

# Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica

*Nelson Javier Rueda Rueda*<sup>1</sup>

*Sandra Evely Parada Rico*<sup>2</sup>

Universidad Industrial de Santander

## Resumen

**E**n este artículo se presentan algunos resultados de un estudio, desarrollado en un curso de pre-cálculo con estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, cuyo objetivo es caracterizar habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales. En este artículo mostramos los primeros resultados de un estudio de caso, que describe la forma en que dos estudiantes razonan covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de optimización modeladas por un ambiente de geometría dinámica. Para la descripción del razonamiento covariacional se utiliza el marco conceptual propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003). Dadas las acciones realizadas por los estudiantes, se evidencian las ventajas que le puede suministrar el uso de software interactivo para la modificación de sus comportamientos ligados al razonamiento covariacional. Así mismo, se observan ciertas características que pueden relacionarse con la permanencia de los estudiantes en un determinado nivel de razonamiento, así como la flexibilidad de éstos.

**Palabras clave:** modelación de situaciones, acciones mentales, niveles de razonamiento.

---

1 Estudiante de Maestría en Educación Matemática. Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS). [javi\\_rc20@hotmail.com](mailto:javi_rc20@hotmail.com)

2 Profesora Escuela de Matemáticas de la UIS. [sparada@uis.edu.co](mailto:sparada@uis.edu.co)

## Co-variational thinking in optimization situations modeled by dynamic geometry environments

### Abstract

This article presents some of the findings of a study developed in a pre-calculus course with students re-entering the university, with the intention of characterizing cognitive abilities associated with processes of representation of variation phenomena that can be enhanced through problem solving mediated by digital technologies. In this article we show the initial results of a case study which describes the way in which two students reason in a co-variational manner while facing optimization situations modeled by a dynamic geometry environment. The co-variational reasoning was described using the conceptual framework proposed by Carlson, Jacobs, Coe, Larsen and Hsu (2003). The students' performance allowed demonstrating the possible advantages of using interactive software in modifying their behaviors linked to co-variational reasoning. Similarly, there are certain characteristics that may be related to the permanence of students in certain levels of reasoning, as well as their flexibility.

**Keywords:** modeling situations, mental actions, levels of reasoning.

### Introducción

El abandono del estudio clásico del cálculo a través de situaciones que otras ciencias como la física proveían y el decantamiento por el manejo algebraico y más aún por el manejo algorítmico de la matemática han contribuido como factor determinante para que los estudiantes de nuevo ingreso a una institución de educación superior encuentren grandes dificultades para el manejo de asignaturas cuyos componentes se relacionan con el cálculo.

De la misma forma el centrar el proceso de enseñanza en el aprendizaje de contenidos y algoritmos, a pesar de que los documentos orientadores del currículo en matemática hacen énfasis en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, la modelación, la comunicación, entre otros; han permeado de importante manera las nociones y presaberes que los estudiantes puedan llegar a formarse previo a un estudio formal del cálculo diferencial e integral.

El estudio de los fenómenos de variación y acumulación, generadores por excelencia de los conceptos asociados al cálculo, se presentan pues como posibles vías de solución para el problema del cual hemos venido hablando. Dichos fenómenos de variación y acumulación no pueden verse entonces aquejados por las representaciones estáticas de los objetos matemáticos, sino que deben buscar un contexto

donde se enfatice el carácter dinámico de los mismos. Es así como los ambientes de geometría dinámica se convierten en mediadores para este proceso, y las ventajas que estos ambientes pueden brindar al desarrollo de mejores y más apropiadas concepciones son analizadas a través de las diferentes visiones teóricas a nuestro alcance.

En particular, en el estudio que aquí se presenta, el desarrollo de una actividad mediada por un ambiente de geometría dinámica y su posterior análisis a la luz del marco conceptual propuesto por Carlson *et al.* (2003) para el razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos.

### Antecedentes

Hemos tomado como referentes para este estudio algunas investigaciones cuyo marco de referencia ha sido el marco conceptual de Carlson *et al.* (2003). En Villa-Ochoa (2012) el marco conceptual de Carlson es usado para discutir los resultados de un estudio de caso en el que se describen los comportamientos de un estudiante al enfrentarse a situaciones de variación asociadas a funciones cuadráticas. El autor resalta la importancia de la manipulación repetida de las cantidades, lo que permite al estudiante la refutación o validación de sus propias aseveraciones a través de la experimentación. De igual forma se resalta la importancia de las traslaciones entre contextos de repre-

sentación que posibilitan al estudiante avanzar en los niveles de razonamiento covariacional.

En Mena (2014) se sistematiza una experiencia de aula en la que se trabaja con transformación de funciones a través de la utilización del software GeoGebra desde un enfoque covariacional. La experiencia de aula, que busca implementar la utilización de la tecnología a la enseñanza de las matemáticas, se realiza con estudiantes de grado undécimo de una institución educativa de la ciudad de Medellín. El autor destaca la exploración intuitiva que el estudiante puede realizar, al margen del uso de fórmulas que pueden carecer de sentido para él; además se enfatiza la posibilidad de validación que el software le da al estudiante para las construcciones que realiza con lápiz y papel.

En Ávila (2011) se reporta un estudio de casos en el cual se trabajaron los conceptos de función lineal y cuadrática a través de la utilización de software dinámico como GeoGebra y Modellus. La autora refiere la importancia de presentar a los estudiantes actividades significativas que les permitan construir el conocimiento a partir de la propia práctica y la evolución del razonamiento que se refleja en ellos en la realización de gráficas, generación de expresiones algebraicas y en el lenguaje utilizado para responder a los diferentes cuestionamientos planteados por la investigadora.

Estos tres estudios se muestran acorde con los Estándares curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) donde se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Esta definición que centra el énfasis en la resolución de problemas que involucran el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, y que implica como lo dice (Vasco, 2006) pensar de forma dinámica, relacionando variables y magnitudes a través de diversos modelos, ha sido tomada como precedente para el diseño de las actividades dentro de las cuales se halla la utilizada para la realización de este estudio.

## Elementos teóricos

Como marco de referencia para este estudio se ha tomado el marco conceptual propuesto por Carlson *et al.* (2003) en el cual se define el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124). Los autores consideran acorde con la interpretación de Saldanha y Thompson (1998) que la noción de covariación se refleja en la idea de “alguien manteniendo las imágenes sostenidas de los valores de dos magnitudes de manera simultánea” (p. 298). Esta idea de ‘mantener las imágenes sostenidas’ es un proceso dinámico y evolutivo, originado en acciones y movimientos como medio para reflejar las operaciones mentales. Acorde con esta idea, Carlson *et al.* proponen un conjunto de cinco acciones mentales que describen la forma en que los estudiantes razonan frente a eventos de covariación.

De la misma forma los autores consideran a las imágenes de covariación como evolutivas en el sentido piagetiano, caracterizando esta evolución mediante el surgimiento de unos determinados niveles que se suceden en un orden preestablecido.

Las acciones mentales propuestas en el marco conceptual de Carlson *et al.* (2003) se muestran a continuación en Tabla 1.

A partir de estas acciones mentales, los autores clasifican a los individuos en unos determinados niveles de acuerdo a las acciones mentales que estos sustentan al afrontar una situación determinada. Se dice que un individuo ha alcanzado un determinado nivel de razonamiento covariacional si sustenta las acciones mentales asociadas con ese nivel y con los niveles precedentes. Los cinco niveles de razonamiento covariacional se presentan a continuación en Tabla 2.

**Tabla 1. Acciones mentales propuestas por el marco conceptual de Carlson**

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. (e.g., cambia con cambios en )
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra.	Localización de puntos / construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos)

**Tabla 2. Niveles de razonamiento covariacional según el marco conceptual de Carlson et al. (2003)**

Niveles	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con los cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 Y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

## Desarrollo de la investigación

Los resultados del estudio que aquí se reporta hacen parte de un estudio más amplio que busca caracterizar habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación. Dicho estudio

está enmarcado en el desarrollo de un curso que busca desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de nuevo ingreso a carreras de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander (UIS). En este curso se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del pensamien-

to variacional a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software (Fiallo y Parada, 2014). Así mismo el curso está basado en tres criterios: i) problematizar mediante situaciones contextualizadas los objetos matemáticos de estudio del cálculo; ii) explorar fenómenos de variación con el apoyo de las tecnologías digitales y, iii) comunicar estrategias e interpretaciones asociadas a los fenómenos de variación.

## Aspectos metodológicos

La investigación se desarrolló en cuatro fases, de las cuáles la primera correspondió a la selección y análisis preliminar de la actividad la cuál correspondió a la evaluación final del curso antes mencionado, desarrollado en el segundo semestre de 2014. El análisis preliminar de la actividad incluye un análisis realizado por la comunidad de práctica conformada por los profesores que han participado de las versiones hasta ahora realizadas del curso y que se conoce dentro de la comunidad como la guía orientadora para el profesor.

La segunda fase correspondió al trabajo de campo, el cual incluyó la aplicación de la actividad escogida en un grupo, en el marco del curso del segundo semestre de 2014. Para la recolección de datos se hizo grabación en audio y video de las sesiones correspondientes a la aplicación de la actividad seleccionada. Posteriormente, se realizó un estudio de casos con dos estudiantes seleccionados del grupo en el cuál se aplicó la actividad y mediante entrevista audiograbada se observó de nuevo sus comportamientos al afrontar la

misma actividad. La selección de los dos estudiantes tuvo como criterio un desempeño destacado tanto a nivel actitudinal como procedimental en el desarrollo del curso.

La tercera fase correspondió al análisis de los comportamientos de los estudiantes al afrontar situaciones de variación modeladas mediante el software GeoGebra, estos datos son emergentes de la fase anterior y el análisis fue realizado a la luz del marco conceptual de Carlson *et. al.* (2003) que sirve como referencia para el presente estudio. Los comportamientos fueron asociados con la descripción de las acciones mentales que presenta el marco conceptual referido.

La cuarta fase corresponde al reporte de resultados que incluye un análisis de los comportamientos registrados y las producciones escritas de los estudiantes en el desarrollo de la actividad dentro del grupo y en la entrevista personal.

## La actividad desarrollada

La actividad presentada a los estudiantes consistía en el reconocimiento y descripción de la variación de las magnitudes (área, base, altura) en una situación donde se encuentra un rectángulo inscrito en una parábola cuya representación algebraica era conocida. Adicionalmente, se presentaba a los estudiantes la representación gráfica de la situación modelada mediante el software GeoGebra y se le planteaban una serie de cuestionamientos que apuntaban al reconocimiento de la situación de variación.

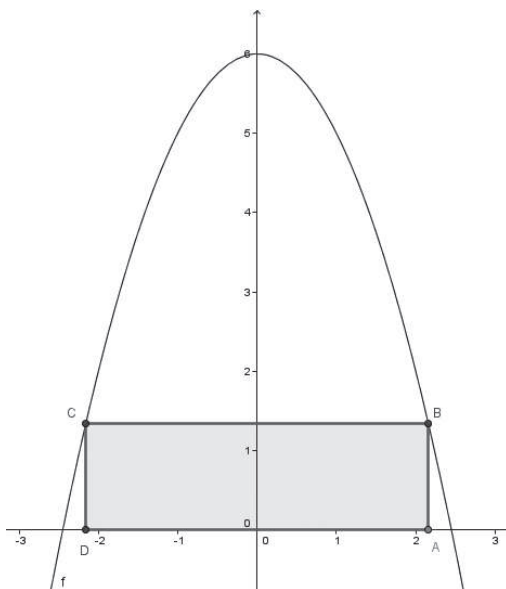


Figura 1. Representación gráfica del rectángulo inscrito en una parábola

A los estudiantes se les entregaba una hoja con las siguientes instrucciones y preguntas:

Abre el archivo RectInsPar.ggb de GeoGebra y resuelve los siguientes puntos:

1. Representa en la hoja de trabajo la gráfica que modela el área del rectángulo en función de su base.
2. ¿Qué valores toma la base del rectángulo inscrito en la parábola? Justifica tu respuesta.
3. ¿Qué valores toma el área del rectángulo inscrito en la parábola? Justifica tu respuesta.
4. Expresa algebraicamente el área del rectángulo en función de la base. Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área? Justifica tu respuesta.
6. Si la ecuación de la parábola es ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área? Justifica tu respuesta.

- ii. Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.
- iii. Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.
- iv. Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.
- v. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.

Además en términos del desempeño alcanzado en el curso y teniendo en cuenta que la actividad seleccionada era la considerada como evaluación final, se consideraba que para el éxito de los estudiantes en esta actividad, durante el desarrollo del curso, la metodología utilizada debía haberlos orientado a: i) tener claridad en el por qué y el cómo expresar una función en términos de una variable, ii) prestar atención al dominio de la función que modela el fenómeno, iii) prestar atención a la expresión algebraica para de esta manera determinar el modelo que más se ajustaba a la situación planteada.

### Análisis preliminar de la actividad

La comunidad de práctica que diseñó las actividades estableció algunos indicadores para el análisis del desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, dichos indicadores se relacionan a continuación:

- i. Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.

Más allá de este análisis, planteado de manera general para examinar el éxito de los estudiantes en la actividad evaluativa, se quiso realizar un análisis *a priori* de los comportamientos esperados en el desarrollo de la actividad que pudiesen ser expresados en términos de las acciones mentales propuestas en el marco conceptual de Carlson *et al.* (2003). Dichos comportamientos se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3. Análisis a priori a partir de los comportamientos esperados**

Acciones Mentales	Descripción de La acción mental	Análisis a Priori
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Se espera que el estudiante verbalice la coordinación de las dos variables, es decir, que identifique las magnitudes que varían en la situación (la base y la altura del rectángulo, la base y el área, la altura y el área)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra	Se espera que el estudiante identifique y verbalice como es la variación del área a medida que la base aumenta (identificar y verbalizar si el área se va incrementando a medida que la base aumenta o si por el contrario el área disminuye)



**Tabla 3. Análisis a priori a partir de los comportamientos esperados (continuación)**

Acciones Mentales	Descripción de La acción mental	Análisis a Priori
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Se espera que el estudiante verbalice que el cambio del área del rectángulo es positivo en un intervalo entre la base mínima y el punto donde el área se hace máxima y es negativo en el intervalo desde donde el área se hace máxima y el punto donde la base es máxima.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada	Se espera que el estudiante verbalice que el cambio del área del rectángulo empieza a crecer de forma más lenta a medida que la base se aproxima al punto donde el área se hace máxima. De la misma forma, que verbalice que el área empieza a decrecer de forma más rápida a medida que la base se hace máxima o mínima.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	Se espera que el estudiante construya la gráfica que modela el área del rectángulo en función de su base. Esta construcción de la gráfica debe implicar el entendimiento (expresado en la verbalización) de las concavidades y puntos de inflexión de la función.

## Resultados

Tras la aplicación de la actividad en uno de los grupos del curso, se realizó un análisis descriptivo de los comportamientos observados en los estudiantes. Estos comportamientos se comparan con los esperados en el análisis *a priori* y sirven como referencia para el análisis que se realiza posterior a la entrevista con los estudiantes seleccionados.

## Coordinación y dirección

Los estudiantes reconocen y expresan tanto de manera oral como escrita que existen cambios entre las magnitudes que están presentes en la situación, base, altura y área. De manera similar, reconocen también como es la variación del área con respecto a la base. En las figuras 2 y 3 se pueden observar las acciones mentales uno y dos respectivamente:

Base	Altura	A
0,5	5,93	2,96
1	5,75	5,75
2	5	10
3	3,75	11,25
4	2	8
4,3	0,5	2,35

Figura 2. Variación de las magnitudes

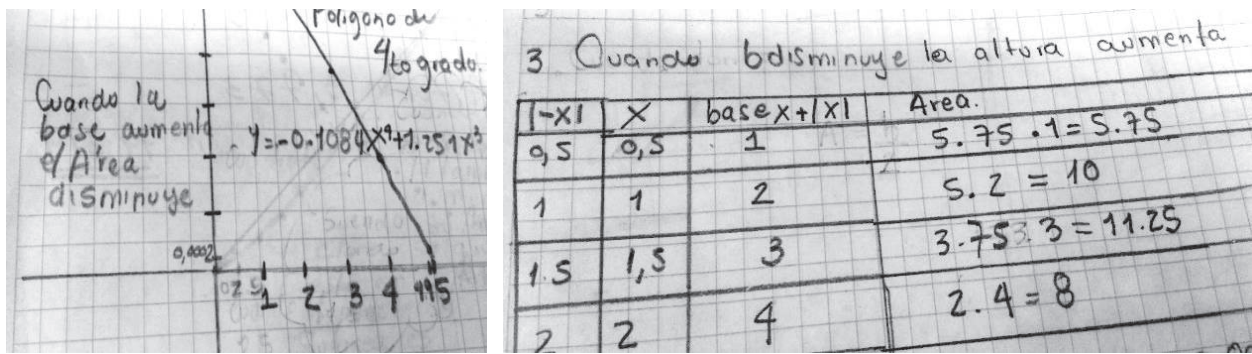


Figura 3. Variación del área y de la altura con respecto a la base

En el caso de la figura 2 el estudiante construye una tabla de valores que refleja la comprensión del cambio que hay entre las variables. En el caso de la figura 3, además de la construcción de una tabla o de una gráfica que pueda modelar la situación presentada, los estudiantes enuncian la dirección de dichos cambios: “Cuando la base aumenta el Área disminuye” “Cuando b [la base] disminuye la altura aumenta”

Para el caso de las acciones mentales tres y cuatro encontramos frases que permiten percibir que los estudiantes presentan comportamientos acordes a dichas acciones:

- E1: Uno encuentra dos áreas que valen lo mismo.
- E2: Si, pero para alturas diferentes.
- E3: Excepto en el máximo.
- E1: Ah sí, tiene que haber un área que es máxima

⑤ (a) dimensiones del rectángulo del mayor área es de 2.829 de base y 4 de altura. porque en esos puntos es el área mayor y según los datos de la gráfica si se trasladan los puntos van a empesar a disminuir tanto si se le aumenta o se le quite.

Figura 4. Cambios del área con respecto al área máxima y al valor de la base que hace máxima el área

## El caso de María. Acciones mentales percibidas

Para María el tránsito por la acción mental uno parece no presentar ninguna dificultad y sus verbalizaciones dan cuenta del reconocimiento de la coordinación de la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra, lo que corresponde a la acción mental dos. La estudiante sólo hace referencia a los cambios de las variables en la fase inicial de la entrevista cuando reconoce que al modificar la posición del punto A puede modificar los valores de otras magnitudes:

- Investigador: ¿De dónde podrías conocer A? [en este caso A se refiere al área, dado un comentario anterior de María]
- María: ¿Acá ya hay datos? [Se refiere a la hoja de cálculo de GeoGebra]
- Investigador: No, no hay datos.
- María: Yo lo pongo en registro en la tabla [el punto A] y acá sale, acá va diciendo cuál es el área. Entonces acá voy moviendo y el [el software a través de la hoja de cálculo] me va marcando el área, entonces yo puedo decir que en el punto 1 el área es 10.



Los comportamientos en los que se puede identificar en la estudiante la segunda acción mental son más claros y María describe de manera cualitativa los cambios en una variable con respecto a la otra:

- Investigador: ¿Cómo se comporta el área?
- María: Cuando la base aumenta, digamos las dos tienen similitudes [...] El área cada vez aumenta si la base es menor, acá entre 0 y 1 [el valor de la base]
- Investigador: ¿Y si pasamos de 1?
- María: Si pasan del 1 el área disminuye.

En esta parte de la entrevista María tiene un problema para poder identificar los valores que puede tomar la base del rectángulo, debido a que la parábola en la que está inscrita el rectángulo es simétrica con respecto al eje Y. Por eso ella hace la asociación con el 1 como el valor de la base que hace máxima la altura, sin embargo luego de formular algunas preguntas que orientan sobre este aspecto, María intenta cuantificar las variaciones de las magnitudes presentes:

- María: Acá tenemos que es 4 [la medida de la base], entonces podríamos decir que la altura es 2 y la base... base por altura entonces el área sería 8.
- Investigador: Pero, ¿siempre se te cumple esa área o esa altura?
- María: Vamos a mirar, si es 1, [se mantiene callada un instante] no cumple porque entonces sería 2 de base, pero entonces no cumple.
- Investigador: ¿Cómo hacemos para hallar esa altura?, mira que lo que conjeturas inicialmente no se cumple.
- María: [No responde]
- Investigador: ¿Qué harías para decirme cuanto es el área?
- María: Haría como una sucesión que tanto va aumentando, entonces diría que entre 0 y 1 [la medida de la base] la altura está entre 5 y 6. Y entre 1 y 2 está entre 5 y 3.

Esta última afirmación deja entrever que no sólo existe cuantificación del cambio, sino que se reconoce que los cambios no están siendo uniformes. Otra expresión de la cuantificación de los cambios de las variables se registra cuando halla los valores máximos y mínimos para el área del rectángulo:

- María: Acá diría que el área está entre... el área mínima es 0,1.

- Investigador: ¿No podría ser menor a 0,1?
- María: Sí, desde que no sea cero. El área máxima sería mirar a ver hasta donde registra [se refiere al registro del área que le permite hacer el software mediante la hoja de cálculo]. El área máxima sería esta [señala la pantalla e indica el valor] cuando la base mide 2,8.

En María existe hasta ahora un tránsito continuo entre las acciones mentales uno a cuatro. Por último se le pide a María que haga la gráfica que represente el área del rectángulo que ha estado trabajando:

- Investigador: Ahora dime ¿cómo harías una gráfica del área que estás hallando ahí en el rectángulo?
- María: ¿Cómo haría qué?
- Investigador: ¿Cómo harías la gráfica del área de ese rectángulo?
- María: [Se mantiene en silencio]
- Investigador: Tu ya me dijiste las condiciones, me dijiste la base está entre...
- María: La base está entre 0 y 5.
- Investigador: Listo, para 0 ¿cuánto vale el área?
- María: Vale 0.
- Investigador: Y para 5 ¿cuánto vale el área?
- María: Para 5 vale... no la lee [se refiere a que inicialmente el software no le muestra el valor], ah, es 0 igual.
- Investigador: Si yo le doy a cada punto un valor de lo que da el área, ¿cómo te quedaría esa gráfica?
- María: Como una parábola.

Esta explicitación de la representación gráfica del área permite inferir que María comprende la razón de cambio promedio de la función en relación con cambios en la otra variable. Sin embargo, al realizar la gráfica que representa el área, parece no estar muy segura de su afirmación y la representación gráfica la hace a partir de puntos. Es claro en este punto que María no llega a comprender la razón de cambio instantánea. A pesar de que existe una construcción de una gráfica, no se refleja el entendimiento de las concavidades, inclusive se podría pensar que la gráfica realizada muestra comportamientos asociados a las acciones mentales uno y dos, pues esta se encuentra limitada por valores asignados a cada una de las magnitudes que covarian.

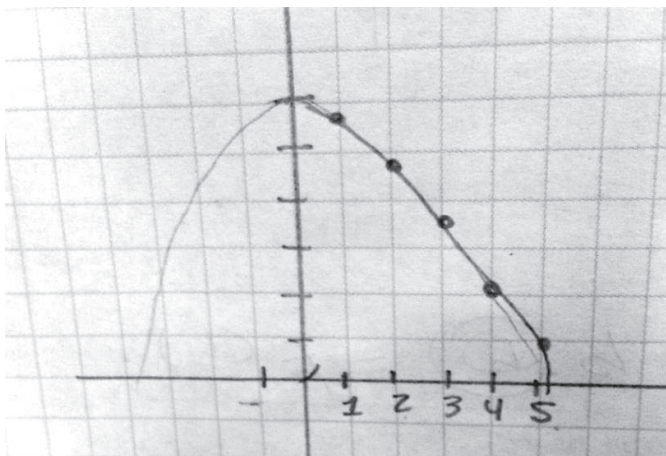


Figura 5. Gráfica realizada por María para representar el área en función de la base

A pesar de que María había explicitado en los pasos anteriores las condiciones que le permitían realizar la gráfica que representaba el área del rectángulo, su representación pudo verse permeada por la representación gráfica de la parábola dentro de la cual el rectángulo estaba inscrito. No significa esto sin embargo un retroceso en las acciones mentales ya realizadas.

### El caso de Luis. Acciones mentales percibidas

De manera similar a María, Luis evidencia conocer que existe relación entre las magnitudes que hacen parte de la situación planteada y muestra sin problemas desde un primer momento que se puede situar en un nivel dos de razonamiento. La acción mental dos está presente en las verbalizaciones del estudiante y cuando los cuestionamientos se lo exigen descompone esa acción mental para justificar a través de la acción mental uno. Luis manipula la representación que le muestra GeoGebra y expresa lo siguiente:

- Luis: [...] Yo sé que yo puedo colocar el área en función de la base, pero hay que tener en cuenta la altura de la [indica la parábola] que es 6 y con eso la base va disminuyendo.

Las demás verbalizaciones del estudiante son claras referencias de la comprensión de la dirección del cambio de una variable con respecto a los cambios en la otra:

- Luis: Entre más se parezca a un cuadrado más [grande] va a ser el área.

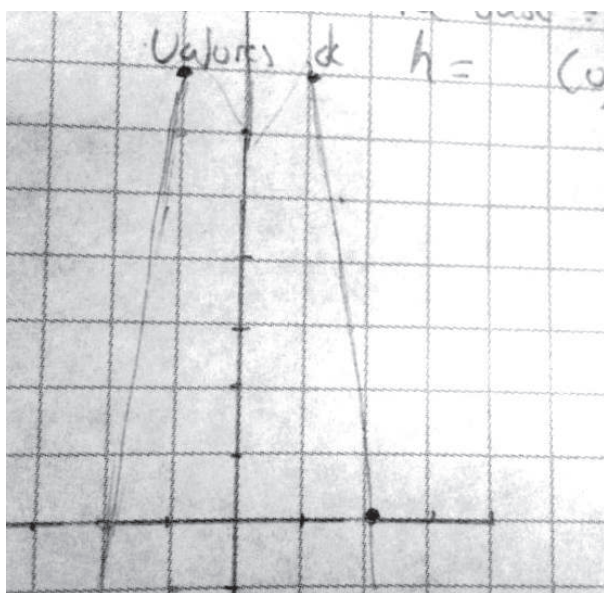
- Investigador: ¿Qué pasa cuando la base aumenta?
- Luis: La altura disminuye.
- Investigador: Y ¿qué pasa con el área?
- Luis: Se hace más pequeña

Posteriormente a este reconocimiento de la dirección del cambio, el estudiante responde a las preguntas del investigador respecto a la cantidad en que las magnitudes varían. Luis, aunque no manifiesta de manera clara una cuantificación del cambio de una variable con respecto a la otra, logra tras la interacción con la representación gráfica y tabular que le proporciona GeoGebra, discernir hasta qué punto los incrementos de una variable son positivos respecto a la otra:

- Luis: [El área] se hace más pequeña
- Investigador: A medida que la base aumenta
- Luis: Si.
- Investigador: ¿Siempre?
- Luis: El área disminuye si la base aumenta, ¿eso era lo que me estaba preguntando?
- Investigador: Si, preguntaba si pasa siempre.
- Luis: [Se demora en responder, permanece pensativo e interactúa con el software] No, no porque acá el área, por ejemplo acá el área es 1 por 5,5 más o menos, entonces acá va aumentando y cuando llega al punto donde el área es máxima vuelve a bajar. O sea en este punto, aquí va en aumento y luego el área vuelve a bajar.

No existe dentro de la entrevista un momento donde se pueda inferir que Luis identifica las razones de cambio promedio, pues no verbaliza ni escribe que el cambio en el área es más lento a medida que el rectángulo se halla cercano a tener su área máxima. No significa esta actitud que podamos descartar para Luis la acción mental cuatro o situarlo de inmediato en el nivel tres. Por el contrario, las verbalizaciones de la representación gráfica que modela la situación planteada dan pie para pensar que Luis transita por ese camino para poder sustentar las acciones que corresponden al nivel cinco:

- Investigador: ¿Cómo sería la gráfica del área, ahora que ya hemos definido las demás variables?
- Luis: ¿La gráfica del área?
- Investigador: Sí, porque usted me dice “el valor de la base va entre 0 y 2,5 y el valor de la altura entre 0 y 6”. Y me da ya una función donde me dice bueno el área es más o menos así.
- Luis: No pero acá hay un error, acá es hasta 5, hay que tomar la parte negativa. Bueno, pues si en altura si es la Y.
- Investigador: Listo ¿cómo quedaría esa gráfica? Usted me dice que esa es la función, ¿cómo quedaría la gráfica de esa función? [Se le indica al estudiante una función obtenida por él mismo, de manera algebraica]
- Luis: Esta misma parábola [Indica la misma parábola en donde se halla inscrito el rectángulo]



Tal y como sucedió con María, Luis también hace referencia a que la gráfica que modela el área del rectángulo es igual a la parábola inicial donde se halla inscrito el rectángulo. De la misma forma, Luis había explicitado ciertas condiciones para poder graficar pero al momento de responder al cuestionamiento del investigador no logra hacerlo de manera adecuada. Incluso genera una gráfica en GeoGebra haciendo una manipulación arbitraria de los parámetros que ya conocía:

- Luis: Pero eso da extraño [La gráfica obtenida]
- Investigador: ¿Por qué le da extraño?
- Luis: Cuando es 0 la es 6 y cuando es -1 me da 7, entonces cómo así [realiza una graficación a lápiz y papel de los datos obtenidos], pero está mal.
- Investigador: ¿Por qué está mal?
- Luis: Porque pues esta es la gráfica que expresa el área del rectángulo, no debería subir hasta 7.
- Investigador: ¿Hasta dónde debería subir?
- Luis: Así, tendría que quedar igual que la otra
- Investigador: ¿Igual que cuál?
- Luis: Que esa [la que circunscribe al rectángulo]
- Investigador: ¿Exactamente igual?
- Luis: Pues, si es para expresar el área y no estamos tomando los negativos, se debería correr.

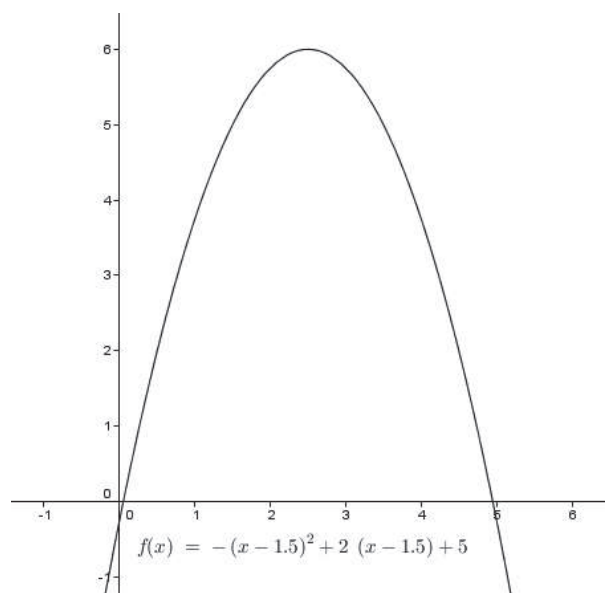


Figura 6. Gráficas realizadas por el estudiante a lápiz y papel y en GeoGebra para representar el área del rectángulo inscrito

## Discusión de los resultados

El marco conceptual propuesto por Carlson *et al.* (2003) sirvió como herramienta no solo para categorizar a los estudiantes en unos determinados niveles de razonamiento covariacional para la situación presentada, sino para determinar de manera detallada el avance del razonamiento a medida que se afronta la mencionada situación. Como los mismos autores lo afirman, el avance del razonamiento covariacional no se presenta de manera lineal sino que los mismos estudiantes transitan entre los diferentes niveles, sustentando así acciones mentales precedentes.

La acción mental uno para Luis y María puede parecer no estar presente en el desarrollo de las actividades pues se explicita muy poco cuáles son las magnitudes que varían en la situación. Esto ocurre más que todo porque la situación misma plantea unas condiciones iniciales dadas que le facilitan al estudiante el reconocimiento de esas magnitudes, además de la pericia ganada por ellos en el manejo de este tipo de situaciones al participar en el curso del que hace parte la actividad.

El diálogo continuo con el estudiante en el desarrollo de la actividad permite el avance dentro de los niveles de razonamiento, dándole a la mediación realizada por el investigador un papel preponderante en dicha evolución.

Ahora bien, se debe hacer hincapié en que así como el uso del software permite generar una mayor y mejor interacción con la situación planteada, en ocasiones como las encontradas en este estudio, pueden permear la visión del estudiante quien solo se limita a reproducir lo que el software le presenta. Se debe ser muy cuidadoso tanto en la manipulación como en el diseño de las actividades para evitar ese tipo de contratiempos.

## Conclusiones

La actividad seleccionada para el desarrollo de este estudio posee una característica diferenciadora que puede suscitar dos análisis por separado ya que el ejercicio planteado contempla dos tipos de covariación: una explícita (base y altura del rectángulo) dada por la construcción en GeoGebra y una implícita (base y área del rectángulo). Ahora bien, las preguntas e instrucciones que contenía la actividad estaban enfo-

cadadas en la covariación implícita, dejando a un lado la otra covariación y facilitándole a Luis y María el paso por la acción mental uno que consistía en la verbalización de las magnitudes que covariaban.

Dicha acción mental es casi que omitida por los estudiantes, no por falta de la comprensión de la misma, sino por el hecho referido por Carlson *et al.* (2003) que la idea básica de covariación es asequible para niños de cortas edades.

Las acciones mentales dos, tres y cuatro son expresadas con cierto nivel de dificultad por los estudiantes y es el hecho de la manipulación de la representación y la posibilidad de verificación que esta les brinda, la que les permite solventar las inquietudes que sobre sus mismas deducciones surgen. Inclusive la orientación que pueden significar las preguntas planteadas en la actividad no llegan a ser detonantes suficientes para que las acciones mentales dos a cuatro se vean completamente reflejadas en los estudiantes.

Respecto a la acción mental cinco, se puede inferir una total ausencia de la misma, pues a pesar de que los estudiantes realizan una construcción de una gráfica que modela la situación planteada, tal y como se esperaba en el análisis *a priori*, esta dista mucho de ser la adecuada. Además, cabe resaltar que el solo hecho de realizar la gráfica no implica una comprensión total de la covariación presentada en la situación, pues como se pudo ver en el caso de María la gráfica sólo corresponde a una unión de puntos que solo refleja un paso de una representación tabular a una representación cartesiana. En el caso de Luis la situación es similar alejándose completamente de las acciones anteriores y creando una gráfica prácticamente de forma aleatoria en el software y otra con las mismas características que las creadas por María.

A pesar de no haber encontrado evidencia en los estudiantes del desarrollo de la acción mental cinco, se puede manifestar que la representación ejecutable presentada por el software les permite a los estudiantes un tránsito más ameno y con menores dificultades por las acciones mentales uno a cuatro que caracterizan su razonamiento covariacional. Este tránsito hubiese presentado mayores dificultades al realizarse con lápiz y papel, teniendo en cuenta que tanto los procesos algorítmicos como los algebraicos e incluso el proceso de representación realizado de esta forma es bastante pobre, dejando entrever un número de falencias que, al inicio de este artículo, se habían mencionado

como fruto de un aprendizaje basado en algoritmos y contenidos.

## Referencias

- ÁVILA, P. (2011) *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional, Medellín, Colombia.
- CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S. y HSU, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA*, 8 (2), 151-156
- FIALLO, J. & PARADA, S.E. (2014) Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica* 0 (20). Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. ISSN 0124-2253
- MENA, C. (2014) *La transformación de funciones desde un enfoque covariacional*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional, Medellín, Colombia
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006) *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Recuperado de: <http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf>
- SALDANHA, L. y THOMPSON, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S.B. BERENSEN, K.R. DAWKINS, M. BLANTON, W.N. COULOMBE, J. KOLB, K. NORWOOD y L. STIFF (Eds.), *Proceedings of the 20 th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 298-303). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- VASCO, C. (2006). Didáctica de la matemática. *Artículos selectos*. ISBN: 958-8226-85-6. Vol. 1 págs. 150. Bogotá: Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- VILLA-OCHOA, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 0(19), 9-25.



FACULTAD DE EDUCACIÓN

Artículo recibido 16-02-2015. Aprobado: 09-06-2016