Contribuciones del *software* MiGen para la introducción de conceptos algebraicos

Fernando de Mello Trevisani[1]
Vinculación Institucional
Marcus Vinicius Maltempi[2]
UNESP, Universidad Estadual Paulista

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar algunas contribuciones del *software* MiGen al proceso de introducción del álgebra con alumnos de educación básica de una escuela pública brasilera. Presentamos el *software* MiGen destacando las principales características que ayudan a potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. Luego presentamos una actividad realizada con ocho alumnos de séptimo grado, que participaron en la producción de información para nuestra investigación. Concluimos que el *software* MiGen inhibió el proceso de conteos debido a su forma dinámica de presentar los patrones figurales en el computador, estimulando el desarrollo de procesos de generalización, y contribuyó a desarrollar la idea de que una expresión algebraica ofrece respuestas generales a la actividad propuesta.

Palabras claves: generalización matemática, patrones matemáticos.

1 Magíster en Educación Matemática, con el trabajo de grado «Estrategias de generalización de patrones matemáticos», presentado al Instituto de Geociencias y Ciencias Exactas en el Campus de Río Claro, São Paulo, Universidad Estatal Paulista (UNESP), Brasil. Supervisor: Dr. Marcus Vinicius Maltempi. Profesor de matemáticas en educación básica y superior. Coordinador y asesor pedagógico en el uso de tecnologías en la educación. Correo electrónico: fernando-mt@hotmail.com

2 Profesor del Departamento de Estadística, Matemáticas Aplicadas y Computación (DEMAC), y del programa de posgrado en Educación Matemática del Instituto de Geociencias y Ciencias Exactas, Universidad Estatal Paulista (UNESP), Brasil. Miembro del grupo Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educacão Matemática (GPIMEM). Correo electrónico: maltempi@rc.unesp.br

Contributions of the MiGen software in introducing algebraic concepts

Abstract

The goal of this article is to show some contributions of the MiGen *software* to the process of introduction to algebra to basic education students from a Brazilian public school. The MiGen features that enhance the development of algebraic thinking are first highlighted. Then we describe an activity carried out with eight seventh graders who provided us with information for our research. We conclude that the MiGen *software* inhibited the counting process due to its dynamic way of presenting figural patterns on the computer, by stimulating the development of generalization processes, and it also helped to develop the idea of algebraic expressions as providers of general answers to the proposed activities.

Key words: mathematical generalization, mathematical patterns.

Introducción

Uno de los aspectos más importantes del álgebra quizá sea el concepto de *variable*. Del mismo modo que las letras son interpretadas como representaciones de números, existe una gran tendencia en considerarlas como valores únicos y no valores variables.

El objetivo de este artículo es mostrar algunas contribuciones del *software* MiGen con el fin de introducir el álgebra a alumnos de séptimo grado de educación formal. Los datos aquí presentados forman parte de una investigación, cuya pregunta fue: ¿cuáles son las estrategias utilizadas por los alumnos de séptimo grado de educación básica para generalizar patrones figurales usando el *software* MiGen?

La metodología de investigación adoptada para el desarrollo de la investigación fue cualitativa. El investigador buscaba «describir, observar y relatar lo observado en una actitud natural» (Bicudo, 2004: 109), con la idea de comprender a fondo el objeto de estudio considerando que no puede ser aislado de su contexto.

Para producir la información, se trabajó con dos grupos, cada uno de cuatro alumnos de grado séptimo de una escuela pública estatal de la ciudad de Río Claro, ubicada en la provincia de São Paulo, Brasil, con dos encuentros semanales de ocho horas. Los encuentros se filmaron utilizando un *software* que captaba la imagen de los alumnos, el audio del ambiente y los movimientos de la pantalla del computador. Los videos se analizaron contrastándolos con anotaciones hechas por el investigador es su diario de campo, con las anotaciones de los alumnos en las hojas de actividades y con la literatura pertinente. La elección de grupo fue basada según lo planteado en el currículo del Estado de São Paulo: Matemática y sus tecnologías (2010), que considera los contenidos introductorios al álgebra en el cuarto bimestre de la serie, dentro de los cuales el concepto de ecuación de primer grado es uno de los primeros contenidos que involucran representaciones con letras.

El *software* MiGen

Para entender mejor el papel del *software*, se aplicaron ocho actividades que debían ser resueltas por parejas de estudiantes, las cuales, basadas en el propio tutorial del *software*, se componían de preguntas referentes a un patrón específico que se movía en la pantalla del computador. Para responderlas, los alumnos primero tenían que utilizar el *software* para generalizar el patrón presentado en él. El objetivo era que encontraran —usando MiGen, un ambiente computacional diseñado para contribuir al aprendizaje de procesos de generalización de patrones figurales— una expresión del número total de cuadrados que formaba un patrón específico, para comprender lo que significa generalizar en matemáticas: ¿para qué sirve y cómo puede ser expresada? (Geraniou *et al*., 2009; Geraniou *et al*., 2011; Noss *et al*., 2012). Para nosotros, la generalización matemática se considera como un proceso cuyo objetivo es identificar las propiedades de los elementos de un conjunto específico, las cuales satisfacen determinadas condiciones en todos los elementos. Esa identificación puede ser realizada de cualquier modo, siempre y cuando las propiedades identificadas sean satisfactorias.

Es importante resaltar que concordamos con la idea de que la principal característica del *software* es ser un ambiente pedagógico formado por componentes que exploran una propiedad singular de las tecnologías digitales: el potencial dinámico (Noss *et al*., 2012). Así, el alumno, a partir del patrón figural en movimiento presentado dinámicamente en la pantalla del computador, es inducido a obtener una expresión general que representa el número de cuadrados que el patrón tendrá en cualquier nivel. De esa forma, es inducido a analizar las alteraciones y propiedades invariantes del patrón en el *software*, que lleva a determinar esa expresión (Noss *et al*., 2009).

El *software* MiGen permite que los alumnos visualicen, mediante el patrón mostrado en el Mundo General (figura 1), la generalización del patrón que están construyendo, mientras trabajan con casos específicos mostrados en Mi Mundo por medio de la variación del patrón en la pantalla del computador (Noss *et al*., 2012). Así, en tanto los alumnos trabajan con algún problema específico, son capaces de visualizar las consecuencias de sus acciones en el caso general.

La figura 1 muestra la interface del *software* MiGen —versión desarrollada hasta el 16 de octubre de 2011—: consiste en una barra de herramientas (figura 2), las áreas denominadas Mi Mundo (*Meu Mundo*) —rectángulo representado por la letra A de la figura 1— y Mundo General (*Mundo Geral*) —rectángulo representado por la letra H de la figura 1— y el área de atribución de color (la letra E de la figura 1).[3]

En el área denominada Mi Mundo, los alumnos pueden desarrollar los patrones con el soporte de la información obtenida de los patrones presentados en el Mundo General. El Mundo General es el modelo reproducido por el computador, con un número que puede variar destacado en color rosa (letra G), y puede cambiar de modo aleatorio por el computador. Para hacer que un número varíe, el usuario debe desbloquearlo haciendo clic sobre él y seleccionando la opción *desbloquear*. Así, el color del contorno del número cambia de azul a rosa.

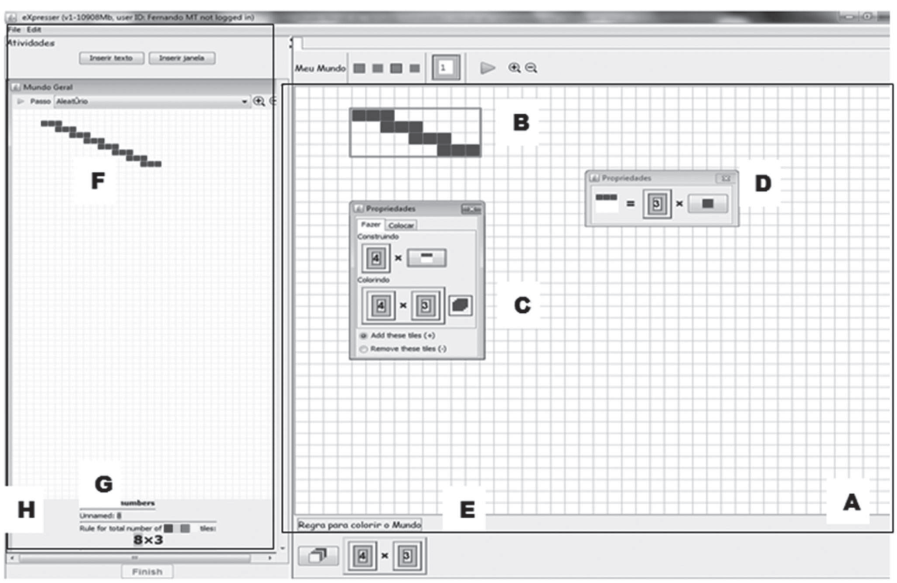

Figura 1. *Software* MiGen.

La barra de herramientas contiene los cuadrados utilizados para formar patrones. Además posee un botón generador de números, otro denominado *play*, que anima los patrones, y una herramienta para hacer *zoom*. Para usar el generador de números basta dar clic dentro de la caja, digitar el número deseado y arrastrarla.

3 Para ayudar en la comprensión de cómo funciona el MiGen, sugerimos ver el video en el sitio web titulado TT2009 Recall1, que muestra el funcionamiento del *software* por medio de la construcción de un patrón.

Figura 2. Barra de herramientas.

Las ventanas de Mi Mundo presentan las propiedades (letras C y D de la figura 1) del patrón mostrado (letra B): cada bloque (grada de la escalera) se forma con tres cuadrados azules (letra D en la figura 1). El patrón de la pantalla de Mi Mundo se forma con cuatro bloques de tres cuadrados cada uno, lo que resulta en la expresión 4 x 3 (letra C en la figura 1).

Una acción necesaria que los alumnos deben realizar es colorear el patrón de Mi Mundo, dejándolo igual al patrón del Mundo General y diferenciando solamente el nivel mostrado de cada patrón. Los cuadros del patrón solamente se colorean después que los alumnos descubran la expresión general que ofrezca el número de cuadrados del patrón para cualquier nivel *n*. Dicha expresión debe ser arrastrada hasta el espacio en el área de atribución de color (letra E). Cuando se hace eso —correctamente construida la expresión—, el contorno se mostrará verde, y el patrón (letra F) en el Mundo General (letra H), coloreado. En el Mundo General también se presenta una expresión (letra G) puesta automáticamente por el propio MiGen a partir de la expresión colocada en el área de atribución de color en Mi Mundo.

Se debe desbloquear un número para que pueda variar. En tal caso, su contorno cambia de color azul a rosa. Como el número de bloques de la figura 1 puede variar, entonces el número 4 (de la expresión 3 x 4) debe ser desbloqueado para que también varíe; así hace el papel de lo que denominamos *variable* en álgebra. El alumno deberá generalizar la fórmula final 3 x *n*, donde *n* es el número de bloques del patrón, representado en la expresión con el número 4, que podrá variar después de ser desbloqueado.

Por lo visto, consideramos que el álgebra puede ser definida como un sistema matemático utilizado para generalizar operaciones matemáticas permitiendo que las letras u otros símbolos sustituyan los números (Vale & Pimentel, 2005: 6).

Kaput (1999) considera que el pensamiento algebraico tiene inicio cuando las generalizaciones se establecen a partir de datos y relaciones matemáticas expresadas en lenguajes cada vez más formales. Así, la generalización sería un proceso en que el objetivo es identificar una propiedad de los elementos de un conjunto específico. O sea, esta propiedad debe ser válida para cualquier elemento del conjunto.

Así, un elemento central del pensamiento algebraico es la idea de generalizar: descubrir y comprobar propiedades que se verifican en toda una clase de objetos matemáticos. Tales propiedades son llamadas patrones. La generalización, a su vez, es un elemento integrante del álgebra y del pensamiento matemático (Borralho *et al*., 2007), y en ese caso podría surgir con el conocimiento de los patrones vía MiGen y de la determinación de las relaciones y propiedades específicas de cada patrón.

Según los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), los alumnos deben pasar por experiencias con patrones, pues estos forman las bases para la comprensión de algunos conceptos matemáticos, como el de función, y proporcionan fundamentos para trabajar con símbolos y expresiones algebraicas.

Es importante resaltar que el simbolismo algebraico no es el único objetivo trabajado con generalizaciones; de igual forma puede contribuir con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de variable, ya que las letras (símbolos) son utilizadas para presentar una expresión que representa, por ejemplo, el total de cuadros que forman cada figura (patrón).

Para Caraça (1984), el concepto de variable es uno de los más difíciles y complejos para los alumnos, pues posibilita múltiples representaciones (conjuntos, elemento de un conjunto, parámetros, incógnitas). En este sentido, se presentan algunas de las conclusiones obtenidas en la investigación de la maestría.

Análisis de la información y resultados

El análisis de los datos se dio con base en cinco estrategias de generalización: 1) tentativa y error, 2) conteos, 3) término de unidad, 4) diferencia y 5) explícita, presentadas por autores como Stacey (1989), Sasman *et al*. (1999), Becker & Rivera (2005), Lannin (2005), Lannin *et al*. (2006) y Barbosa (2010). Para categorizar la información producida, analizamos los videos de los encuentros priorizando los momentos que caracterizaran las estrategias de generalización usadas por los alumnos y contrastando las informaciones obtenidas por ellos con el diario de campo del investigador y las actividades realizadas en papel por ellos mismos.

Luego transcribimos los trechos de videos seleccionados, complementándolos con las respuestas de los alumnos en las hojas de actividades y con las anotaciones del diario de campo. De esa forma, el análisis de las actividades ofreció una posible respuesta a la pregunta orientadora de la investigación.

Una de esas actividades, denominada *La escalera*, tenía por objetivo hacer que los alumnos identificaran y utilizaran las relaciones existentes entre el número de cuadrados que formaba una escalera con el número de gradas de la misma. Los cuatro momentos de esa actividad fueron:

1. Diseñe una escalera de 2 gradas: ¿cuántos cuadrados son necesarios para construirla?
2. ¿Cuántos cuadrados son necesarios para construir una de 8 gradas?
3. ¿Cuántos cuadrados son necesarios para construir una de 32 gradas?
4. Encuentre la regla que relaciona el número de cuadrados de un nivel que tenga con cualquier número de gradas.

En la hoja entregada a los alumnos se dio una representación visual del cuarto término de la secuencia, representando una escalera de 4 gradas y 12 cuadrados en total (figura 1). A continuación presentamos brevemente la solución realizada por una de las parejas participantes de la investigación.

En el inicio de la actividad, la pareja observó atentamente la variación del patrón figural en el *software* MiGen. Con la construcción del patrón en Mi Mundo, los alumnos percibieron que lo que se repetía era un bloque formado por 3 cuadrados dispuestos horizontalmente, al cual llamaron gradas por el hecho de formar una escalera (figura 1). Utilizaron ese bloque correctamente para encontrar la expresión general que ofreciera el número de cuadrados de una escalera de cualquier tamaño, o sea, percibieron que el número de cuadrados de una escalera sería el triple del número de gradas de la misma. Después generalizaron tal expresión, la utilizaron en la resolución de otras preguntas presentadas.

En la pregunta 1, por ejemplo, utilizaron la expresión para dar la respuesta sobre cuántos cuadrados eran necesarios para construir una escalera de 2 gradas. Ambos estudiantes respondieron «6 cuadrados», justificando con la frase «multipliqué 3 por 2». En ese caso, 3 representaba el número de cuadrados de cada grada, y 2, el número de gradas. En la segunda pregunta justificaron de la misma forma multiplicando 8 (el número de gradas) por 3. En la tercera hubo una pequeña diferencia en la forma de resolver. Un alumno primero multiplicó 3 por 30 y después por 2, y sumando los resultados al final, totalizó 96 cuadrados de la escalera de 32 gradas. Ya el otro estudiante hizo el cálculo directamente, multiplicando 32 por 3. Consideramos que el primer alumno descompuso el número de 32 en 30 + 2, por la facilidad de realizar la multiplicación por números que son múltiplos de 10.

En la última pregunta escribieron por extenso el razonamiento utilizado sin usar una formula específica para calcular el número total de cuadrados de una escalera cualquiera. Solamente en la segunda pregunta, la pareja de alumnos dio indicios de expresar su razonamiento utilizando una expresión numérica, explicando lo que significaba cada número de la expresión. La respuesta del primer alumno fue: «Multipliqué el número de gradas por el número de cuadrados, expresión 3 x 32 = 96». Usando cada número, el alumno escribió lo que cada uno representaba: «3 es el número de cuadrados de cada grada; 32 representa el número de gradas, y 96, el número de cuadrados de las 32 gradas».

Que el alumno intentara formalizar su pensamiento a través del uso de las palabras fue una primera señal de que el pasaje de la aritmética hacia el álgebra estaba ocurriendo. Resaltamos que tal pasaje no se dio de forma abrupta, sino con el transcurrir de las actividades. Pensamos que el hecho de ellos escribir sus razonamientos es una situación natural: siendo consecuentes con el nivel escolar en que se encontraban, aún no tenían el hábito de utilizar símbolos para representar algo que varía en matemáticas. Así, consideremos que el uso de palabras era una de las pocas formas, si no la única, de explicitar sus razonamientos.

Conclusiones

Con relación a este proceso de generalización, el *software* posibilitó que los alumnos no tuvieran la necesidad de desarrollar procesos de conteo, es decir, no tuvieran que contar uno por uno los cuadrados necesarios para construir cada figura usando la imagen de la figura mostrada o la entregada en la hoja de papel (Barbosa, 2010). Debido a la forma dinámica de presentar los patrones, la variación de los mismos hizo que los alumnos en algunos momentos no consiguieran realizar el conteo de los cuadrados de determinados niveles del patrón, por lo que fueron obligados a utilizar otras estrategias para responder las preguntas propuestas.

Ese factor implicó que los alumnos utilizaran estrategias explícitas, cuyo objetivo era identificar la regla general que permite estimar un término específico de un determinado patrón. Es posible calcular de forma inmediata el valor de una variable dependiente, al descubrir esa regla general y al conocerse el valor de la variable independiente correspondiente (Barbosa, 2010).

Una vez que los alumnos obtuvieron la expresión general del patrón usando el *software* MiGen, la utilizaron directamente en el momento de responder las preguntas formuladas en la hoja. Por lo tanto, es posible inferir que después de haber percibido las propiedades invariantes de un determinado patrón, lo utilizaron para obtener la expresión general del mismo a partir de él, y así encontraron que es posible calcular cualquier término de ese patrón.

A pesar de que en la actividad los alumnos no utilizaron letras (símbolos) directamente para representar el número de cuadrados de las figuras que se iban repitiendo dinámicamente en el computador —es decir, el patrón—, podemos afirmar que consiguieron generalizar la idea de que una expresión algebraica ofrece el número total de cuadrados de una escalera de cualquier tamaño. Es posible afirmar lo anterior, pues las descripciones elaboradas por los alumnos en sus textos escritos dan cuenta de ello.

Por consiguiente, llegamos a la conclusión que el *software* es una herramienta capaz de auxiliar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en lo referente al entendimiento del concepto de variable de una forma más natural: puede hacer que el alumno sienta la necesidad de formalizar y representar matemáticamente sus razonamientos mediante letras o palabras.

Referencias bibliográficas

Barbosa, Ana Cristina Coelho (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contexto visuais*: *um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tesis de doctorado. Braga: Universidade do Minho.

Becker, Joanne Rossi y Rivera, Ferdinand (2005). «Generalization strategies of beginning high school álgebra students». En: Chick, Helen L. y Vincent, Jill L. (Eds.). *Proceedings of the 29.rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.121-128. Melbourne: PME.

Bicudo, Maria Aparecida Viggiani (2004). «Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica». En: Borba, Marcelo de Carvalho Borba y Araújo, Jussara de Loiola (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*, pp. 101-114. Belo Horizonte: Autêntica.

Borralho, António *et al*. (2007). «Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra». En: Vale, Isabel *et al*. (Eds.). *Números e Álgebra*, pp. 193-211. Lisboa: SEM-SPCE.

Caraça, Bento de Jesus (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Sá da Costa: Lisboa.

Geraniou, Eirini *et al*. (2009). «Towards a constructionist appro-ach to mathematical generalisation». En: *Research in Mathematics Education*, Vol. 11, N.º 1, pp. 75-76. Londres: Institute of Education (IOE), University of London.

Geraniou, Eirini *et al*. (2011). «Student's justification strategies on the equivalence of quase-algebraic expressions». En: International Conference on Psychology of Mathematics Education. Ankara: Turquía.

Kaput, James J. (1999). «Teaching and learning a new algebra». En: Fennema, Elizabeth y Romberg, Thomas A. (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding*, pp. 133-155. Mahwah: Erlbaum.

Lannin, John (2005). «Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities». En: *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 7, N.º 3, pp. 231-258. Philadelphia: Taylor & Francis.

Lannin, John, Barker, David y Townsend, Brian (2006). «Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection». En: *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 18, N.º 3. pp. 3-28. New York: Springer.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Noss, Richard *et al*. (2009). «Developing a Microworld to Support Mathematical Generalisation». En: Tzekaki, Marianna, Kaldrimidou, Maria y Sakonidis, Haralambos (Eds.). *Proceedings of the 33.rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 49-56. Tesalónica, Grecia: PME.

Noss, Richard *et al*. (2012). «The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalization». En: *Computers & Education*, Vol. 59, N.º 1, pp. 63-81. Reino Unido: Elsevier.

Sasman, Marlene, Olivier, Alwyn y Linchevski, Liora (1999). «Developing a Microworld to Support Mathematical Generalisation». En: Zaslavsky, Orit (Ed.). *Proceedings of the 23.rd International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 161-168. Haifa, Israel: PME.

Secretária da Educação (2010). *Currículo do Estado de São Paulo*: *matemática e suas tecnologias*. São Paulo, Brasil: SEE.

Stacey, Kaye (1989). «Finding and using patterns in linear generalising problems». En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20, N.º 2, pp. 147-164. Holanda: Springer.

Vale, Isabel y Pimentel, Teresa (2005). «Padrões: um tema transversal no currículo». En: *Revista Educação e Matemática*, Vol. 85, pp. 14-20. Brasil: Associação de Professores de Matemática (APM).

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Artículo recibido 17-06-2013. Aprobado: 27-01-2014