT 1 (ver figura 1), elabora una descripción de lo que observas en este archivo y halla las razones entre los lados del triángulo ABC. Nombra cada razón con su respectivo cociente entre los lados del triángulo, por ejemplo BC/AB.

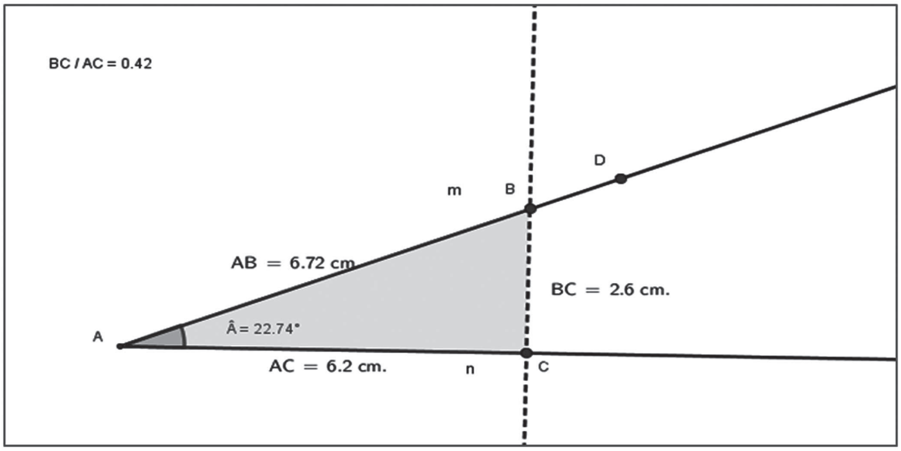

Figura 1. Imagen ACT 1.

Los estudiantes escriben valores fijos de las razones o de los lados de los triángulos, a pesar de observar el cambio de estos valores en el computador cuando arrastra los puntos D y C en la construcción dinámica. A continuación se muestra la transcripción de la respuesta de los estudiantes:

Lo que pudimos observar que es un triángulo rectángulo, al mover el punto D dos de sus ángulos cambian, y si movemos el punto C las medidas de sus tres lados cambian,	
$\frac{AB}{CB}$ =2 .24 $\mathbf{\frac{BC}{AB} = 0.45}$ $\frac{BC}{AC}$ =0 .5 $\frac{AC}{AB}$ =0 .9 $\frac{CA}{CB}$ =2 .01 $\frac{BA}{AC}$ =1 .12	cuando movemos el punto C la medida de sus ángulos siempre seguirán las mismas [sic], cuando movemos el punto D dos de sus lados cambian y el otro lado sigue teniendo la misma longitud, además al mover el punto D el ángulo cambia entonces el ángulo B cambiaría para que la suma de sus tres ángulos diera 180°.

Los estudiantes arrastran los puntos C y D e identifican la variación en las medidas del triángulo; sin embargo, cuando elaboran la descripción del archivo, solo se fijan en los datos que observan en ese momento en la pantalla, es decir, la descripción se basa solo en características visuales. No reconocen explícitamente las propiedades matemáticas de las razones trigonométricas.

Nivel 2

- Describen las razones trigonométricas como la relación entre pares de lados del triángulo rectángulo.
- Reconocen numéricamente en el SGD que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo y no depende de las longitudes de sus lados.
- Reconocen numéricamente que seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.
- Reconocen que los ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios.
- Reconocen con ayuda del SGD que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre 0 y 1; tangente y cotangente, entre 0 e ∞; secante y cosecante, entre 1 e ∞.

Por ejemplo, un estudiante explica de la siguiente manera el cambio de la razón seno:

> La razón CB/AB comienza desde 0 y no pasa de 1, o sea, estando a los está en 1; mire, aquí está en 1 [señala el ángulo de] y aquí en 0 [arrastra el punto D hasta formar un ángulo de], o sea, el intermedio que hay entre el 0 y el 1 son decimales; si ve que aquí, cuando vamos subiendo el ángulo, comienzan los decimales y ya estando en un ángulo cercano a comienza a estar en 1.

En este ejemplo se observa que el estudiante deduce el cambio de la razón seno por medio de la experimentación y usa características observadas en determinados valores de ángulos, las cuales compara para sacar sus propias conclusiones. Su vocabulario es impreciso.

Nivel 3

- En los niveles 3 y 4 los estudiantes ya deben definir, en lugar de describir.

Uso de definiciones

Nivel 1

- Los estudiantes no están en capacidad de usar definiciones debido a la falta de razonamiento matemático.

Nivel 2

- Comprenden las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo y las relacionan con los segmentos que representan los lados del triángulo rectángulo.

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} \qquad \csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

Por ejemplo, un estudiante utiliza el archivo ACT 1 (ver figura 1) para relacionar las definiciones dadas para el triángulo rectángulo de la siguiente manera: «El seno de B sería el lado opuesto, que es AC, sobre la hipotenusa, que es AB; el coseno sería el cateto adyacente, que es el lado BC, sobre la hipotenusa, que es el lado AB; la tangente sería el cateto opuesto, que es AC, sobre el cateto adyacente, que es BC […]». El estudiante recita las definiciones para identificar las razones trigonométricas, en lugar de aplicarlas al archivo dinámico, es decir, necesita comparar la definición con los elementos del triángulo.

Nivel 3

- Relacionan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo como cocientes y como relación entre magnitudes reales positivas.

Nivel 4

- Usan las diferentes imágenes mentales (razón como cociente y como relación entre los lados del triángulo rectángulo) de las definiciones de las razones trigonométricas.

Formulación de definiciones

Nivel 1

- Los estudiantes no están en capacidad de formular definiciones, dado que este proceso es característico del nivel 3.

Nivel 2

- Los estudiantes no están en capacidad de formular definiciones.

Nivel 3

Reconocen que es necesario y suficiente que el triángulo dado sea rectángulo para definir las razones trigonométricas.

Nivel 4

- Formulan definiciones equivalentes entre razones trigonométricas. Por ejemplo:

$$\tan(A) = \frac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)};\ \operatorname{sen}(A) = \cos(90 - A);\ \cos(A) = \operatorname{sen}(90 - A);\ \tan(A) = \cot(90 - A).$$

Proceso de demostración

Nivel 1

En el primer nivel de razonamiento de Van Hiele no hay razonamiento matemático, por lo que los estudiantes no están en capacidad de realizar demostraciones.

Nivel 2

- Demuestran empíricamente (empírica ingenua, experimento crucial, ejemplo genérico analítico) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre 0 y 1; tangente y cotangente, entre 0 e ∞; secante y cosecante, entre 1 e ∞.
- Demuestran empíricamente (empírica ingenua, experimento crucial, ejemplo genérico analítico) que seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.

Como ejemplos de los descriptores de este nivel, se muestran las siguientes situaciones: Para responder la pregunta: ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90°? Un estudiante plantea la siguiente conjetura:

$\frac{AB}{CB}$ Podemos ver que la razón $\frac{AB}{CB}$ cuando el ángulo está en 0, su medida es enorme, pero cuando está en el ángulo 90° la medida de su razón es 1, eso quiere decir que disminuye.

Posteriormente realiza la siguiente demostración:

> $\frac{AB}{CB}$ Pudimos ver que cuando movemos el punto D hacia arriba la longitud de los lados AB y CB son muy similares en su valor numérico, por eso cuando hacemos la división estando el ángulo en 90° nos da 1, puesto que la diferencia de valor numérico de los lados es muy mínima, cuando el ángulo está en 0 el resultado de la división $\frac{AB}{CB}$ es mayor puesto que al estar en 0 el ángulo, la medida del lado BC es 0 y al dividir el valor numérico del lado AB sobre el BC nos va a dar el resultado mayor.

La demostración realizada por el estudiante es del tipo experimento crucial basado en ejemplo. En este tipo de demostración el estudiante escoge un ejemplo seleccionado cuidadosamente; en este caso, solo considera los casos extremos (y), sin tener en cuenta lo que ocurre entre los valores correspondiente de estos dos valores. No es empirismo ingenuo, debido a que ha seleccionado los ejemplos que él considera "cruciales" para la demostración y hace uso de operaciones matemáticas.

a. Al analizar las relaciones que existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B (archivo ACT 1), un estudiante encontró:

   Seno de A igual a coseno de B y coseno de A igual al seno de B; profe aquí cómo podría expresarlo, es que aquí la tangente del ángulo A es contraria… es al revés de la tangente del ángulo B, o sea, escribo tangente del ángulo A es al revés de la tangente del ángulo B…

En el anterior ejemplo, el estudiante realiza una demostración de tipo empirismo ingenuo, ya que su justificación se basa en las relaciones observadas en la pantalla en un ejemplo que ha escogido sin ningún criterio.

Nivel 3

- Realizan demostraciones empíricas de tipo ejemplo genérico intelectual.
- Realizan demostraciones deductivas de tipo experimento mental.
- Reconocen y demuestran con ayuda del SGD que: sen (A) = cos (90 – A); cos (A) = sen (90 – A); tan (A) = cot (90 – A).

Nivel 4

- Realiza demostraciones deductivas formales.
- Demuestran, sin ayuda del SGD, que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre 0 y 1; tangente y cotangente, entre 0 e ∞; secante y cosecante, entre 1 e ∞.
- Demuestran, sin la ayuda del SGD, que seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.
- Demuestran, sin ayuda del SGD, que: sen (A) = cos (90 – A); cos (A) = sen (90 – A); tan (A) = cot (90 – A); tan (A) = $\frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$

Primeras conclusiones

Las diferentes formas de razonar de los estudiantes nos muestran que, dependiendo de las actividades propuestas, los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración están presentes en sus actuaciones y en los trabajos desarrollados.

El diseño de las actividades permitió promover el avance en los niveles de razonamiento; se han confirmado las características de la lista inicial de descriptores. Además, se han planteado nuevos descriptores que no se habían previsto.

El uso de la tecnología favoreció el análisis, la generalización, la deducción y en especial la relación entre conceptos y la generación de ideas, ya que los archivos se convirtieron en una herramienta de aprendizaje, lo que facilitó la reflexión y comunicación de ideas entre los estudiantes y entre ellos y el profesor, quien los enfocó a la construcción de los conocimientos matemáticos.

Los estudiantes mostraron debilidades en conocimientos básicos de semejanza de ángulos y triángulos, lo que influyó en el desarrollo de las actividades y en el avance en el proceso de demostración, razón por la que solo se cumplieron dos de las cuatro actividades planteadas.

Referencias bibliográficas

Burger, William F. y Shaughnessy, J. Michael (1986). «Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry». En: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 17, N.º 1, pp 31-48. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Crowley, Mary L. (1987). «The Van Hiele model of the development of geometric thought». En: Montgomery Lindquist, Mary (Ed.ª). *Learning and Teaching Geometry*, *K-12*, pp. 1-16. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Fiallo Leal, Jorge Enrique (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

Flores Samaniego, Ángel Homero (s.f.). «La importancia de las definiciones: el caso de la geometría». Texto disponible en Internet.

Guillén Soler, Gregoria (2004). «El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática». En: *Educación Matemática*, Vol. 16, N.º 3, pp. 103-125. México, D. F.: Grupo Santillana México.

Gutiérrez, Ángel (2007a). «Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría». En: XVI Congreso Nacional de Matemáticas, julio 16-19. Medellín, Colombia.

Gutiérrez, Ángel (2007b). «El papel de la geometría dinámica (GD) en el proceso de ense*ñanza/aprendizaje»*. Diapositivas disponibles en Internet. Valencia: Universidad de Valencia, Departamento de Matemática.

Hiele, Pierre Marie van (1957). *El problema de la comprensión*. *En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis doctoral. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Jaramillo López, Carlos Mario y Esteban Duarte, Pedro Vicente (2006). «Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele». En: *Educación y Pedagogía*, Vol. 18, N.º 45, pp. 109-118. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. *Áreas obligatorias y fundamentales*. Bogotá, Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje*, *matemáticas*, *ciencias y ciudadanía*. Bogotá, Colombia: MEN.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Torre Gómez, Andrés de la (2003). «El método socrático y el modelo de Van Hiele». En: *Lecturas matemáticas*, Vol. 24, pp. 99-121. Colombia: Sociedad Colombiana de Matemáticas.

Villiers, Michael de (1996). «Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría». Fecha de consulta: septiembre de 2012. Cf. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futured.pdf

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Artículo recibido 12-08-13. Aprobado: 13-11-2013