

Descartes y los métodos demostrativos de la geometría antigua
Descartes and the Demonstrative Methods of Ancient Geometry

Por: Juan José Betancur
Instituto de Filosofía
Universidad de Antioquia
juan.jbetancur@hotmail.com

Resumen: *En las repuestas a las segundas objeciones, René Descartes afirmó que había empleado el método de análisis en sus investigaciones como lo habían hecho los matemáticos antiguos; sin embargo, rechazó el empleo de la síntesis —que poseía un papel primordial en los resultados de estos últimos. El siguiente texto busca estudiar el empleo del análisis en matemáticas, filosofía natural y filosofía primera por parte de Descartes, mostrando las dificultades que el empleo de dicha metodología y la exclusión de la síntesis suponen para la última de estas disciplinas.*

Palabras clave: *análisis y síntesis, Descartes, matemáticas antiguas, filosofía natural, Pappus.*

Abstract: *In the Replies to the Second Objections, René Descartes states that he had employed the analytical method in the same way as the ancient mathematicians did; however, he dismisses the use of the synthesis —which did possess so an important role to them. This text studies the employ of analysis by Descartes in mathematics, natural philosophy and first philosophy, showing the difficulties that the use both the analytical methodology and the exclusion of the process of synthesis present to the last of these uses.*

Keywords: *analysis and synthesis, Descartes, ancient mathematics, natural philosophy, Pappus.*

Introducción

Los matemáticos griegos antiguos, en especial de los siglos III y IV, utilizaron el análisis para resolver problemas geométricos que implicaban construcciones. Este consistía en la aplicación de herramientas heurísticas que permitieran conectar aquello

que se buscaba con alguna verdad ya conocida. Esta verdad podía ser un teorema o una construcción ya realizada. En general el proceso consiste en tomar la construcción como realizada y a partir de ella derivar consecuencias que permitan arribar a algo cierto. Una vez este objetivo es alcanzado se reorganiza la cadena deductiva obtenida, haciendo a los antecedentes consecuentes, y viceversa. La posibilidad de realizar este proceso implica la validez de la solución propuesta. El primer proceso se denomina análisis, el segundo síntesis.

En el siglo XVI, René Descartes desarrolla una teoría en matemáticas, física y metafísica que propone el análisis como el único medio adecuado para el desarrollo de soluciones y su justificación (Descartes, 1984b, p. 111). Descartes desplaza el método sintético a un plano expositivo de los resultados, el desarrollo y justificación de nuevos descubrimientos se ubica únicamente en el campo del análisis. Sus soluciones prescinden de la evaluación sintética empleada por los griegos para validar sus resultados en geometría. En este escrito se afirma que el análisis algebraico de René Descartes supone una herramienta superior en la solución de problemas frente a los métodos antiguos de análisis geométrico; sin embargo, su aplicación y el rechazo de la síntesis como método de demostración no se justifica en todos los casos. Mientras en el campo de la matemática y la explicación de fenómenos la aproximación por medios algebraicos puede sostenerse, en el caso del estudio de los fundamentos la aplicación es injustificada y presenta dificultades que Descartes nunca pudo resolver. Descartes no logra dar cuenta matemática de las nociones metafísicas y esto le impide incorporarlos en su estructura de solución de problemas; en esa medida, el estudio de los fundamentos no puede prescindir de la síntesis y su rechazo es infundado.

Para sostener esta explicación, el texto procede de la siguiente manera: primero, se examina el papel que desempeña la síntesis en los métodos de solución en análisis geométrico, mostrando la importancia de su implementación en la validez de las construcciones obtenidas. En segundo lugar, se expone la forma en que Descartes expone la implementación de su método y la forma en que puede justificarse la eliminación de la síntesis en matemáticas y física. Finalmente, se muestra que la aplicación del análisis algebraico no es compatible con el estudio de las nociones metafísicas y que Descartes no logra solucionar este problema con éxito.

La matemática griega y la doctrina del análisis según Pappus

Pappus de Alejandría es una figura importante en los desarrollos que se dan en matemática en los siglos XVI y XVII, pues entre sus escritos se encuentran las descripciones de las prácticas antiguas a partir de las cuales los matemáticos de la época juzgarán los métodos geométricos previos. Cuando Descartes afirma que su método de trabajo es el análisis se refiere directamente a las exposiciones que Pappus ofrece en la *Collectio* (Descartes, 1984a, p. 18). En el libro siete de la *Collectio* (Thomas, 1941, p. 597), Pappus define el análisis como una práctica que permite resolver problemas que implican construcciones. Para él, esta doctrina sólo es útil en la solución de problemas de este tipo. Un problema en el contexto al que aquí nos referimos es una expresión que solicita la construcción de un término geométrico en una relación dada con otros términos dados (Mahoney, 1968, p. 319). En general, la doctrina del análisis comprende dos procesos. Uno es el proceso analítico que consiste en una deducción de relaciones; el otro es la síntesis, que comprende la construcción del problema. La síntesis representa la validez de la construcción (Ibíd., p. 321). En un problema geométrico se tomaba la construcción como si ya se hubiera conseguido y, partiendo de allí, se extraían consecuencias hasta arribar a algo ya conocido; es decir, a un teorema o a una construcción ya realizada. Este era el camino del análisis y se consideraba una solución inversa, pues partía de lo buscado y se dirigía hacia un principio del cual se pudiera desprender tal construcción (Ibíd., p. 321). El método sintético partía de lo encontrado en el análisis, como si fuera lo que se conocía inicialmente, y ordenaba el trabajo anterior en forma implicativa inversa, es decir, los consecuentes del análisis como antecedentes. De este modo se intentaba seguir la cadena de consecuencias hasta arribar a la construcción que inicialmente se buscaba, el éxito en este último proceso representaba la validez de la solución (Ibíd., p. 323).

En Pappus se reconocen dos tipos de análisis, uno teórico y otro problemático. En cada una de las explicaciones suministradas la composición o reordenamiento del problema está ubicada en segundo lugar en el proceso; de hecho, la explicación de la síntesis está íntimamente conectada al proceso previo de análisis, pues parte de la consideración de aquello que finalmente se ha encontrado en él. De otro lado, la situación es mucho más evidente en la explicación de los tipos de análisis, pues allí la naturaleza probatoria de la síntesis es afirmada con claridad. Pappus afirma: “entonces, si eso que fue encontrado

es cierto, eso que se busca también será cierto y la prueba será la inversión del análisis” (Thomas, 1941, p. 599). El hecho de que la síntesis tenga carácter probatorio se encuentra apoyado en una dificultad intrínseca a la *Doctrina del Análisis*. Cuando se realiza la descomposición y se determinan relaciones entre los elementos, estas implicaciones se dan en una dirección; es decir, A entonces B; sin embargo, el hecho de que A implique B es independiente del hecho de que B implique A. Las relaciones determinadas en sentido regresivo hasta un principio no implican que de él se siga un camino de implicaciones hasta la conclusión. Esta dificultad puede solucionarse, como afirma Mahoney (1994, pp. 29-30), por medio del carácter bicondicional de la mayoría de los teoremas de la geometría y en segundo lugar por la introducción de diorismos o particularizaciones específicas del problema que validan la implicación (Freid & Unguru, 2001, pp. 286-287). La validación de la cadena implicativa se da a partir de la producción sintética, pues esta corrobora que no existe ningún salto en la sucesión desde un principio o construcción válida hasta la conclusión que se busca. Esta es la razón por la cual los geómetras de los siglos III y IV exponían sus soluciones de forma sintética. La síntesis exhibe la validez de la construcción ya que permite descartar la posibilidad de haber arribado a la conclusión por medio de premisas falsas (Mahoney, 1968, p. 326). Finalmente, la síntesis particulariza la solución al problema específico planteado; es decir, a la figura que inicialmente se suministró. Se puede afirmar entonces que la exposición sintética es pieza fundamental en el proceso demostrativo del análisis geométrico. Debe mostrarse ahora por qué Descartes puede prescindir de su implementación en la solución de problemas.

La geometría algebraica

Descartes publicó su *Geometría* en 1637, en ella ofrece una exposición de los problemas geométricos en términos de su propia álgebra simbólica. El poder que suministra esta herramienta en la solución de problemas es claramente superior. Prueba de ello es la solución al problema de cuatro o más líneas de Pappus (Descartes, 1954, p. 17 ss.). Este problema no era solucionable por los métodos previos, pues suponía realizar construcciones de más de tres dimensiones y esto no tenía sentido en una geometría que no separaba el cálculo de magnitudes de su comprensión intuitiva. Es decir, todos los elementos involucrados en los cálculos geométricos debían tener una referencia al mundo real, cosa que no sucede en un cálculo que implica más de tres

dimensiones. Descartes supera esta dificultad al concebir las diferentes operaciones aritméticas —como la multiplicación o división— en términos de líneas. Las líneas son nombradas con símbolos y se construyen ecuaciones que los relacionen (Descartes, 1954, p. 2 ss.). La introducción de las ecuaciones es fundamental, pues siendo la expresión de una misma cantidad en dos formas diferentes plantea la igualdad entre ellas y toda igualdad es automáticamente reversible; es decir, su relación es bicondicional. Esto elimina la dificultad lógica de la implicación y la evaluación sintética se hace innecesaria. La última razón para introducir la síntesis consistía en mostrar la solución del problema específico que se había planteado; es decir, de la figura particular a la que se dirigía el problema. En el caso de Descartes su interés no se dirigía a la determinación de una magnitud específica, sino a la expresión de soluciones generales a ciertos tipos de problemas.

Puede decirse, entonces, que el rechazo de la síntesis en la geometría algebraica de Descartes está justificado por la introducción de las ecuaciones y el carácter general de sus soluciones.

Físico-Matemática

La propuesta de Descartes en física es una concepción geométrica del mundo, no en la forma en la que se concibe actualmente; es decir, como herramienta que describe magnitudes involucradas en los fenómenos, sino como una ontología geométrica. Los elementos del mundo se comprenden en términos de características matemáticas. Así, por ejemplo, los cuerpos son concebidos como los sólidos de los geómetras y considerados simplemente por sus dimensiones. Por ello su propiedad esencial es la extensión. El movimiento es una modificación en las posiciones de un cuerpo y otros cuerpos que le rodean por contacto directo; y el cuerpo, siendo una extensión, es divisible como una cantidad matemática lo es de manera infinita (Descartes, 1984a, pp. 231-232). Su física se apoya en nociones básicas de carácter matemático o cinético, estas son, extensión, forma y movimiento. De otro lado, Descartes enfoca el estudio de la física hacia la solución de problemas, es decir, no se parte de primeros principios y se deducen de estos los fenómenos, sino que se plantean fenómenos observados y se convierten en problemas geométricos. La solución de estos se realiza por medio del análisis algebraico (Gaukroger, 1989, pp. 108 ss.). Descartes logra justificar su proceso

de investigación a la luz del análisis geométrico al presentar conexiones razonablemente directas entre la explicación del fenómeno, un elemento teórico crucial y los principios de la matemática y la filosofía natural (Ibíd., pp. 110-116).

Como afirma Gaukroger, Descartes ofrece un tratamiento geométrico de los fenómenos físicos y esto le permite ofrecer explicaciones por medio del método algebraico de análisis. La validez que se observó en el tratamiento de la geometría por medio de las ecuaciones cubija igualmente al campo de investigación física.

Descartes combina esta concepción ontológica con una naturaleza matemática del funcionamiento de la mente. En realidad, lo que él afirma, no es que la mente sea matemática, sino que las matemáticas son el resultado de aplicar las facultades de la mente al estudio de la cantidad. Para Descartes las matemáticas (aritmética y geometría) son fruto de la estructura del entendimiento. Sus métodos de investigación y justificación no son más que el libre ejercicio de nuestras facultades cognoscitivas; es decir, la aritmética y la geometría son el resultado de aplicar estas facultades a la cantidad discreta y a la continua (Descartes, 1984a, p. 17). Por tanto, el método empleado por ellas es diferente de las mismas, es anterior. Descartes utiliza este marco epistemológico para extender el análisis de carácter estrictamente matemático a los elementos de la metafísica. Según Descartes, la exposición que realiza en las *Meditaciones* es del tipo descrito aquí como análisis matemático (Descartes, 1984b, p. 110). Allí, expone con claridad la forma en que utiliza su método para solucionar problemas que implican objetos diferentes de los geométricos. Sin embargo, estas soluciones no son demostrables por medio de las herramientas anteriormente mencionadas. Esto se debe a que los elementos involucrados en los principios que subyacen a estos problemas no son dados a una interpretación geométrica. En esa medida, se resiste al enfoque de solución de problemas algebraicos y se enfrentan a la necesidad de una síntesis para su validación. En la medida en que estos principios no gozan de univocidad no pueden ser un punto de partida para una construcción sintética válida, pues no se reconocería el punto de partida de la demostración y esta quedaría estancada. Aquí surge nuevamente el problema de la implicación; pues, por ejemplo, del hecho de que la postulación del cuerpo se siga necesariamente la postulación de la extensión no implica, como lo afirma Descartes, que de la postulación de la extensión se siga con necesidad la del cuerpo. Allí Descartes podría apelar a la formulación de

condiciones que determinen la solución como, por ejemplo, el condicional: siempre y cuando se entiendan los cuerpos únicamente de manera geométrica y como su propiedad esencial la extensión. Sin embargo, podría responderse que del hecho de postular el espacio geométrico no se sigue necesariamente la consideración de un sólido en él.

Los análisis de Descartes se resisten a la demostración clásica y es por esta razón que Descartes elige exponerlos de manera analítica. Él era consciente de estas dificultades y esto puede observarse en las respuestas a las segundas objeciones de sus *Meditaciones*.

Las segundas objeciones

En su respuesta a las segundas objeciones, Descartes es invitado a hacer una demostración sintética de sus resultados. Frente a esto, realiza una exposición de ambos métodos y especifica la razón por la cual prefiere el método analítico al sintético. Esta razón toma más claridad si se entiende a la luz de los argumentos que aquí se suministran. Descartes afirma que ambos métodos son adecuados para la demostración de las soluciones; sin embargo, reconoce que “la diferencia es que las nociones primarias que son presupuestas para la demostración de las verdades geométricas son aceptadas desde el principio por todos, ya que ellas acuerdan con el uso de nuestros sentidos” (Descartes, 1984b, p. 111). El punto de inicio en una demostración debe ser una noción completamente evidente. Descartes no pudo dar un tratamiento geométrico exitoso a las nociones de la filosofía primera y en esa medida no pudo otorgarles la claridad y evidencia que caracteriza a los elementos de la matemática. Esto significa que, a la luz de la exposición que aquí se suministra, no puede introducirse este campo investigación en el análisis algebraico y su validación debería ser sostenida por la reorganización sintética. De hecho, cualquier intento de relación con el análisis geométrico es infructuoso. Como afirma Pappus en su descripción del análisis, esta herramienta solo es útil frente a problemas relacionados con líneas (Thomas, 1941, p. 597) y este último ámbito de la filosofía de Descartes no puede reducirse a ellas. La única forma en que el lector puede acercarse a estas nociones es por medio del camino que le dictan los ejercicios conceptuales que Descartes realiza en las *Meditaciones*. Solo por medio de la atenta percepción de los argumentos expuestos en las *Meditaciones* se pueden encontrar las relaciones sistemáticas entre los conceptos. Puede afirmarse que la situación en las soluciones geométricas de los antiguos era la misma; es decir, allí los

análisis se realizaban por medio de construcciones que, de manera interdeterminativa, conducían a una afirmación verdadera o a una construcción que ya se hubiese demostrado. Pero esto no representa una objeción si consideramos que todas estas relaciones podían sustentarse exitosamente de manera sintética. El proceso realizado por Descartes en el ámbito metafísico se asemeja más a los desarrollos dialécticos desarrollados tradicionalmente por los escolásticos.

Conclusión

Descartes era consciente de las dificultades que rodeaban la justificación, por medio del análisis geométrico, de sus teorías explicativas en filosofía primera. Descartes, previo a sus composiciones metodológicas y metafísicas, tuvo un notable desempeño en las disciplinas matemáticas y físico-matemáticas de su época. Fue allí donde realizó sus primeros logros como, por ejemplo, la solución general de las ecuaciones cúbicas, la solución del problema de Pappus o la determinación de la ley matemática de refracción. Descartes era consciente de la necesidad de un adecuado fundamento y validez para sus hallazgos. En la medida en que se hace consciente de la imposibilidad de cumplir con ese requisito, por medio del análisis geométrico antiguo, opta por mostrar la forma en la que se realiza la investigación buscando desprender evidencia que compense la imposibilidad de formular una demostración. Sin embargo, este proceso se aleja de su trabajo en resolución de problemas y termina siendo un desarrollo conceptual escolástico de elevado rigor.

Referencias

Descartes, R. (1954). *Geometry*. D. E. Smith & M. L. Latham (Trans.). New York: Dover.

Descartes, R. (1984a). *The Philosophical Writings of Descartes, Vol. 1*, J. Cottingham, R. Stoothoff, & D. Murdoch (Trans.). Cambridge: Cambridge University Press.

Descartes, R. (1984b). *The Philosophical Writings of Descartes, Vol. 2*, J. Cottingham, R. Stoothoff, & D. Murdoch (Trans.). Cambridge: Cambridge University Press

Freid, M., & Unguru, S. (Eds.). (2001). *Apollonius of Perga's Conica: Text, Context, Subtext*. Netherlands: Brill.

Gaukroger, S. (1989). *Cartesian Logic*. New York: Oxford University Press.

Mahoney, M. (1968). Another Look at Greek Geometrical Analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, (5): 318-348

Thomas, I. (1939). *Greek Mathematical Works, Vol. 2*. Londres: Loeb.