Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória[1]

João Pedro da Ponte[2]
Marisa Quaresma[3]
Universidad de Lisboa

Resumo

Este artigo estuda as representações e os raciocínios de alunos do 6.º ano na resolução de tarefas com números racionais numa aula de cunho exploratório. Damos especial atenção às representações pelas quais os alunos mostram preferência e ao modo como estabelecem generalizações e justificações. A investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, com observação participante. Analisamos o trabalho dos alunos de uma turma em tarefas de comparação e equivalência de frações e envolvendo o uso da fração como operador, em cinco aulas integralmente videogravadas e transcritas. A representação mais usada pelos alunos nestas aulas é a decimal, onde se sentem mais à vontade. Os alunos mostram dificuldade na produção de generalizações e justificações e tendem a considerar que justificar se reduz a apresentar os cálculos realizados na resolução da tarefa. Contudo, durante as discussões coletivas, conseguem fazer justificações baseadas em conhecimentos anteriores, em propriedades, conceitos matemáticos e contraexemplos que refutam uma afirmação.

Palavras-chave: Raciocínio, Generalização, Justificação, Representações, Números racionais.

---

1 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

2 Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Correo electrónico: jpponte@ie.ulisboa.pt.

3 Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Correo electrónico: mq@campus.ulisboa.pt.

Representaciones y razonamiento matemático de los estudiantes en la resolución de las tareas relacionadas con números racionales en un abordaje exploratorio

Resumen

Este artículo estudia las representaciones y los razonamientos de estudiantes de 6° cuando se enfrentan a la resolución de tareas en las que intervienen números racionales en clase de matemática de tipo exploratoria; en especial, ponemos la atención a las representaciones que prefieren los estudiantes y al modo en que establecen generalizaciones y justificaciones.

La investigación se orienta por un enfoque cualitativo e interpretativo con observación participante. Analizamos el trabajo de los estudiantes de un grupo en tareas de comparación y equivalencia de fracciones en las cuales está presente el uso de la fracción como un operador; las clases fueron videograbadas y posteriormente transcritas.Los resultados muestran que la representación más usada por los estudiantes en estas clases es la representación con la cual se sienten más a gusto.Los estudiantes manifiestan en la producción de generalizaciones y justificaciones y tienden a considerar que la justificación se reduce a presentas los cálculos realizados en la resolución de una tarea. De ese modo, durante las discusiones colectivas los estudiantes logran hacer justificaciones basándose en conocimientos previos, en propiedades, conceptos matemáticas y contraejemplo que refutan una afirmación

Palabras claves: Razonamiento, generalización, justificación, representaciones números racionales.

Introdução

Numa abordagem exploratória do ensino-aprendizagem (Ponte & Quaresma, 2011), ou como se diz em inglês, *in inquiry-based mathematics teaching* (Blomhøj & Artigue, 2013), os alunos trabalham em tarefas em que têm de construir as suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diversas representações matemáticas. O professor, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Procura-se, deste modo, levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, mas também a sua compreensão da Matemática bem como a capacidade de a usar nas mais diversas situações. Procuramos ilustrar esta abordagem no ensino dos números racionais, um tópico reconhecidamente difícil para os alunos (Monteiro & Pinto, 2005), onde predominam as abordagens baseadas no cálculo, associadas às regras das operações e da equivalência de frações.

Na abordagem exploratória valoriza-se a construção de conceitos, o uso de representações, a modelação de situações, e também o uso de definições e propriedades dos objetos matemáticos para chegar a conclusões. No trabalho na sala de aula, isto significa uma outra relação entre os aspetos conceptuais e os aspetos computacionais. No caso dos números racionais, a atenção às propriedades e representações permite trazer para o primeiro plano os aspetos algébricos destes números (Empson, Levi & Carpenter, 2010), salientando dois aspetos essenciais do raciocínio matemático – a generalização e a justificação.

As representações matemáticas têm uma estreita ligação com o raciocínio e desempenham um papel fundamental em Matemática. De facto, dada a natureza abstrata dos objetos matemáticos, só é possível raciocinar sobre esses objetos, ou seja, fazer inferências fundamentadas, usando representações. Além disso, na resolução de um problema ou na realização de uma investigação que requer raciocínio, a escolha da representação a usar é muitas vezes decisiva para se conseguir alcançar o objetivo.

Assim, neste artigo analisamos o trabalho dos alunos em tarefas sobre comparação de frações e uso da fração como operador tendo em vista perceber que representações eles preferem usar para resolver tarefas com números racionais e em que medida conseguem fazer generalizações e justificações na resolução de problemas com números racionais.

Abordagem exploratória, representações e raciocínio

Os três temas principais que tratamos neste artigo, a abordagem exploratória, as representações e o raciocínio matemáticos, têm vindo a ganhar grande destaque na educação matemática, proporcionando uma outra forma de organizar o trabalho na sala de aula e promover o desenvolvimento da aprendizagem da Matemática. Impõe-se, por isso, uma breve discussão acerca de cada um deles.

Abordagem exploratória

Esta abordagem é marcada pela natureza das tarefas propostas, pelas formas de trabalhar e pelo tipo de comunicação que tem lugar na sala de aula. As tarefas são se importância fundamental pela atividade que podem originar. Na verdade, o que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre essa atividade (Christiansen & Walther, 1986). Por isso, é fundamental escolher tarefas apropriadas, que possam servir de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos. Para isso, tal como indica Ponte (2005), as tarefas devem assumir uma natureza diversificada, como exercícios, problemas, investigações e explorações. As tarefas estruturadas podem ser *exercícios* de desafio reduzido que visam sobretudo a consolidação de conhecimentos, ou *problemas* de desafio elevado que visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui. Pelo seu lado, as tarefas abertas podem ser *explorações* de desafio reduzido que visam sobretudo a construção de novos conceitos, ou *investigações* de desafio elevado que visam tanto o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos. Ao professor cabe selecionar as tarefas de acordo com os objetivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destina.

Na realização destas tarefas na sala de aula podem usar-se diferentes modos de trabalho. Uma possibilidade é o modo *coletivo*, com o professor a interagir com todos os alunos. Outra é o trabalho em *grupo* e a *pares*, tendo em vista proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de partilha. Deste modo, os alunos podem participar em dois níveis do discurso da aula – o coletivo e o privado, que desenvolvem com os seus colegas (Ponte & Santos, 1998; Sherin, 2002). Pode também usar-se o trabalho *individual*, procurando desenvolver a capacidade de concentração e reflexão do aluno.

As aulas de cunho exploratório estruturam-se usualmente segundo três fases (Ponte, 2005): (i) a apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam (em coletivo); (ii) o desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) a discussão e síntese final (de novo em coletivo). Esta última fase é muito importante pois é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados (Bishop & Goffree, 1986), permitindo aos alunos relacionar vários temas, mostrando como as ideias matemáticas são interligadas. Além disso, os momentos de discussão coletiva constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento. A aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interações na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjeturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio matemático. Como tal, cada tarefa culmina sempre com um momento de discussão coletiva, como forma de refletir, discutir ideias, processos e conclusões (NCTM, 2007, p. 23).

A comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos. Esta comunicação é *unívoca*, quando é dominada pelo professor, ou *dialógica* quando a contribuição dos alunos é valorizada (Ponte, 2005). É ao professor que cabe definir os padrões de comunicação, propor as tarefas a realizar e estabelecer os modos de trabalho na sala de aula mas tem de o fazer em permanente negociação, por vezes bem difícil, com os alunos. Mas o professor pode assumir em exclusivo o papel de *autoridade matemática* ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação. Um aspeto muito importante do trabalho do professor é o modo como procura ajudar de forma discreta os alunos a apropriar-se da linguagem matemática correta, usando sobretudo processos de "redizer, isto é, reformulando as afirmações dos alunos numa linguagem progressivamente mais correta.

Representações

Representar um número significa atribuir-lhe uma designação e é importante que os alunos compreendam que um número pode ter várias designações. É necessário distinguir entre representações internas, que se formam na mente do indivíduo, e representações externas, que existem nos mais variados suportes (Goldin, 2008). Bruner (1999) refere três grandes tipos de representações: ativas (objetos, movimento do corpo), icónicas (imagens, diagramas) e simbólicas. Também Duval (2004) sublinha a diversidade de representações indicando que “os números, as funções, as retas, etc… são objetos matemáticos, e as escritas decimal ou fracionária, os símbolos, os gráficos, etc.., são algumas das suas representações” (p. 14). Valoriza a articulação de registos de representação de um mesmo objeto como condição para a compreensão matemática. Outros autores, Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem entre representações informais, pré-formais e formais, indicando que todas elas têm um papel importante a desempenhar na aprendizagem da Matemática. É de notar que só é possível compreender o modo de pensar e de raciocinar dos alunos observando as suas representações (NCTM, 2007).

Os números racionais admitem uma variedade de representações: percentagem, numeral decimal, fração, imagens, reta numérica e linguagem natural. Os alunos devem compreender todas elas, sabendo por exemplo, que , 25%, e 0,25 não são mais do que designações diferentes do mesmo número. Diferentes representações podem ser usadas em simultâneo e os alunos podem ser encorajados a passar de umas para outras, aprendendo “a alternar entre formas equivalentes, escolhendo e usando uma forma adequada e conveniente para resolver problemas e expressar quantidades” (NCTM, 2007, p. 175).

Raciocínio

Racionar significa fazer inferências baseadas em razões, ou seja, inferências fundamentadas. Lithner (2008) indica que o raciocínio matemático é uma competência básica, sublinhando a distinção entre raciocínio matemático criativo e imitativo, baseado na memorização e na realização de algoritmos.

A Matemática é habitualmente associada a raciocínio dedutivo (Davis & Hersh, 1980), o único capaz de garantir a validade matemática de uma certa afirmação. No entanto, diversos autores sublinham igualmente o importante papel que nesta ciência desempenham os raciocínios indutivo (Pólya, 1990) e abdutivo (Rivera & Becker, 2009), nomeadamente nos processos de descoberta. Além disso, em muitos casos, o que ocorre é uma mescla de processos, com aspetos indutivos, abdutivos e dedutivos. Mata-Pereira e Ponte (2012) apresentam um quadro para o estudo do raciocínio matemático dos alunos, que relaciona a generalização e a justificação com a formulação de questões e conjeturas:

> O raciocínio matemático (…) apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*). Atendendo à impossibilidade de aceder diretamente ao raciocínio dos alunos, as representações que estes usam para comunicar esse raciocínio são fundamentais. Por outro lado, os processos de significação em articulação com o raciocínio matemático são essenciais para uma compreensão efetiva da Matemática (…). Os raciocínios indutivo e abdutivo ocorrem sobretudo durante a formulação de conjeturas, enquanto o raciocínio dedutivo tem lugar em especial durante o teste e a justificação. (p. 84).

Mata-Pereira e Ponte (2012) indicam que os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, procedimentos, representações e linguagem matemáticos. Além disso, devem aprender a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade recorrendo a exemplos específicos. À medida que progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem tornar-se cada vez mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos.

Também Lannin, Ellis e Elliott (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve essencialmente a produção de generalizações e justificações matemáticas. Para os autores a “grande ideia” sobre o raciocínio matemático é que este é um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos. Na sua perspetiva, é importante que os alunos (i) façam justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já compreendidas anteriormente, (ii) justifiquem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa, (iii) avaliem a validade dos argumentos utilizados, (iv) tenham presente que uma justificação matemática não é um argumento baseado na autoridade, perceção, senso comum ou em exemplos particulares, e (v) procurem justificar o porquê de uma generalização ser verdadeira ou falsa investigando que fatores podem influenciar essa generalização.

Outro autor, Galbraith (1995), indica que os alunos mostram muitas vezes dificuldade em aceitar que um só caso seja suficiente para refutar uma afirmação. Acrescenta ainda que os alunos também manifestam dificuldade em compreender que um contraexemplo de uma afirmação matemática deve satisfazer as condições dadas e violar as suas conclusões. No que se refere à formulação de generalizações, este autor distingue entre a abordagem indutiva (ou empírica), onde os alunos testam alguns casos, e a abordagem dedutiva. Na abordagem indutiva, distingue ainda entre os alunos que fazem testes ao acaso e aqueles que escolhem os casos tendo por base a sua compreensão da conjetura que está a ser testada. Pelo seu lado, na abordagem dedutiva os alunos têm que reconhecer a relevância de um certo princípio externo, reconhecer de que modo este princípio é útil e aplicá-lo apropriadamente. Pelo seu lado, Rivera & Becker (2009) salientam a importância do raciocínio abdutivo, em que os alunos formulam conjeturas gerais a partir de indícios aparentemente dispersos, e referem que na prática, na resolução de um problema, uma pessoa usa uma grande variedade de raciocínios abdutivos, indutivos e dedutivos, de modo profundamente interligado.

Davis e Hersh (1980) referem a existência de diversos estilos cognitivos entre os matemáticos, que privilegiam certas formas de raciocínio, cada uma das quais associada a certos tipos de representações. Estes autores apontam, por exemplo, o estilo analítico (que se apoia essencialmente no trabalho com símbolos), o estilo visual (que usa profusamente representações geométricas e icónicas) e o estilo cinestético (em que o próprio movimento corporal tem um papel na atividade matemática.

Tal como indica o NCTM (2007), "[a] compreensão e a capacidade de raciocínio dos alunos ir-se-ão desenvolvendo à medida que eles forem representando frações decimais através de objetos e na reta numérica, e à medida que forem aprendendo a produzir representações equivalentes de frações e [de numerais] decimais" (p. 35). Segundo este documento, as representações são importantes, não só para ajudar os alunos a desenvolver a compreensão dos tópicos matemáticos, mas também como suporte do raciocínio, permitindo obter resultados e tirar conclusões. Ao aprenderem a usar diferentes representações matemáticas, conhecendo o seu significado, os alunos ficam na posse de importantes ferramentas que ampliam a sua capacidade de pensar matematicamente. Desenvolver a capacidade de raciocínio é essencial para ajudar os alunos a irem além da mera memorização de factos, regras e procedimentos. O foco no raciocínio pode ajudar os alunos a verem que a Matemática tem uma estrutura lógica que eles podem compreender e usar para pensar, justificar e avaliar. A sala de aula que valoriza e promove o raciocínio é essencial para alcançar estes objetivos.

Metodologia de investigação

Uma vez que se pretende estudar as representações e o raciocínio dos alunos, e estes são fenómenos eminentemente individuais e cuja apreensão requer interações individuais com os participantes, este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Usámos observação participante, feita por ambos os autores, dado que esta metodologia permite uma relação muito próxima do investigador com o objeto de estudo, no seu contexto natural. Debruçamo-nos em especial sobre as discussões coletivas das tarefas realizadas numa turma cuja professora de Matemática é a segunda autora deste artigo.

Para além da professora, os participantes do estudo são os alunos de uma turma do 6.º ano de uma escola básica do ensino público numa zona rural a 50 km de Lisboa que constitui um território educativo de intervenção prioritária (TEIP). A classe socioeconómica das famílias é, em geral, baixa ou média-baixa e os encarregados de educação, na sua maioria, têm como habilitações académicas o 2.º ou 3.º ciclo do ensino básico e, menos frequentemente, o ensino secundário. A turma é composta por 19 alunos, 14 rapazes e 5 raparigas com idades compreendidas entre os 11 e os 17 anos de idade (a maioria com 11 anos), tendo 4 alunos já reprovado em anos anteriores. É uma turma que revela falta de empenho e de hábitos de trabalho, tanto individualmente como em atividades de pares.

O estudo envolve cinco aulas de 90 minutos cada. O primeiro conjunto de tarefas proposto pretendia fazer um diagnóstico sobre comparação, ordenação, adição e subtração de números racionais. O segundo conjunto de tarefas visava introduzir a multiplicação de um número inteiro por uma fração e a multiplicação de duas frações. Por fim, o terceiro conjunto pretendia desenvolver o sentido de operador. De acordo com os princípios de uma abordagem exploratória, os alunos trabalharam a pares durante uma parte da aula e na outra parte realizou-se uma discussão coletiva das tarefas.

As aulas foram registadas em vídeo e áudio, tendo sido integralmente transcritas as discussões coletivas. Foram também recolhidas e analisadas as produções escritas realizadas pelos alunos nas diversas tarefas. A análise dos dados procurou identificar os principais segmentos na resolução das tarefas, notando eventos marcantes no que respeita às representações, generalizações e justificações realizadas pelos alunos. Finalmente, selecionámos diversos episódios que considerámos particularmente relevantes relativamente às representações, generalizações e justificações efetuadas e que são os aspetos que analisamos neste artigo. A análise é feita procurando interpretar os raciocínios observados tendo em atenção as representações usadas, tendo em vista a identificação de padrões e regularidades nos elementos empíricos.

Momentos de trabalho na sala de aula

Apresentamos de seguida dois episódios da sala de aula, analisando as representações usadas pelos alunos e o seu raciocínio matemático no que respeita especificamente aos processos de generalização e de justificação.

Tarefa 1 – Desigualdade verdadeira?

Nesta tarefa é pedido aos alunos que, trabalhando em pares, avaliem a validade de uma afirmação onde se comparam duas frações e justifiquem a sua resposta. A tarefa envolve a relação de "maior que", tendo sido realizada na primeira parte da experiência, quando se procurava diagnosticar os conhecimentos dos alunos sobre comparação de números racionais. Os dados são apresentados e pedidos em forma de fração e o contexto em que a questão está formulada é puramente matemático.

$\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{3}{4}$. Será que podemos fazer a seguinte afirmação: "Se quisermos comparar duas frações e verificarmos que uma delas tem o numerador e o denominador maiores do que a outra, podemos logo concluir que essa é a fração maior"? Justifica a tua resposta.

A tarefa é apresentada por escrito e a professora comenta oralmente o enunciado. A tarefa reveste-se de assinalável complexidade para estes alunos, dada a quantidade de informação indicada e a sua natureza e também porque determinar a veracidade de uma afirmação não é para eles uma tarefa habitual. Verificando a dificuldade dos alunos em compreender a tarefa, a professora decide fazer um momento de interpretação coletiva do enunciado.

A primeira parte do enunciado não provoca dificuldade aos alunos, que conseguem perceber com facilidade que que $\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e que $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$. Mas os alunos ficam sem saber o que fazer para dizer se esta afirmação é correta ou não para todos os casos. A professora procura redizer o enunciado por outras palavras sem dar pistas sobre a estratégia a seguir e é um aluno que acaba por formular a estratégia a seguir.

Professora:	Os dois casos são verdadeiros. E, a seguir o que eles, o que está aí é… OK, isto e isto [$\frac{2}{4} > \frac{1}{3}$ e $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$] é verdade. Eu posso dizer que sempre que o numerador e o denominador de uma fração forem maiores que o numerador e o denominador de outra fração, então esta [4/5], que tem o numerador e o denominador maiores, é sempre maior que a segunda [fração]? Isto acontece sempre?
Aluno:	Não…
Professora:	Como é que vocês podem tentar perceber se acontece sempre ou não?
Daniel:	Fazendo mais frações…
Professora:	Encontrando outros exemplos, não é… Pode ser uma… Uma boa sugestão do Daniel, não sei (…).

A sugestão de Daniel corresponde a seguir uma estratégia de raciocínio indutivo, experimentando diversos casos, na expetativa de poder chegar a uma conclusão. Nessa experimentação usa propriedades e operações matemáticas, que são elementos-chave do raciocínio dedutivo. A professora procura aperfeiçoar a linguagem, sugerindo que se verifiquem "outros exemplos", e os alunos tentam encontrar outros casos que respeitem a condição do problema para verificarem se a afirmação se verifica sempre ou não.

No que diz respeito às representações, verifica-se que, quase a totalidade dos alunos transforma as frações em numerais decimais e é nesta representação que resolvem a tarefa (Figura 1). Esta preferência pelo uso de numerais decimais para comparar dois números racionais, em vez de trabalhar com as frações reduzindo-as a um denominador comum, pode ter a sua explicação no facto de ser uma representação muito forte no currículo de Matemática dos primeiros anos em Portugal. Os alunos que desenvolveram uma grande familiaridade com esta representação são capazes de a usar com desembaraço.

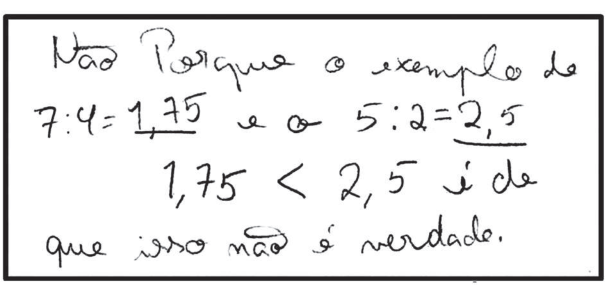

Figura 1. Resposta de Mara e Ângelo.

Apenas um par de alunos usa a representação em fração (Figura 2) e outro grupo usa percentagens.

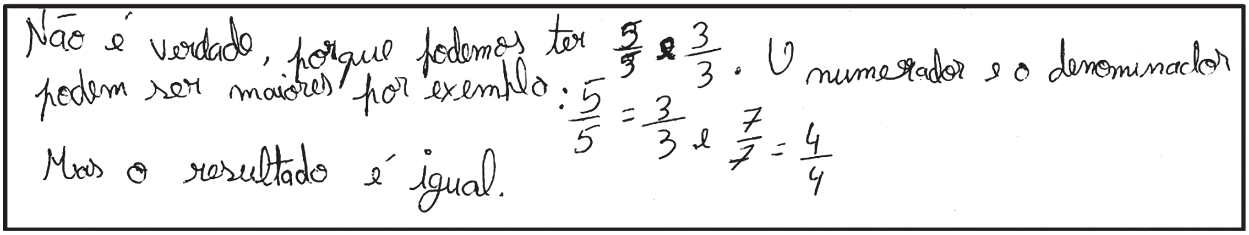

Figura 2. Resposta de Edgar e Juliana.

Diversos pares de alunos conseguem responder corretamente usando apenas um contraexemplo para justificar que se trata se uma afirmação falsa. É o caso do par formado por Mara e Ângelo (figura 1) que apresentam os números racionais $\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$ (escritos como quocientes e como numerais decimais). É também o caso de Edgar que trabalhou com a sua colega Juliana e que escreve $\frac{5}{5}=\frac{3}{3}$ e ainda $\frac{7}{7}=\frac{4}{4}$ e que explica a sua resolução à turma da seguinte forma:

Professora:	… Vá lá… Então? Edgar, o que é que isso significa?
Edgar:	São os dois (as duas frações) 1. (…) O numerador e o denominador [] são maiores do que aquele [].
Professora:	Explica lá Edgar, então como é que chegaste a essa conclusão? Que informação é que tens dos exemplos que foram dados? OK. Os exemplos que foram dados diziam… Sempre que o numerador e o denominador são maiores, então essa fração é maior que a outra e tu descobriste o quê? Que é verdade ou que não é verdade?
Edgar:	Não é verdade.
Professora:	Porquê?
Edgar:	Porque… O resultado desta é maior e o numerador e o denominador são maiores… Ai. Sim!
Professora:	O resultado não é maior, o resultado é igual. Apesar de ter…
Edgar:	Ah, entre estas duas…
Professora:	Entre essas duas, apesar de [serem] maiores os termos na primeira fração do que na segunda, o resultado é…
Edgar:	Igual.

Edgar mostra ainda alguma dificuldade na conceptualização das frações, que parece encarar sobretudo como quocientes (daí falar em "resultado"). No entanto o seu raciocínio está correto. Edgar e Juliana apresentam um contraexemplo onde as frações são iguais, o que é surpreendente uma vez que no enunciado surge a relação "maior que" e não a relação de igualdade. Apesar das dificuldades que evidenciam na interpretação do enunciado, não mostram dificuldade em compreender que um contraexemplo de uma afirmação matemática deve satisfazer as condições dadas e violar as suas conclusões. Tal como todos os alunos que responderam corretamente, as suas justificações baseiam-se, exclusivamente, em cálculos.

Tarefa 2 – Rebuçados da Rita

Esta tarefa pede aos alunos que usem frações como operador multiplicativo para determinar partes de um todo e justificar a resposta. É uma situação contextualizada numa situação familiar aos alunos onde a informação é dada em fração e em números inteiros e o resultado é pedido sob a forma de número inteiro. Trata-se de uma tarefa realizada na terceira parte da experiência, em que se procurava desenvolver o sentido de operador. Tal como na tarefa anterior, os alunos trabalham aos pares.

Para a sua festa de aniversário a Rita comprou 250 rebuçados para dar aos seus amigos. Decidiu dar $\frac{1}{5}$ aos colegas da natação, $\frac{3}{5}$ aos colegas da escola e guardou $\frac{2}{10}$ para dar aos convidados da sua festa de aniversário.

a) Quantos rebuçados deu a Rita aos colegas da natação? E aos colegas da escola? Justifica a tua resposta.

b) Quantos rebuçados guardou a Rita para os convidados da sua festa de aniversário? Justifica a tua resposta.

Devido às dificuldades manifestadas pelos alunos na apresentação de justificações, a professora decidiu fazer uma breve discussão com eles sobre como podem justificar as suas respostas:

Professora:	Então, vocês têm escrito o seguinte nas várias perguntas "Justifica a tua resposta", esta justificação pode ser feita de diversas maneiras (…), pode ser feita usando…
Daniel:	Desenhos…
Professora:	Esquemas, desenhos…
Aluno:	Contas
Professora:	Cálculos, palavras…
Rui:	Gráficos…
Professora:	Gráficos… Se assim o conseguirem fazer… Desde que, desde que essa justificação, essa resposta seja muito clara, mostre exatamente a forma como vocês pensaram… Tem é de ser muito claro. Tem que seguir exatamente aquilo que vocês estavam a pensar.

Esta discussão inicial legitimou o uso de diversas representações para a apresentação de justificações às questões propostas. A discussão serviu também para elencar as representações que os alunos poderiam considerar.

A representação pictórica, que tinha sido bastante usada em aulas anteriores, surge assim em diversas respostas. Como nas aulas anteriores foram discutidas as regras para multiplicar frações, os alunos passam também a usar mais esta representação. Assim, é natural que nesta tarefa a maior parte dos alunos use, simultaneamente, a representação em fração e a representação pictórica, como é o caso de Juliana e Edgar (Figura 4). Apenas Ana e Adriana usam a representação decimal e um número reduzido de alunos usa só a fração.

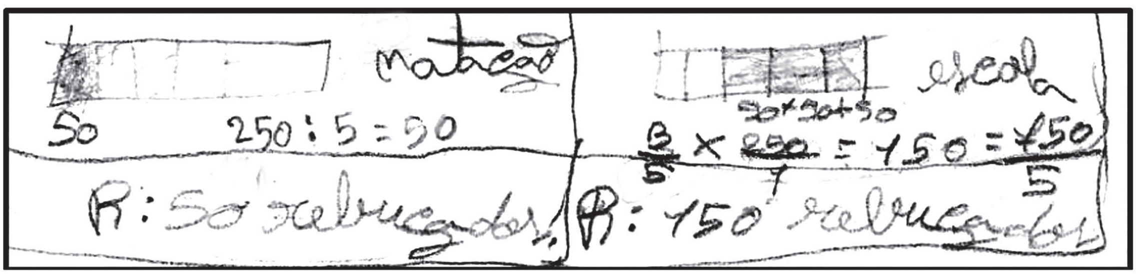

Figura 4. Resposta de Juliana e Edgar.

A discussão coletiva desta tarefa proporciona um momento interessante de interação e comunicação entre os alunos. Procurando explorar a possibilidade de surgirem desacordos e momentos de argumentação por parte dos alunos, a professora começa por pedir a Daniel, cuja resposta está errada, que apresente a sua resolução à turma (Figura 5):

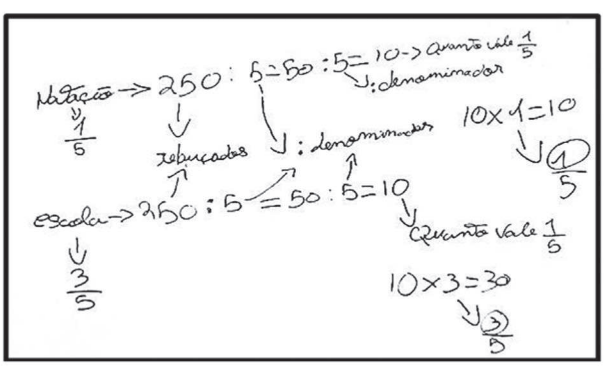

Figura 5. Resposta de Daniel e Marco.

Daniel começa por dizer que o que escreveu explica totalmente a sua resolução. No entanto, a professora, pede-lhe para ele explicar oralmente como procedeu.

Daniel:	Na natação 250 é o número dos rebuçados a dividir por 5 que é o denominador, para ver quanto é que valia a, ao todo…
Professora:	Então põe lá por baixo de natação, põe lá a fração, se faz favor, só para nós percebermos o que é que tu estás a dizer… Por baixo da palavra natação, mete a fração dos rebuçados que ela deu aos meninos da natação, qual foi a fração?
Daniel:	1/5.
Professora:	Isso, OK, só para nós percebermos do que é que tu estás a falar… Então quando tu dizes que dividiste por 5 é porque é o denominador dessa fração [1/5]… Continua…
Daniel:	E deu 50.
Professora:	E o que é que representa esse 50?

Daniel:	Esse 50 significa quanto é que vale este 5… E fiz 50 a dividir por 5 outra vez por causa do denominador para ver quanto é que valia este 1. Deu 10… Então deu… Fiz… 10 vezes o numerador e deu 10, acho que deu 10 rebuçados…
Alunos:	Eu acho que não…

Daniel ilustra bem a ideia que muitos alunos têm, segundo a qual os cálculos explicam totalmente o raciocínio utilizado. O aluno comete um erro ao dividir duas vezes por cinco para encontrar $\frac{1}{5}$ de 250. Atendendo às condições do enunciado, percebe que é necessário "dividir por 5", mas depois aplica esse procedimento indiscriminadamente a diversas quantidades, sem ter em atenção o que elas representam.

Outros alunos dizem de imediato que não concordam e a professora pede a Jaime para apresentar a sua resolução (Figura 6):

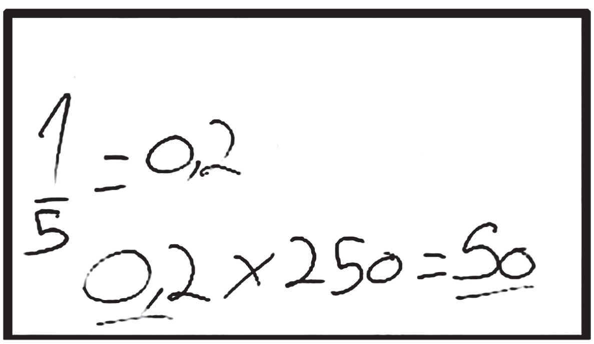

Figura 6. Resposta de Jaime.

Professora:	Vamos, vamos então, vamos explicar como é que fez o Jaime. Queres ir lá ao quadro? Põe lá a tua explicação…
Jaime:	Aqui fiz… O resultado de $\frac{1}{5}$.
Professora:	O resultado de $\frac{1}{5}$? O que é isso? O resultado de $\frac{1}{5}$?
Jaime:	O valor, o valor em décimas de $\frac{1}{5}$
Professora:	Em número decimal… De $\frac{1}{5}$… Ai!
Jaime:	Dá 0,2 e fiz… 0,2 vezes o número de rebuçados, deu 50.
Professora:	Porquê?
Jaime:	Porque fiz a conta.
Professora:	Está bem, está bem, e porque é que fizeste a conta? Fizeste esta e não outra…?
Jaime:	Fiz esta porque lembrei-me daquele exercício que a gente fez no outro dia…
Professora:	Lembraste-te do exercício…
Jaime:	Do parlamento ou o que era…

Tal como Edgar na tarefa anterior, também Jaime mostra encarar a fração como um quociente que transforma num numeral decimal para realizar os cálculos. Percebe que apenas tem de determinar duas décimas da quantidade total de rebuçados mas mostra dificuldade em explicar o seu procedimento, fazendo uma analogia com uma tarefa de uma aula anterior.

Por fim, Vasco apresenta também a sua resolução, que usa uma representação pictórica (Figura 7):

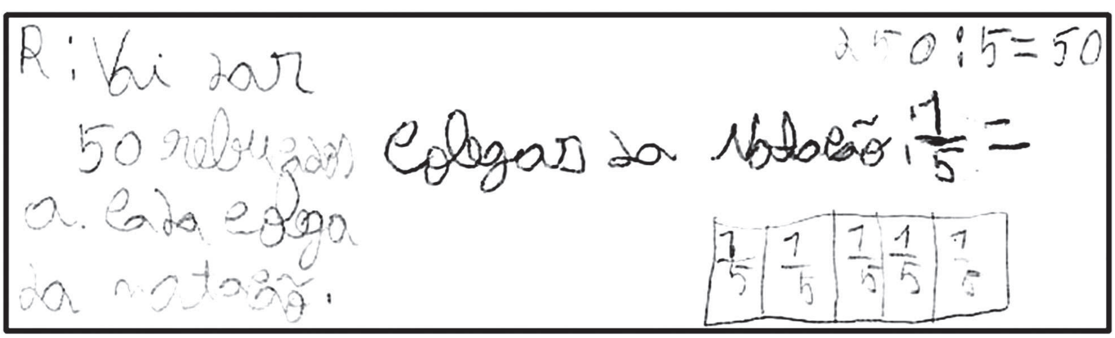

Figura 7. Resposta de Vasco.

Vasco mostra-se muito embaraçado em explicar a sua resolução, que vai realizando com a ajuda da professora:

Professora:	(…) Oh Vasco, então diz lá o que é que representa esse retângulo completo.
Vasco:	Os 250 rebuçados.
Professora:	Pronto… O retângulo grande representa os 250 rebuçados, e cada uma dessas fatias representa…
Vasco:	1/5.
Professora:	1/5… E em fração esse retângulo todo como é que se pode representar? Alguém consegue ajudar?
Alunos:	São 5, 5/5 ou uma unidade.
Professora:	Ou 1 unidade! É tudo, não é… Os rebuçados todos. OK, até aqui conseguiste chegar, agora o que é que fazes no passo seguinte?
Vasco:	Fiz os 250 a dividir por 5.
Professora:	Para quê?
Vasco:	Para saber o resultado disto [cada uma das 5 partes].
Professora:	(…) Pronto e que a conclusão chegaste?
Vasco:	Deu 50 rebuçados (…).

Com as diferentes resoluções no quadro, a professora pede aos alunos para decidirem qual a que está correta e para justificarem a sua escolha. Os alunos mostram facilidade em aceitar as resoluções corretas de Jaime, de Vasco e de Juliana e Edgar e identificam o erro da resolução de Daniel, dizendo que este não devia ter dividido a segunda vez por 5, já que ele procura $\frac{1}{5}$ de 250, e isso é a quinta parte, bastando dividir uma vez por 5.

A professora procura então relacionar as resoluções de Vasco e Jaime. Os alunos percebem que 250:5 é igual a 250×0,2, uma vez que $\frac{1}{5}$=0,2 e a divisão e multiplicação são operações inversas. Após esta discussão, Rui faz a seguinte generalização:

Rui:	Sempre que quisermos fazer uma conta dessas $\left(\frac{1}{4}\times 250\right)$…
Professor:	Sim.
Rui:	É só dividir o denominador pela coisa que estiver antes (…) que neste caso são os rebuçados.
Professor:	Como é que é, explica lá… Dá lá mais exemplos…
Rui:	Por exemplo ¼, se for, outro exemplo, quantos rebuçados? 150 por exemplo… Sempre que há contas dessas, eu posso fazer o 4 ou o denominador a dividir pelo número. E vai dar o resultado.

Perante esta generalização formulada na linguagem pouco precisa do aluno, a professora considera que é importante esclarecer a situação e levá-lo a ajustar a sua linguagem formulando uma generalização mais correta. Desta forma pergunta-lhe se o que encontrou também é válido para $\frac{2}{4}$ ×150. Rui fica bastante atrapalhado e comete alguns erros, mas, no final, Guilherme consegue perceber a diferença entre determinar $\frac{1}{4}$ o u $\frac{2}{4}$ de algo:

Guilherme:	Eu acho que… Pode-se fazer da mesma maneira só que tem que se acrescentar uma coisa…
Professora:	Temos de acompanhar… Oh Rui, aquela é a tua… Ele está a dizer que é mentira, tu tens que a defender… Olha Guilherme, continua lá a explicar então.
Guilherme:	Pode-se fazer 150 a dividir por 4… Podemos fazer da mesma maneira porque podemos fazer… 4 a dividir por 150 dá 37,50.
Professora:	Vá 150 a dividir por 4, vá tomem lá atenção…
Guilherme:	150 a dividir por 4, depois fazemos o resultado vezes o denominador.
Professora:	O de cima ou o de baixo?
Guilherme:	O de cima…
Professora:	Ah, o numerador.
Guilherme:	Numerador…
Professora:	OK, vamos então, vamos ver, vamos avançar… Então faríamos… O que é que significa fazer… Quanto é que dá 150 a dividir por 4. Primeiro eu tenho que saber o que é que significa 150 a dividir por 4… O que é que é este 37,5.
Guilherme:	É ¼ de 150.
Professora:	Então... Eu aqui quero… Quantos quartos?
Guilherme:	2 Quartos! Por isso é que vamos fazer vezes 2.

Assim, Guilherme reformula a generalização feita por Rui, que havia dito que sempre que se quer fazer um cálculo como $\frac{1}{4}\times150$, basta fazer 150:4. Guilherme acrescenta que isto também é verdade para frações não unitárias, mas é preciso acrescentar um outro passo, a multiplicação pelo numerador, mostrando compreender o significado dessa operação. Desta forma, na análise de casos particulares durante a discussão em grande grupo, os alunos formulam uma nova generalização também de carácter indutivo.

Discussão

Verificamos que a generalidade dos alunos mostra dificuldade em compreender o enunciado da tarefa 1. Esta dificuldade só é ultrapassada com uma negociação de significados que os deixa mais confiantes e envolvidos na realização da tarefa. Como estratégia de resolução, a maioria dos alunos transforma as frações em numerais decimais, representação em que se sente mais confortável. As justificações que os alunos apresentam são, essencialmente, os cálculos realizados para chegar à resposta do problema – mas mostram capacidade para justificar com um contraexemplo, aceitando que um só contraexemplo é suficiente para refutar uma afirmação, o que é notável dadas as dificuldades indicadas na literatura (Galbraith, 1995). Nesta tarefa não se registam generalizações por parte dos alunos.

Pelo seu lado, na tarefa 2 verifica-se um certo afastamento dos alunos em relação à representação decimal, usando sobretudo a fração e a representação pictórica. Contudo, não aceitam a representação pictórica como base para a resolução ou justificação e, a par desta representação usam sempre cálculos com números inteiros e com frações. Além disso, para determinar $\frac{1}{5}$ de 250, os alunos usam a divisão 250:5 revelando ainda um modo de pensar influenciado pela noção da fração como quociente ou operador partitivo adquirida no 1.º ciclo. É ainda de notar que os alunos conseguiram detetar e corrigir o erro cometido por um colega, manifestando assim que se sentem com "poder" para intervir e avaliar o trabalho dos colegas, sem que esse papel seja apenas atribuído à professora. Um aluno faz uma generalização que, apesar de errada, proporciona um interessante momento de discussão onde é possível estabelecer relações entre como determinar $\frac{2}{4}\times150$ e 150:4×2.

A representação mais usada pelos alunos ao longo de todas as aulas é a de numeral decimal, em que manifestamente se sentem mais à vontade. A principal estratégia que utilizam na comparação, ordenação e adição de frações é a conversão das frações em numerais decimais. Ainda assim, utilizam a representação pictórica em estreita ligação com as frações, mostrando que este tipo de representação pode ainda nesta fase ser útil para os alunos (Quaresma & Ponte, 2012; Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008). Verifica-se ainda que os alunos usam mais a representação em fração na resolução de problemas envolvendo a multiplicação, possivelmente porque a regra para multiplicar frações é muito mais fácil do que a regra para adicionar frações, especialmente no caso de frações com denominadores diferentes.

No que se refere ao raciocínio, os alunos, nestas tarefas, não produzem muitas generalizações. Generalizam para uma classe de objetos mais amplo (na tarefa 2) as relações verificadas para um número reduzido de casos. As generalizações que fazem são de natureza indutiva com base em casos relevantes. Para os alunos, justificar é apenas apresentar os cálculos realizados na resolução de um problema – o que Lithner (2008) designa por raciocínio imitativo. Contudo, durante as discussões coletivas, perante o questionamento da professora e a necessidade de explicar aos colegas, conseguem fazer justificações baseadas em conhecimentos anteriores, em propriedades ou conceitos matemáticos e em contraexemplos que refutam uma afirmação – tal como assinalado por Mata-Pereira e Ponte (2012) em alunos de níveis mais avançados. É de salientar que, ao contrário do que refere Galbraith (1995), consideram com facilidade que um contraexemplo é suficiente para refutar uma afirmação Note-se que, em termos globais, os alunos evidenciam bastante dificuldade de comunicação, o que cria problemas à sua atividade de justificar e torna mais difícil perceber o seu raciocínio. No entanto, apesar destas dificuldades, registaram-se na turma momentos muito interessantes de generalização e justificação, mostrando que é possível usar este tipo de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos.

Conclusão

A abordagem exploratória seguida nas aulas onde ocorreram os episódios que descrevemos, encorajando os alunos a construir as suas próprias estratégias de resolução das tarefas, a usar com flexibilidade diversas representações, a explicar os seus raciocínios e a argumentar as suas posições ajudou-os na sua compreensão de aspetos importantes da noção de número racional e também no desenvolvimento de formas de raciocinar fundamentais em Matemática, com destaque para a generalização e a justificação.

Assim, esta experiência mostra como é possível pôr em prática na sala de aula as recomendações curriculares que sublinham a importância do desenvolvimento do raciocínio, e que passam pelo tipo de tarefas a propor e pelos modos de comunicação que valorizam a negociação de significados, o desenvolvimento progressivo da linguagem, e o encorajamento frequente à generalização e à justificação.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Blomhøj, M., & Artigue, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics. ZDM, 45(6), 797-810.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio d'Água.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Davis, P., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhauser.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *International research in mathematics education (2nd ed.)* (pp. 176-201). New York, NY: Rutledge.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255-276.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos. *Quadrante, 21*(2), 81-110.

Monteiro, M. C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática 100,* 3-9.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, *20*(1), 55-81.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2012). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: O caso de Leonor. *Interacções, 20*, 37-69.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Artículo recibido: 13-09-2013. Aprobado: 21-04-2014